现代数学译丛

非线性与泛函分析

M. S. 博格 著

余庆余 译

陈文嫄 校

科学出版社

1989

内 容 简 介

本书系统地阐述了非线性泛函分析中的基本理论、方法、工具和结果，如隐函数定理、拓扑方法、变分方法、歧点理论等以及有着广泛应用的各种非线性算子. 此外，还介绍了这门学科在经典的以及现代的数学物理中各种问题上的大量应用. 本书内容丰富、全面、系统，可供大学数学系高年级学生和教师以及从事数学、数学物理和力学等工作的科技人员阅读参考.

M. S Berger

NONLINEARITY AND FUNCTIONAL ANALYSIS

Academic Press, 1977

现代数学译丛

非线性与泛函分析

M. S. 博格 著

余庆余 译

陈文螈 校

责任编辑 张晓薇 夏墨英

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1989年11月第一版 开本：850×1168 1/32

1989年11月第一次印刷 印张：16 1/4

印数：0001—4 215 字数：423,000

ISBN 7-03-000672-0/O · 181

定价：19.50元

序　　言

近几十年来，数学界对有关线性算子的问题和把线性代数的已知结果推广到无穷维空间的问题给予了极大的重视. 这是很有远见的. 由此导出的丰富理论对整个数学产生了深远的影响. 然而，当人们去掉线性的假定时，算子理论以及有关的许多具体问题展示出数学研究的一个崭新领域. 在这方面迄今得到的基本结果已经使线性理论得到完善和深入的发展. 和线性的情形一样，这些结果是由数学分析中的具体问题引出来的，并和它们有着密切的联系. 这本讲义的目的就是系统地讲授这些基本的非线性结果，以及它们对数学分析各个领域中不同具体问题的应用.

依照 Henri Poincaré (我们这门学科的一个伟大先驱) 的想法，我这里是在最广泛的意义下使用"数学分析"这个术语的. 的确，仔细审查那些在实或复流形的微分几何、经典的和现代数学物理以及变分学的研究中所出现的具体的非线性问题，就会发现许多反复出现的典型问题，而它们必将导致深刻的数学结果.

从抽象的观点看，处理上述课题基本上有两条途径. 第一条是，像上面提到的，将线性泛函分析中，由 Fredholm, Hilbert, Riesz, Banach 和 von Neumann 等人获得的结果推广到更一般的非线性的情形. 第二条途径是，把这门学科看作流形和流形间映射的无穷维微分几何学. 显然，这两者紧密相关. 当它们和现代拓扑结合在一起时，就成了强有力的数学思想的一个典范.

最后，在这两种方法之外，还有一种本质上既是非线性的，又是无穷维的现象. 认识这种事物的框架正处在发展之中.

本书要讲的材料分为三部分，每部分都包括两章. 第一部分首先提供了为理解后面内容所需要的背景材料以及数学上的预备知识. 其次，讲述非线性算子的初等微积分学和分类. 第二部分

讨论局部分析．第三章论述了古典反函数和隐函数定理在无穷维时的各种推广，以及研究算子方程的 Newton 法、最速下降法、强函数法．在第四章，我把注意力转向那些与歧点和奇扰动有关的参数相依扰动现象．在这一章，拓扑（“超越”）方法的应用是本质的．本书的第三部分（也是最后一部分）讲述大范围分析，指出把具体分析和抽象方法结合起来的必要性．第五章发展了可用于一般算子的整体性方法．这章还特别介绍了映射度的各种理论和应用，以及它与球面高阶同伦群有关的最新进展，还介绍了线性化方法和投影法．第六章介绍大范围变分学和它在现代临界点理论中的发展．这个材料自然是从与高型临界点有关的极小化问题和等周问题中引伸出来的．

本书的一个重要课题是把得到的抽象结果用于解决几何学和物理学中饶有趣味的问题．选择所讲述的应用时，既考虑到其自身的意义，也注意到它们与书中所介绍的抽象内容的关系．在很多情形中，具体的例子要求对理论作一些推广，因此它也为理论的进一步发展提供了动力．我希望所涉及的一些较深的和较复杂的应用将提高这门迅速发展的学科的价值和意义．

此外，我选取了一些非线性问题作为我们抽象化的模型，它们包括：

(i) 确定非线性常微分方程组的周期解；

(ii) 各类半线性椭圆型偏微分方程的 Dirichlet 问题；

(iii) 在给定的紧流形上，确定“最简”度量的微分几何问题（这里“最简”指常曲率）；

(iv) 非线性弹性的 von Kármán 方程解的结构．

所有这些模型说明需要发展新的理论，需要更精巧、更深刻的研究方法．另外，这些问题的古典性表明，对不太经典的非线性问题抽象本质的研究还是大有可为的．

本书叙述的很多抽象结果和应用都是近代的成果，我希望它们构成整个发展的一个统一体系，这个体系不同于这门学科的已有专著，在选材时是相当主观的．为使本书篇幅不致过大，很多重

要的题目仅仅是粗略提及，提到时讲得也很少. 有关半序 Banach 空间、变分不等式、凸分析、单调映象、抛物型和双曲型偏微分方程的材料都略去了，关于这些课题已经有了很多现代专著和综述文章. 本书的风格略有不同，我回避了过于特殊以致不能阐明所提到的一般原理的那些应用，二阶非线性微分方程两点边值问题就是一个例子. 这样的问题可以(例如)用相平面法成功地加以解决. 最后，现代物理学的"Euclid"场论方法已经指出，非线性双曲型方程组常常可以借助于这里解决的非线性椭圆型边值问题来处理.

本书是在几年中写成的. 不可避免会出现各种印刷错误，欢迎读者把所发现的错误通知我，以便今后订正. 我希望这里讲述的材料有着充分的连贯性，饶有风趣和富有吸引力，给读者提供一个进一步探讨非线性分析的一个框架.

本书略去了很多有趣的非线性问题和解释的例子，以使篇幅不致太大. 我打算在不久的将来完成另一卷书，它将包括这些问题以及同样有启迪但更常规的问题. 该书还将包括一个更完备的文献索引.

记号和术语

Ω	N维实 Euclid 空间$\mathbf{R}^N$中的开子集
$\mathfrak{M}^N$	N维光滑流形
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	$\mathbf{R}^N$中点x的 Descartes 坐标
$D_i=\partial/\partial x_i$	对定义在Ω上的函数求一阶偏导数的运算
$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$	重指数
$\lvert\alpha\rvert$	$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$
D^α	$\prod_{i=1}^{N}D_i^{\alpha_i}$
$F(x,D^\beta u,D^m u)$	m阶的微分算子，显式地依赖于m阶的高阶微分算子 D^α，其中 $\lvert\beta\rvert<m$
X	函数的线性向量空间
线性算子F	对任意 $f,g\in X$，以及数α,β，都有 $F(\alpha f+\beta g)=\alpha F(f)+\beta F(g)$
非线性算子F	一个算子，不必是线性的
拟线性微分算子 $F(x,D^\beta f,D^\alpha f)$	当看作最高阶微分算子 $D^\alpha f$ 的函数时，F是线性微分算子
定义在Ω上的微分方程	两个微分算子间的方程，在Ω的每一点成立
古典解	定义在Ω上的(充分光滑的)函数，在Ω的每一点都满足方程
$\lvert x\rvert$	向量 $x\in\mathbf{R}^N$ 的长度
$\lVert u\rVert$	Banach 空间X元素u的范数
绝对常数	在不等式 $F(x)\leqslant cG(x)$ 中用到，意指当

	x 变化时 c 与 x 无关
半范	定义在 X 上的非负函数 g，满足 $g(\alpha x)=\|\alpha\| g(x)$ 和 $g(x+y)\leqslant g(x)+g(y)$

给读者的建议

本书试图把数学分析的某些方面和科学的其它领域结合起来. 要达到这个目的,就必须对问题的来源给予更多的说明,并要求给出一个通常教科书中没有的创造性的方法.

第一章和第二章提供问题的背景和预备知识,可以不去读它. 建议读者跳过它们去读那些他感兴趣的东西,直接读后面的章节. 当需要时再回过头来读第一部分,以补充所需要的知识. 在此,并没有要求读者把这本书依次从头读到底.

从性质上来说,第三章是抽象的,并且发展了一个使用"泛函分析"语言的工具. 对于后面的整个内容来说,第三章的前三节是必需的. 与此相反,第四章整个是属于应用的. 事实上,要想对参数相依性局部分析有个真正的了解,必须仔细思考一些具体的经典的模型. 当然,读者可以只选择那些他感兴趣的应用.

第三部分可以分开来读. 例如,第五章包括三条平行发展的线索: 5.1 节,5.2 节和 5.3 节—5.5 节(当然,要想理解得深刻,必须把三条线都融汇起来). 类似地,第六章自然地分成三部分: 6.1 节—6.2 节,6.3 节—6.4 节,以及 6.5 节—6.7 节. 前两部分没有用到拓扑方法,但是,对于第三部分来说,拓扑方法却是本质的.

我们要求读者具备一些预备知识,其中包括常规的线性泛函分析、常微分方程以及偏微分方程的知识. 如果对大学里所讲授的物理学和微分几何再有些了解,那对于理解有关应用的那些部分是有帮助的. 这些应用处理得比较简洁,并具有不同程度的彻底性. 把每个应用和传统的更详尽的处理方式加以比较将是有益的. 我的打算是向读者提供这门学科的一个概况,使他们对它的范围、效用和分枝有所了解. 同时,对于关键的思想又不致模糊.

目　　录

第一部分　预 备 知 识

第二部分 局部分析

第三部分 大范围分析

第一部分 预备知识

在微分几何和数学物理中，以及在很多其它科学领域里，很多问题都与非线性微分方程组的求解有关．但是，因为这些方程组大多数都是“不可积的”，即是说，它们的解不能用闭型写出．一般说来，研究这些方程的经典方法失效，于是要求寻找新的方法．近年来已找到研究这些问题的一个新方法，它既比较有效，又简单易懂．这个方法本质上在于：用函数空间的语言把所给的问题加以改写；然后，借助于泛函分析的方法，对这个抽象问题尽可能完善地加以分析；最后再把所得的结果进行“翻译”，以回到原来的问题．从几个方面来说，这个一般方法都是重要的：首先，它去掉了无关紧要的枝节，更易于揭示出该问题的分析核心．其次，表面上看来不同的问题可以用同一个理论来处理．最后，能够清楚地确定，哪些抽象结构将是研究新颖的非线性现象的基础．今后我们要描述这些思想的轮廓，以及(非线性)泛函分析和具体问题之间的相互作用．

第一部分的目的

和其它众多的数学领域不同，即使在最简单的例子中，我们所要讨论的问题也是以把各种不同特性的内在“结构”结合在一起而为其特点．于是，虽然这里提出的大多数问题是容易陈述的，但要真正充分理解所给问题的解答却需要大量预备知识．所以第一部分的目的有以下四个方面：

i) 系统地列出这些预备知识；

ii) 导出今后要研究的各类具体问题；

iii) 指出用适当的抽象非线性算子改写具体问题的必要步

骤;

iv) 发展抽象算子的微积分学.

第一章处理前两个问题,而第二章探讨后两个内容.

第一章　背景材料

本章分为六节．前两节列举了几何学和物理学中一系列经典的非线性问题，以及在研究这些问题时所遇到的典型困难．其次，对后面要用到的那些线性泛函分析的内容进行总结，再回顾线性椭圆型偏微分方程的正则性结果．已经证明，对于把泛函分析成功地用于第一节中所讨论的非线性问题来说，这些都是非常重要的．最后，对课文中将用到的，与有限维空间的映射有关的基本事实(特别是拓扑学的结果)作一概述．

1.1　非线性问题的产生

在开始系统学习非线性问题之前，有必要谈谈后面要讨论的问题的某些重要来源．非线性问题有三个经典来源：首先是微分几何问题，由于考虑曲率，很自然引出非线性问题；其次是古典和现代物理学中的数学问题；最后是和非二次泛函有关的变分学问题．自然，这些并非全部来源，其他诸如经济学、遗传学以及生物学等领域中的数学都提供了全新的非线性问题(参看本章末的注记)．

1.1A　*微分几何提出的问题*

和弯曲的影响有关的微分几何问题是非线性微分方程组的一个丰富的、历史性的来源．下面的一些例子描述了它们的范围：

(i) 流形上的测地线　考虑简单的超曲面 S，它定义为 $S=\{x|x\in \mathbf{R}^N, f(x)=0\}$，其中 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^N$ 上的 C^2 实值函数，在 S 上 $|\nabla f|\neq 0$．　S 上的一条测地线规定为 S 上这样的曲线 $g=x(t)$，它们是弧长泛函的临界点．在几何上，它们有如下特征：　g 的主法线和 S 的法线相重合．　在分析上，测地线是下面

N个方程的常微分方程组的解：

$$(1.1.1)\qquad \begin{aligned}&(a)\ x_{tt}+\mu(t)\nabla f(x)=0,\\&(b)\ f(x(t))=0,\end{aligned}$$

其中 $\mu(t)$ 是 t 的某个实值函数。

除了少数例外，这个方程组非线性地依赖于 $x(t)$。例如，让我们借助 f 来确定(1.1.1)的函数 $\mu(t)$。事实上，如果我们把 $f(x(t))=0$ 对 t 微分两次，就得到

$$H(f)x_t\cdot x_t+\nabla f\cdot x_{tt}=0,$$

其中 $H(f)$ 记为 f 的 Hesse 矩阵 $(\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j)$。于是从(1.1.1)推出

$$\mu(t)=\{H(f)x_t\cdot x_t\}|\nabla f|^{-2},$$

故可得

$$|\nabla f|^2\mu(t)=H(f)x_t\cdot x_t.$$

所以，除非 S 是球面(从而 $\mu(t)$ 是常数)，或者 S 是超平面(这时 $\mu(t)\equiv 0$)以外，方程组(1.1.1)对 x 是非线性的。如果 S 是个椭球面，Jacobi 指出，可以借助于椭圆函数把方程组(1.1.1)的解显式地表达出来。但是，像这样可以积分出来的方程组是很少的。一个超曲面，即使它和椭球面相差甚微，对它的测地线的研究也需要完全精细的新方法。更一般地，如果用 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 记一个 N 维微分流形，它的 Riemann 尺度为

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{N}g_{ij}(x)dx_idx_j.$$

那末，$(\mathfrak{M}^N, g)$ 上的测地线是如下非线性方程组的解：

$$(1.1.2)\qquad \ddot{x}_i+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\dot{x}_j\cdot\dot{x}_k=0\ \ (i,j=1,2,\cdots,N),$$

其中 Γ^i_{jk} 记为所谓第二类 Christoffel 符号，这些符号可以由函数 g_{ij} 以及它们的导数来计算。于是，$(\mathfrak{M}^N, g)$ 上由方程组(1.1.2)所定义的测地线和内蕴尺度直接有关，从而和 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 的弯曲性质直接有关。

借助于 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 的几何和拓扑来研究(1.1.2)的解已经成为一种动力，它推动人们去发现新的全局性方法，以便对非线性组进行研究。这些方法，既可用于非线性常微分方程组，又可用于非

线性偏微分方程组。我们将在第三部分中介绍它们。

(ii) 极小曲面 测地线在二维情形时的类似物是极小曲面，即面积分的临界点，因而是平均曲率为零的曲面。关于极小曲面的一个经典问题属于 Plateau，它可以叙述如下：在 $\mathbf{R}^3$ 中给出一个闭的 Jordan 曲线 γ，求由 γ 张成的面积最小的(光滑)极小曲面 $\mathfrak{S}$。当曲面 $\mathfrak{S}$ 可以表成 $z=z(x,y)$ 时，函数 z 满足非线性偏微分方程

(1.1.3) $z_{xx}(1+z_y^2)-2z_{xy}z_xz_y+y_{yy}(1+z_x^2)=0$.

如果曲面 $\mathfrak{S}$ 由参数表出，即表示为 $\{w\,|\,w_i=w_i(u,v),\ i=1,2,3.\ u,v$ 是等温坐标$\}$。那么，方程 (1.1.3) 成为拟线性的。事实上，向量 $\mathbf{w}=(w_1,w_2,w_3)$ 应该满足简单得多的关系式

(1.1.4a) $$\Delta\mathbf{w}=0,$$

(1.1.4b) $$\mathbf{w}_u^2=\mathbf{w}_v^2,\quad \mathbf{w}_u\cdot\mathbf{w}_v=0,$$

其中 $\mathbf{w}_u$ 和 $\mathbf{w}_v$ 分别记为向量$\mathbf{w}$对 u 和 v 的偏导数。我们将在第六章中导出这些关系式，并且对可求长的 Jordan 曲线求解 Plateau 问题。

H. A. Schwarz 注意到测地线和极小曲面的一个重要区别：对可求长曲线 γ，可以用充分小的直线折线段逼近，从而求出其长度。但是，曲面 $\mathfrak{S}$ 的面积(其面积 $A(\mathfrak{S})$ 有限)则不一定可以用多面体逼近求出。通常，逼近多面体的面积收敛于一个大于 $A(\mathfrak{S})$ 的数。这个事实正是引入(在第六章中将要介绍的)下半连续概念的原因。

设 C_1，C_2 是 $\mathbf{R}^3$ 中两个平行的圆，它们的圆心位于 C_1，C_2 的平面的垂线上(相距 h)，在求它们间的(面积最小的)极小曲面时，可以观察到一个和极小曲面有关的有趣的事实。对于充分小的 h，由 C_1 和 C_2 张成的面积最小的曲面是一个悬链面，它由悬链线绕直线 $r=0$ 而得。其方程为 $r=k_1\cosh[(z-k_2)/k_1]$，其中常数 k_1 和 k_2 是这样选取的：它们使 C_1 和 C_2 成为悬链面的边界。事实上，由 C_1 和 C_2 张成的悬链面有两个，其中有一个是所求的、面积最小的极小曲面。如果 h 充分大，那么就不存在由 C_1 和

C_2张成的悬链面。这时，由 C_1 和 C_2 张成的面积最小的极小曲面将由两个不相连接的曲面组成，一个由 C_1 张成，另一个由 C_2 张成。这个事实证实了有趣的“间断性”和“对称性被破坏”的现象，这是非线性问题的解的研究中所固有的现象。

(iii) Riemann 曲面的单值化 设 $F(w, z)$ 是复变量 w 和 z 的不可约多项式，系数为复值常数。单值化理论与求 $F(w, z)$ 零点的形若 $z = z(t)$ 和 $w = w(t)$ 的表达式有关，其中(全局性)参数 t 在复平面的一个单连通区域内变化。Poincaré 和 Klein 成功地把存在这种参数表达式的证明归结为如下的微分几何问题：

(II) 设$(\mathfrak{M}^2, g)$ 记一个紧光滑二维流形，其 Riemann 度量为

$$g = ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j \quad (i, j = 1, 2).$$

试问：是否存在另一个 Riemann 度量 $\bar{g}$，它和 g 保角等价，同时又使 $(\mathfrak{M}^2, \bar{g})$ 的 Gauss 曲率为常数？

对于这个转换可以大致描述如下：在一个适当的紧 Riemann 曲面 S 上，关系式 $F(w, z) = 0$ 可以写成 $w = f(z)$。现在，如果我们可以把 S 表作复平面中区域 D 对一个不连续群 Γ 的商(作用没有不动点)，那么，不难证明标准满射 $\sigma: D \to D/\Gamma = S$ 单值且解析。于是，$z = \sigma(t)$ 和 $w = f(\sigma(t))$ $(t \in D)$ 就确定了所希望的单值化。S 和 D/Γ 的表示(精确到一个保角等价)正是常 Gauss 曲率二维流形的 Clifford-Klein 空间问题的内容。

为解 (II)，我们首先回想起，如果存在一个定义在 $\mathfrak{M}^2$ 上的光滑函数 σ，使 $\bar{g} = e^{2\sigma} g$，那么两个尺度 g 和 $\bar{g}$ 保角等价(精确到一个微分同胚)。也就是说，保角等价的尺度表示 $\mathfrak{M}^2$ 的同一个复解析结构。现在可以用非线性微分方程组的语言把问题 (II) 改写如下：设 (u, v) 为 $\mathfrak{M}^2$ 上的等温参数，那么，根据初等微分几何，我们注意到 $(\mathfrak{M}^2, g)$ 的 Gauss 曲率 K (关于 $ds^2 = \lambda(u, v)\{du^2 + dv^2\}$) 可以写成

$$K = e^{-2\sigma}\{(\log \lambda)_{uu} + (\log \lambda)_{vv}\}.$$

经过不太繁冗的计算，关于 $\bar{g}$ 的 Gauss 曲率 $\bar{K}$ 可写成

$$\bar{K} = e^{-2\sigma}\{K - \Delta\sigma\},$$

其中△记 $(\mathfrak{M}^2, g)$ 上的 Laplace-Beltrami 算子。于是，如果 $\bar{K}$ 是常数，我们得出：所要求的保角映射 σ 是非线性椭圆型偏微分方程

(1.1.5) $$\Delta\sigma - K(x) + \bar{K}e^{2\sigma} = 0$$

的解。我们将在第三部分讨论这个方程光滑解的存在性。这提供了一个获得单值化理论的方法，这个方法不必依赖于覆盖空间的概念。

1900 年，Hilbert 提出把单值化理论拓广到三个或多个复变量的代数关系中去的问题。但是，尽管经过许多杰出的科学家的努力，虽也获得若干部分成果，Hilbert 的这个问题仍未获得解决。

(iv) **具指定曲率性质的度量** 上面讲的问题 (Π) 有很多有趣的推广。我们关心的推广，或是假定问题中流形 $\mathfrak{M}^N$ 的维数 $N > 2$，或是在 $\mathfrak{M}^2$ 上找一个度量 g，它有指定的曲率函数 $K(x)$（或者两者）。这个计划是有许多直接困难的。首先，所有二维 Riemann 流形可以看作一维复流形。于是，在推广 (Π) 时要小心的一点是：必须把流形上实的和复的微分结构区别开来。其次，当 $N > 2$ 时，对于高流形 $\mathfrak{M}^N$，纯量 Gauss 曲率函数的概念有几种不同的推广。最简单的纯量函数是所谓的纯量曲率函数 $R(x)$，它和 Riemann 度量 g 有关。更一般些，Ricci 张量 $R_{ij}(x)$ 和"截口曲率"的集合都是同样合理的推广。最后，如果在 $\mathfrak{M}^2$ 上给定了度量 g，而 $\mathfrak{M}^2$ 有指定的曲率 $K(x)$，要求一个 Riemann 尺度量 $\bar{g}$，它和 g 保角等价，那么，我们应当记住 $\bar{g} = e^{2\sigma}g$，其中 $\sigma(x)$ 是某个光滑函数(仅仅相差一个微分同胚)。于是，在问题 (Π) 中，如果允许把曲率函数 $K(x)$ 看作变量，就只需解方程

(1.1.6) $$\Delta\sigma - K(x) + \bar{K}(\tau(x))e^{2\sigma} = 0,$$

其中 τ 是从 $\mathfrak{M}^2$ 到自身的任一微分同胚。

今后，我们要研究 (Π) 的如下推广：

(Π_N) 设有一紧流形 $(\mathfrak{M}^N, g)$，求一个度量 $\tilde{g}$，$\tilde{g}$ 和 g 保角等价，

且具有指定的 C^∞ 纯量曲率函数 $\tilde{R}(x)$. 此外，我们将把 (Π_N) 具体化，规定 (i) 设 $N=2$，或 (ii) 设 $\tilde{R}(x)=$ 常数. 当 $N>2$ 时，后面这个问题曾由 H. Yamabe 在1960年讨论过，但还没有完全解决.

为回答 (Π_N)，我们回想起，在保角变换 $\tilde{g}=e^{2\sigma}g$ 下，纯量曲率变换公式为

$$\tilde{R}=e^{-2\sigma}\left\{R-2(N-1)\left[\Delta\sigma+\left(\frac{N}{2}-1\right)|\nabla\sigma|^2\right]\right\}.$$

对 $N=2$，令 $R=2K$，这个公式化成 (1.1.5). 但是对 $N>2$，这个方程和 (1.1.5) 完全不同. 事实上，这时，如令 $u=\exp\left(\frac{1}{2}N-1\right)\sigma$，我们发现 u 满足非线性方程

$$c(N)\Delta u-R(x)u+\tilde{R}u^{b(N)}=0, \tag{1.1.6'}$$

其中 $b(N)=(N+2)/(N-2)$, $c(N)=4(N-1)/(N-2)$. 于是，对 $N>2$，我们应当找一个定义在 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 上严格正的光滑函数 u，它满足 (1.1.6).

如果限于考虑复流形 $(\mathfrak{M}^N, g)$，以及应用定义在 $\mathfrak{M}^N$ 上的复结构去计算 $\tilde{g}$ 的 "Hermit 纯量曲率"，其中 $\tilde{g}=e^{2\sigma}g$ 是保角变形后的度量，那么问题 (Π_N) 可以得到实质性的改进(参看第六章第二节). 事实上，在 Hermit 的情形，在上面变形的纯量曲率的公式中，当维数改变时，并不出现根本性的变化. 此外还发现，在求解 (Π_N) 时有复的解析障碍，而当 $N>2$ 时，却没有实的类似问题.

(v) 解析函数的映射性质 在单复变解析函数的几何研究中，很自然出现类似于 (1.1.5) 的非线性偏微分方程. 设 f 是解析映射，映单位圆 D (其上赋予 Poincaré 度量 $ds^2=(1-z\bar{z})^{-2}dzd\bar{z}$) 成扩张了的复平面. 设在 $f(D)$ 上定义了度量 $dS^2=df\cdot d\bar{f}$，并令 $e^u=(ds/dS)^2$，那么，关于 dS^2 的 Laplace-Beltrami 算子 Δ 可以写成 $\Delta u=-\frac{1}{4}(\partial^2u/\partial f\partial\bar{f})$. 简短的计算指出，$u$ 满足方程

$$\Delta u = 2e^u.$$

这个方程与 f 无关. Poincaré 在研究自守函数时曾用到过这个方程，后来，F. Nevanlinna 在他的亚纯函数分布值的微分几何证明中也用到过它.

(vi) 复结构的变形 设 $\mathfrak{M}'$ 是复一维紧流形，1857 年，Riemann 首先研究了其上的复结构的变形. 他发现，独立复参数(变形依赖于这些参数)的个数 $m(\mathfrak{M}')$ 完全可以用 $\mathfrak{M}'$ 的 Euler 特征表示出来(或者等价地，用与 $\mathfrak{M}'$ 相应的 Riemann 曲面的亏格表示出来). Riemann 把 $m(\mathfrak{M}')$ 称作模数. 时至今日，对这些复参数的研究仍引起许多研究者的注意. 两个 Riemann 曲面可以拓扑等价. 但是这些曲面的"模数"决定它们是否解析等价.

对于高维复流形 $\mathfrak{M}^n$ 来说(和一维的情形相反)，类似的变形问题则不是弄得很清楚. 它有高度的非线性性质. 为说明这点，设对 $\mathfrak{M}^n$ 赋予了复结构 V_0, 其各不相同的复坐标为 $z_1, \cdots, z_n$. 设 $\tilde{V}$ 是 $\mathfrak{M}^n$ 上的另一复结构，其局部坐标为 $y_1, \cdots, y_n$, 并使 (1, 0) 形式可以写成

$$dy_j = dz_j + \sum_k \varphi_{kj} d\bar{z}_k,$$

其中 φ_{kj} 很小. 把 $\tilde{V}$ 称作和复结构 V_0 邻近的几乎复结构. 当且仅当向量值 (0, 1) 形式

$$\omega = \omega_k d\bar{z}^k$$

满足一个适当的可积性条件时，$\tilde{V}$ 才定义 $\mathfrak{M}^n$ 上一个真正的复结构. 这个条件取如下的非线性偏微分方程的形式:

$$\bar{\partial}\omega = [\omega, \omega]. \tag{1.1.7}$$

这里线性微分算子 $\bar{\partial}$ 是标准算子，它映向量值 (0, 1) 形式为向量值 (0, 2) 形式，其运算规则是

$$\bar{\partial}(a\, d\bar{z}^{s_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{s_q}) = \sum_k \frac{\partial a}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}^{s_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{s_q}, \tag{1.1.8}$$

方括号 $[\omega, \omega]$ 是某个双线性向量值 (0, 2) 形式. 于是，为研究 $\mathfrak{M}^n$ 上 V_0 邻近的复结构，我们只需研究 (1.1.7) 的和零充分接近的

解 ω. 如果 $n \geqslant 2$，这个概念是辨识出变形问题的非线性的一个标志。因为对 $n=1$，几乎所有的复结构都是自动可积的，方括号 $[\omega, \omega]$ 恒为 0，于是 (1.1.7) 是线性的。 为作进一步的讨论，建议读者看第四章以及那里所引用的文献。如将要看到的，由于引进了 Hilbert 空间技巧以及"分歧"理论，这个变形问题的解被大大地简化了。

1.1B 数学物理提出的问题

在数学物理的基本问题中，可以找到非线性微分方程另一个同样丰富的来源。下面的一些例子就是今后要讨论的。

I 经典数学物理

(i) 质点的 Newton 力学 考虑在 $\mathbb{R}^3$ 中运动的 N 个质点 P_i 的系统，P_i 的质量为 $m_i (i = 1, \cdots, N)$，作用力的势函数是 $U(x_1, \cdots, x_{3N})$，这些质点的运动服从微分方程组

$$(1.1.9) \qquad m_i \ddot{x}_i + \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, \cdots, 3N).$$

显然，当 U 不是它的变元的二次函数，而是更高阶的函数时，这个方程组非线性。

经典力学的基本问题是：对各种适当的势函数确定 (1.1.9) 的周期运动。 问题的重要性在于：从许多由 (1.1.9) 型方程描述的各种自然现象中总能观察到周期运动。 进而，Poincaré 猜测，(1.1.9) 的周期解 (在适当限制 U 时)，在解的全体构成的集合中"稠密"(这里稠密意指对任给的解 $x(t)$，总存在一个周期解，在给定的时间长度上，它和 $x(t)$ 相差极小)。当作用在质点上的力是纯万有引力时，从 Newton 万有引力定律推出

$$U(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{k<j} \frac{m_k m_j}{|x_k - x_j|} \ (j, k = 1, \cdots, N),$$

这时，(1.1.9) 就是难以解决的经典的 N 体问题方程。在天体力学中，众所周知，二体问题(即 Kepler 问题)完全可以显式地解出

来。由于天文学中的很多问题可以看作它的扰动，因此它非常重要。例如，这种扰动问题之一就是 Poincaré 考虑过，并把它看作一般动力系统典型的限制三体问题。作为一个更简单的例子，考虑一个运动方程，它描述此自治扰动 $\varepsilon f(x)$ 的 Kepler 问题，可以写作

$$\ddot{\mathbf{x}}+\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}+\varepsilon f(\mathbf{x})=0, \quad \mathbf{x}\in \mathbf{R}^N, \tag{1.1.10}$$

在 $\mathbf{x}=0$ 处，$\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$ 一项有奇性。为克服这个内在困难，导致了更精细的"正则化"理论。在这个理论中，在一个固定的能量曲面上选定 (1.1.10) 的适当坐标变换，就避免了在 $\mathbf{x}=0$ 附近的解析性要求(参看第六章)。方程组 (1.1.10) 化成以下形式：

$$\ddot{\mathbf{y}}+\operatorname{grad} W(\mathbf{y})=0 \quad \frac{1}{2}\dot{\mathbf{y}}+W(\mathbf{y})=\text{常数},$$

其中 $W(\mathbf{y})$ 是光滑函数，在 $\mathbf{y}=0$ 时为 0，且为二阶零点。

在研究 (1.1.9) 这样的非线性方程组的周期解时，由于"谐振"等的影响，古典方法常常失效。这个事实激发了很多新的尝试，人们试图用拓扑方法来研究这种问题，我们将在第四章和第六章讨论这个课题。

(ii) 弹性 一个可变形体 B 称作弹性体，如果当施加某类力到 B 的一部分上时，它可以产生形变，而当外力移去时，它又回复到原来的状态。弹性体的最简单的经典公式基于两个假定：线性应力应变定律 (Hooke 定律)和无限小的位移，由这些假设导出线性的控制方程。然而我们若考虑可能发生大的形变但仍遵守 Hooke 定律的情形，则所得到的描写弹性体 B 的平衡状态的方程就是非线性的。于是，一维弹性体 B (杆)，在一个作用于其端点大小为 λ 的压力作用下，平衡状态的方程可以写成边值问题：

$$w_{ss}+\lambda w(1-w_s^2)^{1/2}=0, \quad w(0)=w(1)=0, \tag{1.1.11}$$

其中 w 是由压力引起的在 B 中产生的水平方向上偏移的大小。这个古典方程以 Euler 弹性问题而著称，它已由 Euler 在 1744 年

完全解决。二维时的类似问题(1910 年曾由 von Kármán 讨论过)与二维弹性体 B 所产生的形变有关，其中 B 可取任意的形状 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ (一个薄的弹性板)，在 Ω 的边界上作用着大小为 λ 的压力。这个问题比一维情形要困难得多，应用后面介绍的现代方法，现在才开始对这个问题给出适当的数学处理。所产生的形变由两对偏微分方程决定，它们定义在 Ω 上，称作 von Kármán 方程，可以写成(在消去某些物理参数后)

$$(1.1.12)\qquad \Delta^2F=-\frac{1}{2}[w,w],\quad \varepsilon^2\Delta^2w=[f,w],$$

$$\begin{cases}D^\alpha F|_{\partial\Omega}=\lambda\phi_0\\ D^\alpha w|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\qquad |\alpha|\leqslant 1$$

其中 Δ^2 记双调和算子

$$[f,g]=f_{xx}g_{yy}+f_{yy}g_{xx}-2f_{xy}g_{xy},$$

这里的 ε^2 是薄板的厚度，w 表示 B 在垂直方向上的偏移，F 是 Airy 应力函数，通过它可以求出引起形变的所有的应力分量。虽然 (1.1.11) 决定的形变可以用椭圆函数显式表出，但 (1.1.12) 的积分，一般地说，只有应用后面介绍的方法，经过仔细的定性分析才能弄清楚。方程 (1.1.12) 有很多精细的性质，今后我们要用这些作为我们理论发展的专门和重要的例子。

(iii) 理想不可压缩流体 理想不可压缩流体的速度分布 $\mathbf{u}$ 由(非线性) Euler 运动方程和连续性方程确定，用 u_i 记速度分量，ρ 记流体的密度，p 记压力，假定作用力为 F_i，那么这些方程为

$$(1.1.13)\quad \frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_j u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+F_i(i=1,2,3)$$

$$(1.1.14)\quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0.$$

假定 (1.1.14) 满足 (i) 流动是无旋的，从而速度向量是速度势 ζ 的梯度；(ii) 重力是作用在流体上唯一的力；(iii) 流动是定常的；(iv) 流动是二维的。那么，(1.1.13) 有首次积分

$$(1.1.15)\qquad \frac{1}{2}(\zeta_{x_1}^2+\zeta_{x_2}^2)+gx_2=\text{常数}\quad 在\ \partial\Gamma\ 上$$

(1.1.14) 成为

$$\Delta\zeta = 0 \quad 在\ \Gamma\ 上 \tag{1.1.16}$$

这个问题的非线性是双重的：Γ 的边界 $\partial\Gamma$ 是未知的；加在 $\partial\Gamma$ 上的边界条件是非线性的．在水波理论中，方程 (1.1.15) 和 (1.1.16) 的解起着很重要的作用．水波这个课题，以它有很多有趣的，局部的或全局的非线性现象而著名（参看 5.5 节）．

理想不可压缩流体的涡旋运动（对它的研究是由 Helmholtz 在 1858 年开始的）显示了特别引人注目的非线性现象．例如，在这样的流体中可以观察到持久形式的涡度环．所谓涡度环是指一个定义在 R^3 上的向量场 q 和 $\mathbb{R}^3$ 的一个子集 Σ，其中 q 是连续、轴对称的无散向量场；Σ 同胚于一个实心环． 当把轴固定在 Σ 中时，q 和 Σ 两者都不随时间变化，旋度 $\omega = \operatorname{curl} q$ 在 Σ 外为 0（但在 Σ 内不为 0）． 此外，还满足 Euler 运动方程 (1.1.13) 和在无穷远处的适当的边界条件．在后面 (6.4 节) 我们要导出和研究如下的半线性椭圆型偏微分方程：

$$\phi_{rr} - \frac{1}{r}\phi_r + \phi_{zz} = \begin{cases} 0 & 在\ \mathbb{R}^3 - \Sigma\ 中, \\ -\lambda r^2 f(\phi) & 在\ \Sigma\ 中. \end{cases} \tag{1.1.17}$$

其中 ϕ 是与 q 有关的 "Stokes 流函数"，这里给出的函数 f 描述

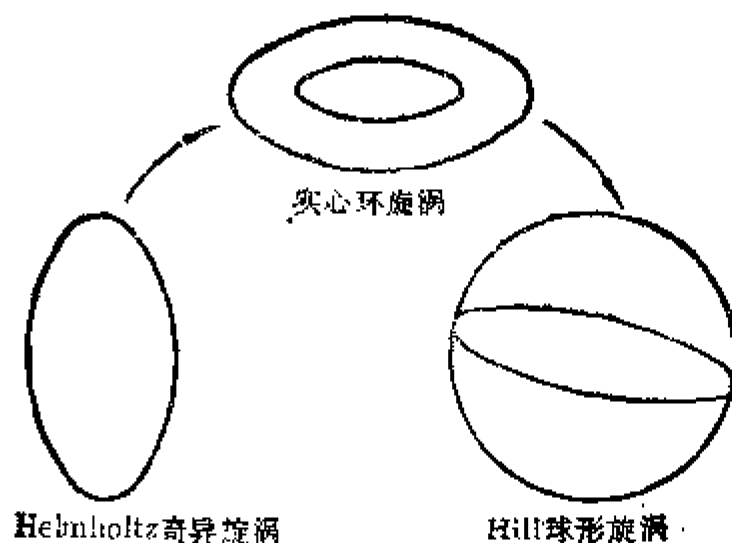


图 1.1 [illegible]典的 Helmholtz 奇异旋涡变到 Hill 的球形旋涡时，中间要经过实心环的形状．

了Σ中涡流强度的分布，同时，κ 和它的梯度连续地通过Σ的边界$\partial\Sigma$. 又与在 (1.1.15) 和 (1.1.16) 中一样，方程 (1.1.17) 的非线性表现在两个方面：ψ 和Σ两者都要由方程以及适当的边界条件确定. 两个极其显然的解是已知的. 而要解决下面这个问题，即寻找涡度环的一个单参数族，它们把这两个特解连接了起来，则要求整体性的方法. 我们将在第六章中再进行讨论(参看图 1.1).

(iv) 粘性不可压缩流体 刻划粘性不可压缩流体速度分布的方程，即所谓 Navier-Stokes 方程是

(1.1.18)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\sum_j u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\Delta u_i+F_i\,(i=1,2,3),$$

(1.1.19)
$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0.$$

和 Euler 方程不同之处仅在于增加了一项 $\nu\Delta u_i$，这里 ν 是流体的粘度. 如果所考察的流体占据了一个区域 Ω，Ω 的边界是 $\partial\Omega$，一般加上一个齐次的或非齐次的边界条件 $u_i|_{\partial\Omega}=g_i$. 在齐次的情形推出，$u$ 在 $\partial\Omega$ 的速度为 0. 无论粘度 ν 大或是小，这些方程描写了很广泛的一类服从水力动力学规律的现象. 是否可以用这些方程的非线性来描述复杂的湍流现象，仍然是一个(有待证明的)问题，虽然我们在第四章将看到，由于出现第二个解，在很多情况下，可以把湍流的发生准确地看作一个分歧现象.

II 现代数学物理

(i) 量子场论 在初等量子力学中，叠加原则排除了出现非线性方程的可能性. 但是，一旦考虑各种量子场的相互作用，就可能出现非线性运动方程. 事实上，近年来对于如下的 Lorentz 不变的非线性 Klein-Gordan 方程

(1.1.20)
$$\zeta_{tt}-\Delta\zeta=-m^2\zeta+F(|\zeta|^2)\zeta$$

及其推广的研究，已取得某些成功，该方程中的 ζ 是复值的"波"函数.

在量力场论中有一个有趣的非线性问题，它是由A. Wightman

提出的．这个问题和动态不稳定性以及模型的破缺对称性概念有关．在一个简单的(平均场)逼近中(采用现代"Euclid 场论"的术语)，这个问题的研究和下面的方程有关

(1.1.21) $$\Delta u - m^2u + P'(u) = f_\infty \text{ (定义在 } \mathbb{R}^N \text{ 上)},$$

其中，f_∞ 是预先给定的常数，$P'(u)$ 是 u 的多项式类函数，当 $|u| \to \infty$ 时，$P(u) \to -\infty$．所讨论的数学问题涉及到相应泛函

(1.1.22) $$\varphi_f(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \frac{1}{2} (|\nabla u|^2 + m^2u^2) - P(u) + f_\infty u \right\} dV$$

的极小，它的存在性、唯一性与不同常数 f_∞ 的选取以及函数 $-m^2u + P'(u)$ 的零点的关系．其想法是用 f_∞ 的各种扰动改变方程 (1.1.21) 的右端，产生 (1.1.22) 相应的不同唯一绝对极小，这些有助于说明为什么在当代场论中会出现各种新的粒子(细节可看 6.2 节)．图 1.2 是把这个方法用于动态不稳定情形的图解．

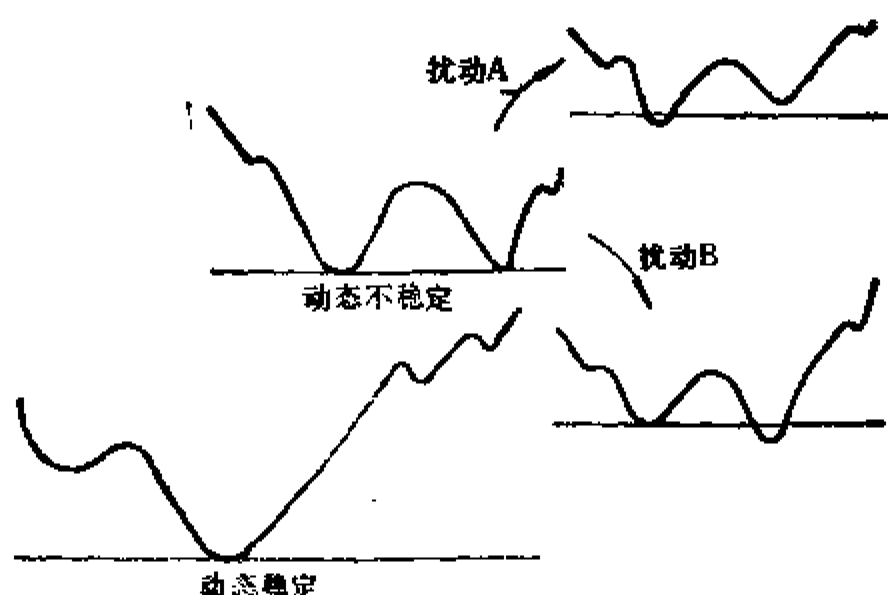


图 1.2 量子场论模型中动态稳定性与动态不稳定性的定性性状．

(ii) 万有引力的相对论 根据广义相对论，时空是具不定度规 $ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$)的四维流形($V^4, g$)(正规的双曲流形)．在万有引力的影响下，粒子以及光线的运动轨道是相对于度规 g 的测地线．在 Einstein 的理论中，度规 g 的十个分

量 $g_{\alpha\beta}$ 不是任意的，而应满足某些非线性偏微分方程。对于自由空间，这些方程可以写成

$$R_{\alpha\beta} = 0, \tag{1.1.23}$$

其中，$R_{\alpha\beta}$ 是相对于度规 $g_{\alpha\beta}$ 的 Ricci 张量。可以求出这个拟线性方程组的一个解，它与时间无关，径向对称。此外，它还具有这样的性质，在大距离上渐近于 Lorentz 度规 $ds^2 = dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$。这个解通常称作 Schwarzschild 度规，在球坐标时，它可以写成

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - (2m/r)} - r^2\{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\}. \tag{1.1.24}$$

但是一般说来，在探索 Einstein 理论的进一步内涵时，方程组 (1.1.23) (及其推广)的非线性引起很大的困难。

(iii) 固体中的相位跃迁 在当代数学物理学中，最引人注目的非线性问题之一是相位跃迁理论。根据热力学的观点，可以借助于 Gibbs 积分能量函数 $U(x_1, \cdots, x_{n+1})$ 来解释物质从一个状态到另一个状态的跃迁，其中变量 x_i 代表适当的广义坐标。对于很广泛的一类系统来说，函数 U 是齐次的，次数为 1，所以，如果令 $x_{n+1} = 1$ 并相应调整 U，把 U 正规化就是常规的事情了。此外，热力学中一个基本的物理假设说，由 U 所描述的系统的稳定平衡状态正是 U 的极小值。现在，这个系统在给定平衡状态 $\bar{x}$ 处的稳定性是由二次型 $\sum_{i,j} U_{x_i x_j}(\bar{x})\xi_i\xi_j$ 的确定性来表示的。如果这个二次型是不定的，那么状态 $\bar{x}$ 不可能以齐次形式存在，而是分解成两个或更多的相位，它们每个都满足稳定性条件。在应用中，具半定型的状态特别有意义，它对应于系统的广义临界点。Onsager 对超出热力学解释的相位跃迁问题进行了深入的研究，他通过详尽的计算，对特别的模型，即二维的 Ising 模型进行了讨论。用定性的方法对这种相位跃迁问题，特别是三维的情形加以研究仍然是一个重要的，但尚未解决的问题。

1.1C 变分学提出的问题

非线性微分方程组的第三个来源和变分学的发展密切相关。的确，用极值原理来阐述物理学和几何学是很大一部份科学的基本目的，尽管经历了从经典物理学到现代物理学的转变，这点仍然保持下来。用数学的术语来说，如果 $u(x)$ 是某个泛函 $\mathscr{I}_0(w)$ 的平稳点

$$\mathscr{I}_0(w) = \int_\Omega F(x, w, Dw, \cdots, D^m w)$$

（它对充分大的一类允许函数族 $\mathfrak{S}$ 有定义）。那么，$u(x)$ 满足 Euler-Lagrange 微分方程

$$\mathscr{I}_0'(w) \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, w, Dw, \cdots, D^m w) = 0. \tag{1.1.25}$$

这里我们用到符号 $\partial F/\partial w_\alpha = F_\alpha$. 如果 F 对 w 的依赖性高于二次，一般说来，这个微分方程对 w 非线性。

更一般些，如果 $u(x)$ 是泛函 $\mathscr{I}_0(w)$ 的平稳点，$\mathscr{I}_0(w)$ 还满足积分约束条件

$$\mathscr{I}_i(w) = \int_\Omega G_i(x, w, \cdots, D^k w) \quad (i = 1, \cdots, N), \tag{1.1.26}$$

那么 $u(x)$ 满足

$$\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \mathscr{I}_j'(w) = 0. \tag{1.1.27}$$

其中 λ_j 是不全为 0 的实数，每个 $\mathscr{I}_j'(w)$ 都取 (1.1.25) 的形式。

在整个数学物理中经常遇到 (1.1.25) 型方程的边值问题。于是自然要对 (1.1.25) 和 (1.1.26) 定义的偏微分方程从数学上仔细地分析。事实上，我们后面就要这样做。

$\mathscr{I}_0(w)$ 的极值点 $u(x)$ 既满足 Euler-Lagrange 方程 (1.1.25)，同样也可以满足**自然的边界条件**。特别，如果不限制允许类 $\mathfrak{S}$ 中函数的边界性质，我们可以由考虑边值的一般变分导出对极值点的特别限制。于是，对于积分

$$\mathscr{I}(y) = \int_0^1 L(x, y, y')dx$$

在 $x=0$ 和 $x=1$ 点的自然边界条件容易确定为 $\partial F(x, w(x), w'(x))/\partial y'=0$. 此外，在这方面还有如下的问题：

一个非线性方程组，如果它是由变分原则导出的，这会影响它的解的性质吗？在对这些解进行定性研究时，可以应用这个变分原则吗？如同我们在后面要看到的，对于刚才谈到的几何学和物理学中许多经典问题来说，这些问题的回答是肯定的. 此外，对于一般的非线性方程组来说，回答也是肯定的. 详尽地阐述这些事实是本书的主要课题之一. 奇怪的是，尽管在导出描写非线性系统的方程时，广泛地、正式地应用了变分原则，但是，在大多数处理非线性问题的经典方法中却不曾用到这个思想.

而且，很多非线性问题的解（它们是某个泛函 $\mathscr{I}(w)$ 的平稳点）是这个泛函的鞍点，于是就不能采用变分学的经典方法了，因为这些方法主要是处理绝对极小的. 对持久形式涡度环的研究和对 Hamilton 系统周期运动的研究都说明了这种情形. 处理这种情形的一个方法是（它在后面要用到），巧妙地选取约束 C（参看图 1.3），从而把问题转换成一个等周变分问题.

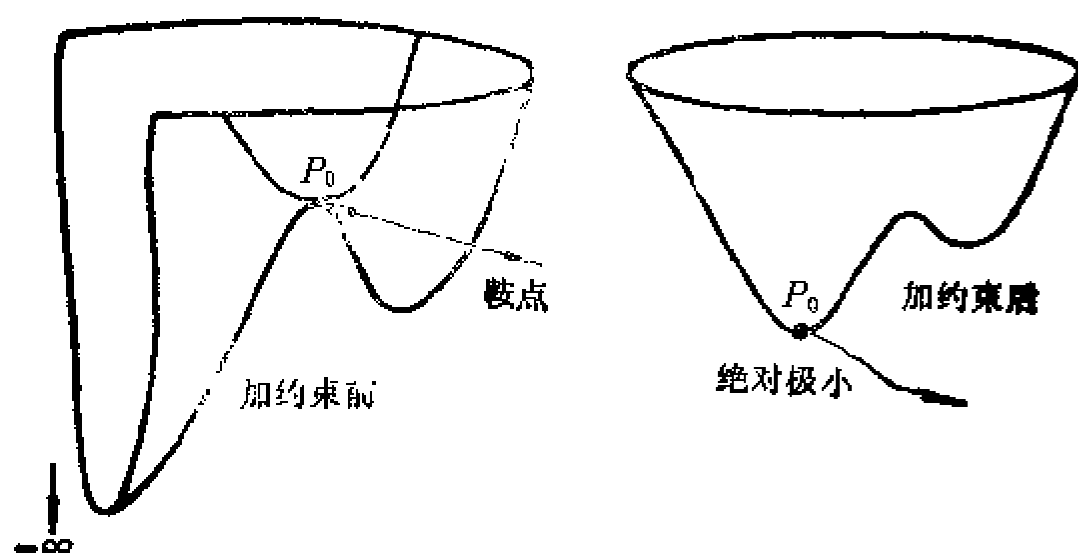


图 1.3　加上约束 C 前后的典型的能量泛函图，说明一个鞍点转化成绝对极小.

1.2　遇到的典型困难

1.1 节中所考虑的那类非线性方程组具有某些共性和一些特

性，这些性质使对它们的研究既困难又有趣．实际上，人们可以区分出两类困难，一类是非线性方程组本身固有的，另一类则与研究的方法有关．下面我们通过一些简单的例子来说明这个问题．

1.2A　内在的困难

(i) 非唯一性　这个性质也许是非线性系统的最大特点．例如，边值问题

(1.2.1)　　$$y_{tt} + 2y^3 = 0,$$

(1.2.2)　　$$y(0) = y(A) = 0$$

有可数无穷多个不同的解 $y_N(t)$，当 $N \to \infty$ 时，$\sup\limits_{[0,A]}|y_N(t)| \to \infty$．事实上，这个方程通过点 $(0,0)$ 的解 $y(t)$ 应当满足 $t=\int_0^y (c^4 - y^4)^{-1/2}dy$，从而 $y(t)$ 是一个周期函数（在 $\pm c$ 间变化），周期 $T = 2c^{-1}\int_{-1}^{1}(1 - t^4)^{-1/2}dt = \frac{2\beta}{c}$（譬如说）．为使 $y(A) = 0$，应对某个整数 N 有 $T = A/N$，于是，对 $c = (2N/A)\beta$，$N = 1, 2, \cdots$，问题 (1.2.1)-(1.2.2) 有所要求的解 $y_N(t)$．由于非唯一性，非线性系统的解的稳定性的研究就显得特别重要．

(ii) 奇异性　很多非线性方程组，尽管它本身的系数都是光滑的，但是它的解却可能产生奇异性．例如，考虑 (Navier-Stokes 型)非线性边值问题 $\ddot{y} + y\dot{y} = 0$，$y(0) = y(A) = 0$，通过直接积分不难验证，无论把 A 选得多么小，这个方程的任何非平凡解都有奇异性．

(iii) 关于参数的临界相依性　一个非线性方程组如果显式地含有参数，它的解的结构常随参数的变化而急剧地变化．例如，问题

(1.2.3)　　$$\ddot{y} + \frac{1}{2}\lambda e^y = 0,$$

(1.2.4)　　$$y(0) = y(1) = 0$$

(a) 对 $\lambda > \beta$（某个正实数）没有光滑解，(b) 对 $\lambda = \beta$，只有一个

光滑解，(c) 对 $0<\lambda<\beta$，恰好有两个解．这些结论可由直接积分证明．事实上，对 $\lambda\geqslant 0$，(1.2.3) 通过原点的解满足

$$t=\lambda^{-1/2}\int_0^y (c-e^s)^{-1/2}ds,$$

其中 $c=1+\lambda^{-1}\dot{y}^2(0)$．它表明曲线 $y=y(t)$ 递增到极大值 $y(t_1)=\log c$．因为曲线 $y(t)$ 关于 $t=t_1$ 对称，我们要求

$$1=2t_1=2\lambda^{-1/2}\int_0^{\log C}\frac{ds}{\sqrt{c-e^s}}=2\lambda^{-1/2}\int_1^c\frac{du}{u\sqrt{c-u}}.$$

经过简单的计算，可以求出 $\cosh^2(\sqrt{\lambda c}/4)=c$；由这个超越方程的解推出上面的 (a)—(c)．

进一步，Poincaré 首先指出，非线性微分方程组 $\mathfrak{S}_\lambda$ (它显式地依赖于参数 λ) 表现出各种分歧现象．这就是，存在 λ 的一个值，譬如说 λ_c，当 λ 与 λ_c 相差很小时*) $\mathfrak{S}_\lambda$ 至少有两条不同的解曲线 $y_0(\lambda)$ 和 $y_1(\lambda)$，且当 $\lambda\to\lambda_c$ 时，$y_0(\lambda)\to y_1(\lambda)$．作为例子，考虑问题

$$(1.2.5)\qquad \ddot{y}+\lambda^2\{y-y^3\}=0,\quad y(0)=y(1)=0$$

应用 Jacobi 椭圆函数 $sn(\xi,k)$(它的四分之一周期为 $K(k)$)，就可发现 (1.2.5) 可以直接积分．事实上，令

$$y_n(x)=\left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)^{1/2}sn(2nK(k)x,k),\ 0\leqslant k<1,$$
$$n=1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda=2n(1+k^2)^{1/2}K(k)\geqslant n\pi$．我们看到，对于 $m\pi<\lambda<(m+1)\pi$，(1.2.5) 的解集是 $0,\ \pm y_1,\cdots\pm y_m$．当 $\lambda\to m\pi$ 时，$y_m(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致趋于 0．于是当 $\lambda^2=m^2\pi^2$ 时，方程 (1.2.5) 表现出分歧现象．

在讨论和方程 (1.2.5) 有类似性质的方程时，Poincaré 引进了**稳定性改变**的概念．我们说 (1.2.5) 的一个解 $y(\lambda)$ 是稳定的，如果它使 $\mathfrak{L}(y)=\int_0^1\left[\frac{1}{2}\dot{y}^2-\lambda^2\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4\right)\right]$ 达到极小．在这

---

*) 此句为译者所加．——译者注

个定义下，我们得出，对 $0 \leqslant \lambda^2 \leqslant \pi^2$，$y_0(\lambda) \equiv 0$ 是稳定的，但 $y_1(\lambda)$ 仅在 $\lambda^2 > \pi^2$ 时稳定。于是当 λ^2 递增地通过 π^2 时，在 $y_0(\lambda)$ 和 $y_1(\lambda)$ 间，稳定性发生改变。

(iv) 维数与非线性 对于定义在区域 Ω 上的某些微分方程组 $\mathfrak{S}$ 来说，在 $\mathfrak{S}$ 的非线性项的增长幂次、集合 Ω 的维数、$\mathfrak{S}$ 在 Ω 上的没有奇性的解的存在性之间，有着惊人的联系。作为例子，我们指出，对 $\sigma \geqslant 4/(N-2)$，在 $\mathbf{R}^N(N>2)$ 上，方程

(1.2.6)
$$\Delta u - u + |u|^\sigma u = 0$$

没有非平凡的光滑解 u，使当 $|x| \to \infty$ 时，$|u| \to 0$（我们将在第六章证明，对于 $0 < \sigma < 4/(N-2)$，(1.2.6) 有光滑解）。当 $\sigma \geqslant 4/(N-2)$ 时，(1.2.6) 没有光滑解的结论是由证明下面的事实得到的：假设

(1.2.7)
$$\Delta u + f(u) = 0$$

在 $\mathbf{R}^N(N>2)$ 上的一个解 $u(x)$，当 $|x| \to \infty$ 时 $|u| \to 0$，那么

$$(*)\quad \left(\frac{2N}{N-2}\right)\int_{\mathbf{R}^N} F(u)dx = \int_{\mathbf{R}^N} uf(u)dx,$$

其中 $F_u(u) = f(u)$。

证明：暂时假定 (*) 成立。在 (1.2.6) 中令 $f(u) = -u + |u|^\sigma u$，那么

$$F(u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{1}{\sigma+2}|u|^\sigma u^2.$$

如果 u 是它的一个光滑解，那么从 (*) 推出

$$\left(\frac{N}{N-2} - 1\right)\int_{\mathbf{R}^N} u^2 dx = \left(\frac{2N}{(N-2)(\sigma+2)} - 1\right)\int_{\mathbf{R}^N} |u|^\sigma u^2 dx.$$

于是，对 $u \not\equiv 0$ 有 $\sigma < 4/(N-2)$。为证 (*)，我们注意到 (1.2.7) 的解 $u(x)$ 是泛函

$$\varphi(u(x)) = \int_{\mathbf{R}^N} \left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)\right]dx$$

的一个临界点，故我们应有 $(d/dk)\varphi(u(kx))|_{k=1} = 0$。在 $\varphi(u(x))$ 中作变量代换 $y = k(x)$，我们得到

(†)
$$0 = -\left(\frac{N-2}{2}\right)\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 + N\int_{\mathbf{R}^N} F(u).$$

另一方面，用 $u(x)$ 去乘方程 $\Delta u+f(u)=0$，再分部积分，求出

(††)
$$\int_{R^N}|\nabla u|^2=\int_{R^N}f(u)u,$$

综合(†)和(††)就给出(*)。

(v) 在无穷远处的衰减 以(1.2.6)为例说明的非线性方程组的另一特性，可以粗略地说成是定义在一个无界区域上的非线性椭圆型微分方程组解的衰减的放大。事实上，如果 $u(x)$ 是(1.2.6)的一个解，它也可以看成是线性方程

(1.2.8)
$$\Delta u-u+p(x)u=0$$

当 $|x|\to\infty$ 时 $|u|\to 0$ 的一个解。其中，当 $|x|\to\infty$ 时 $p(x)=|u|^\sigma\to 0$。那么，用椭圆型偏微分方程线性理论的已知结果可以得出，当 $|x|\to\infty$ 时，$|u(x)|=O(|x|^{-\beta})(\beta>0)$。重复这个过程，最后得到，对某个常数 $\gamma>0$，当 $|x|\to\infty$ 时，有 $|u(x)|=O(e^{-\gamma|x|})$。

(vi) 对称的原因不必产生对称的影响 一个圆形薄弹性板，边缘固定，沿边缘给予一个轴对称的一致的(数量大的)压力。可以观察到，在该力的作用下弹性板发生变形，达到一个新的、稳定的、非轴对称的平衡状态。所观察到的变形由一个非线性偏微分方程组所刻划，该方程组属于 von Kármán (1.1.12)。因为有关的线性理论断定产生轴对称的平衡状态，所以，正是由于这些方程的非线性性，才发生这种不通常的现象。

1.2B 非内在的困难

上面所谈到的一切性质都和非线性微分方程组解的内在特性有关。现在，我们考虑那些困难，它们涉及到研究这些方程组的具体方法。

(i) 不适当的线性化 这类方法中最著名的是所谓"线性化"过程，在这个处理中，局部地(譬如说，在原点附近)将非线性方程组中的高阶项统统略去不计。这样一种处理很可能得出不正确的结果。事实上，如考虑方程组

(1.2.9)　　(a) $x_{tt}+x-y^3=0$, (b)$y_{tt}+y+x^3=0$

在原点附近的非平凡周期解的结构，由线性化得到方程组 $x_{tt}+x=0$, $y_{tt}+y=0$. 它有含四个参数的周期解族，而方程组 (1.2.9) 只有平凡的周期解 $x\equiv y\equiv 0$. 为证明后面这个结论，假设 (1.2.9) 有一个 β 周期的解 $(x(t), y(t))$，那么，用 $y(t)$ 乘 (1.2.9a)，$x(t)$ 乘 (1.2.9b)，相减，再分部积分（在一个周期上），就得到 $\int_0^\beta [x^4(t)+y^4(t)]dt=0$ 故 $x(t)\equiv y(t)\equiv 0$. 用所谓映射的共轭理论，可以把这种线性化过程作某些推广. 例如，如果给出了一个一阶非线性常微分方程

(1.2.10)　　$z_t=Az+f(z)$，其中 $|f(z)|=o(|z|)$.

人们可以试图去找一个 C^1（甚至只是连续）的坐标变换 $z=\varphi(\xi)$，使得在 $z=0$ 附近新的方程可以用它的线性化了的形式 $\xi_t=A\xi$ 局部地写出来. 显然，如果令 $x_t=u$, $y_t=w$, 以及 $z=(x, y, u, w)$ 把 (1.2.9) 化成 (1.2.10) 的形式，那么这种变换 φ 不存在. 实因用 ξ 表示的在原点附近的非平凡周期解将对应于用 z 表示的在原点附近的非平凡周期解，从而就对应于 (1.2.9) 的非平凡的周期解 $(x(t),y(t))$.

(ii) 小除数问题　另一个性质（历史上称作小除数问题）是通过 Cauchy 强函数证明收敛性的一个推论. 在这个方法中，很大的一类非线性微分方程组的解是这样构造出来的：把解当作参数 μ 的形式上的幂级数（或 Fourier 级数），然后试图证明，对于很大一类 μ 值，这个级数收敛. 例如，设 $f(z)$ 是以 2π 为周期的函数，欲求差分方程

(1.2.11)　　$g(z+2\pi\mu)-g(z)=f(z)$

周期为 2π 的解 $g(z)$. 如果 $f(z)=\sum\limits_{n>0}f_ne^{inz}$ 是 f 的 Fourier 级数，那么，$g(z)=\sum\limits_{n>0}g_ne^{inz}$ 的 Fourier 系数 $g_n=f_n[e^{2\pi i\mu n}-1]^{-1}$. 当 μ 为有理数时，某些分母为 0. 对于无理数的 μ, $|e^{2\pi i\mu n}-1|$ 可以任意小. 不过可以证明，对几乎所有的 μ（在 Lebesgue 测

度的意义上)，(1.2.11) 有唯一解 $g(x)$，它的光滑性比函数 $f(x)$ 要差些。

(iii) 渐近解 另一方面，在和幂级数有关的某些问题中，当 $N \to \infty$ 时，可能很难确定这些形式地构造出来的级数 $\xi_N(\mu) = \sum_{n=0}^{N} \xi_n \mu^n (N = 1, 2, \cdots)$ 的收敛性 (如果不是不可能的话)。但是，对于小的 μ，这些级数可以"渐近"于该非线性方程组的解 $\xi(\mu)$。这里"渐近"是这个意思：N 固定，当 $\mu \to 0$ 时，$\mu^{-1}\|\xi(\mu) - \xi_N(\mu)\| \to 0$。例如考虑方程

(1.2.12) $\quad \mu^2 x_{tt} - x = e^{-t^2}$，当 $|t| \to \infty$ 时，$x \to 0$。

对 $q(t) = e^{-t^2}$，当 μ 充分小时，序列

$$x_{2N}(t, \mu) = q(t) + \mu^2 q^{(2)}(t) + \cdots + \mu^{2N}(-1)^N q^{(2N)}(t)$$

渐近于 (1.2.12) 的唯一解，虽然相应幂级数的收敛半径为 0。请参看 4.4 一节。

(iv) 缺少先验估计 很多研究非线性微分方程组 $\mathfrak{S}$ 的方法基于找出它所有可能的解的界，而这些解依赖于 $\mathfrak{S}$ 的具体形式。这些"先验"的界断定存在某个统一的常数，它界定了 $\mathfrak{S}$ 的任何解 $u(x)$ 的大小。对于线性方程 $Lu = g$ 来说，不存在这种先验的界意味着对于所有的光滑函数 g，方程 $Lu = g$ 无解。但是，对于非线性系统这个结论可能完全是错的。例如，考虑

(1.2.13) $\quad y_{tt} + y^3 = g(t), \; y_t(0) = y_t(1) = 0,$

它对任何 $g(t) \in C[0, 1]$ 可解。虽然，如在 (1.2.6) 中所讨论的那样，不可能对 (1.2.13) 的解 y 作出一个由 g 表示的先验估计。这是因为，对 $g \equiv 0$，(1.2.13) 有任意振幅的解 $u(t)$。即是说，对它来说，$\sup_{[0,1]}|u(t)|$ 可以任意大。

(v) 共振现象 和小除数问题有关的一个有趣的非线性影响是和共振现象联系在一起的。用平衡点附近的非线性 Hamilton 系统的"正规模式"问题可对这些现象作出很好的解释。N 对耦合线性振荡器系统是由线性常微分方程组

(1.2.14) $\quad \ddot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^N$

来描述的．这里假定矩阵A自共轭，非奇异，特征值为 $0<\lambda_1^2\leqslant\lambda_2^2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_N^2$． 这样一个方程组有$N$个线性无关的周期解$\mathbf{x}_j(t)$，相应极小周期为 $2\pi/\lambda_j(j=1,2,\cdots,N)$，它们称作“正规模式”．把$A$对角化，使(1.2.14)成为非耦合的，就可直接求出这些解．此外，方程组(1.2.14)的每个解都是这些基本正规模式的迭加． 研究在非线性 Hamilton 扰动 $\nabla V(\mathbf{x})$ 下这些正规模式在 $\mathbf{x}=0$ 附近的性状是很重要的，这里 $|\nabla V(\mathbf{x})|=o(|\mathbf{x}|)$，$|\mathbf{x}|$ 充分小．于是，新的非线性 Hamilton 系统现在可以写成

$$\ddot{\mathbf{x}}+A\mathbf{x}+\nabla V(\mathbf{x})=0. \tag{1.2.15}$$

遵循 Cauchy 强函数法，寻求周期为λ，在第j个正规模式$\mathbf{X}_j(t)$附近，形为

$$\mathbf{x}(s)=\varepsilon\mathbf{x}_j(s)+\sum_{n=2}^{\infty}\boldsymbol{\alpha}_n(s)\varepsilon^n$$

的解$\mathbf{x}(t)$便是常规的事了，其中$\lambda s=t$，ε充分小，$\lambda=2\pi/\lambda_j+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varepsilon^n$．但是，为证明所得的幂级数收敛，必须对特征值$\lambda_j$作严格的假定，即$\lambda_k/\lambda_j\neq$整数$(k=1,2,\cdots,N,k\neq j)$．事实上，

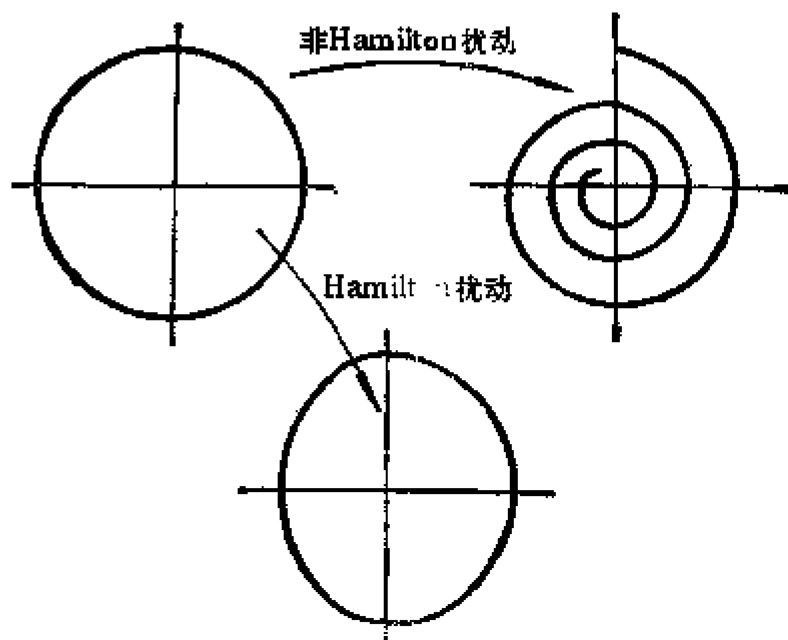


图1.4 在 Hamilton 扰动下，正规方式的周期运动得到保持，而在一般扰动下不保持．

对任意整数 n，在形式级数的系数 α_n 和 β_n 的表达式中出现了形若 $(\lambda_k - n\lambda_j)^{-1}$ 的项。因而在非线性扰动下，对第 j 个正规模式的持久性来说，这些"无理性条件"或共振条件看来是本质的。对于非 Hamilton 的任意扰动，情形的确如此。但是如把扰动限制为 Hamilton 类(定义如上)，那么事情就完全不同了，也就是说，对正规模式的持久性来说，这些无理性条件是不必要的。在第四章，这个有趣的事实将作为分歧现象来描述。图 1.4 是这种情形的图解。

1.3 泛函分析的结论

到现在为止，所谈到的与非线性系统有关的很多问题都可以化为求解一个无穷方程组，它含有同样多的未知数(尽管是非线性方程组)。于是，自然想把线性算子泛函分析的基本概念推广到这样一个广阔的方面去。这里，我们对今后要用到的经典泛函分析的基本概念和结果作一总结。

本质上，我们今后所需要的基本事实和下列几个方面有关：(i) Banach 空间和 Hilbert 空间的几何性质。(ii) Banach 空间上的有界线性泛函和有界线性算子的性质。(iii) 和 Banach 空间中的紧性有关的事实。(iv) 对某些标准的 Banach 空间，(i)—(iii) 的例子。关于这里提到的结果的完整证明和参考文献，读者可以参看本章末所列的文献目录。

1.3 A Banach 空间和 Hilbert 空间

一个赋范向量空间(实的或复的)，如果对距离 $d(x, y) = \|x - y\|$ 完备，就称作 Banach 空间。今后我们主要涉及这样的空间以及(几何上更简单的) Hilbert 空间的特殊情形。Hilbert 空间 H 是有正定内积 $(,)$ 的向量空间。对 $x \in H$，令 $\|x\|^2 = (x, x)$，就定义了一个 Banach 空间。因而和有限维的情形一样，在 Hilbert 空间 H 中可以定义正交向量，定义 H 的子集 M 的正交补 $M^{\perp}$ (其中 $M^{\perp} = \{x | x \in H,\ (x, y) = 0,\ 对一切\ y \in M\}$)。在

Banach 空间X中，称序列$\{x_n\}$(强)收敛(或依范数收敛)到x是指：如果$n\to\infty$，就有$\|x_n-x\|\to 0$. 例如$f(x)=\|x\|$就是依范数收敛意义下的连续泛函. Banach 空间X上的半范是一个定义在X上的非负实值函数$|x|$，具有性质$|\alpha x|=|\alpha||x|$和$|x+y|\leqslant|x|+|y|$，如果X中每一有界序列都有按$|\cdot|$收敛的子列，则称该半范相对于$\|\cdot\|$紧.

Banach(Hilbert)空间的闭线性子空间仍是 Banach(Hilbert)空间. 对于有限个空间的直接和，类似的结论成立. 如果X是X_1和X_2的直接和，我们记$X=X_1\oplus X_2$. 但是，注意到 Banach 空间X可以有闭子空间M，而不存在X的闭子空间N，使$X=M\oplus N$，由此可见一般 Banach 空间的几何学是比较复杂的. 所幸的是，如果 (i)X是 Hilbert 空间，或(ii)$\dim M<\infty$，或(iii)$\operatorname{Codim} M<\infty$，那么这种情形就不可能发生. 事实上，如$X_1$是 Hilbert 空间$X$的任一闭子空间，那么$X=X_1\oplus X_1^{\perp}$.

设赋范向量空间有两个范数$\|\ \|_1$和$\|\ \|_2$，如果存在正常数α和β使得对一切$x\in X$都有$\alpha\|x\|_1\leqslant\|x\|_2\leqslant\beta\|x\|_1$，我们就说这些范数等价. 在我们要讨论的问题中，选取适当的等价范数常可使问题简化.

由于满足平行四边形法则，Hilbert 空间有着良好的几何性质. 事实上，一个 Banach 空间$(X,\|\|)$是 Hilbert 空间的必要且充分条件是平行四边形法则成立，即对任何$u,v\in X$有

(1.3.1) $$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2\{\|u\|^2+\|v\|^2\}.$$

可用如下的定义把这条法则推广到一类有用的 Banach 空间. Banach 空间$(X,\|\|)$称作**一致凸的**，如果对任意$\varepsilon>0$以及$u,v\in X$，u,v的范数等于1且$\|u-v\|>\varepsilon$，都有与u,v无关的$\delta=\delta(\varepsilon)$，使$\left\|\frac{1}{2}(u-v)\right\|\leqslant 1-\delta$. 这样的空间具有 Hilbert 空间的很多有用的几何性质. 例如

(1.3.2) 设M是一致凸 Banach 空间X的闭凸子集，u是$X-M$的点，那么，距离$d(u,M)$可由一点，且仅由一点$m\in M$达到.

我们称 Banach 空间 Y 嵌入 X 并记作 $X\supset Y$，如果 (i) Y 中元素都是 X 中的元素，(ii) 序列 $\{u_n\}$ 在 Y 中的(强)收敛导出 $\{u_n\}$ 在 X 中的(强)收敛. 这就推出存在一个绝对常数 C，使对一切 $u\in Y$，$\|u\|_X\leqslant C\|u\|_Y$. 如果在 (i)，(ii) 之外再加上一条：$Y$ 中有界子集都是 X 中紧集，就称 Y 紧嵌入 X.

在很多分析问题中，考察单参数 Banach 空间族 X_α 是有用的，其中参数 α 在正整数环或实数域上变化，并且当 $\alpha_2<\alpha_1$ 时，$X_{\alpha_1}\subset X_{\alpha_2}$. 这样的族称作 Banach 空间链或 Banach 链.

有可数稠密子集的距离空间称作可分空间. 在我们考虑的多数具体问题中，所涉及到的 Banach 空间都是可分的. 可分 Banach 空间 X 的线性子空间仍然可分，由闭线性子空间得出的 X 的商空间也是可分的. 任一可分 Hilbert 空间都有可数直交基，于是所有这样的空间等距.

1.3B 一些常用的 Banach 空间

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中区域. 下面介绍的一些具体的 Banach 空间在今后很重要.

(i) 连续可微函数空间

设 m 是非负整数，α 是重指数，那么

$C^m(\bar{\Omega})=\{f|D^\alpha f$ 在 $\bar{\Omega}$ 上连续，对一切 $|\alpha|\leqslant m\}$

是一个 Banach 空间，范数为

$$\|f\|_m=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\sup_{\Omega}|D^\alpha f|.$$

显然，当 m 在正整数环上变化时，空间族 $C^m(\bar{\Omega})$ 构成 Banach 链.

遗憾的是，对于分析中的很多问题来说，这些空间常常是不方便的. 例如，在位势理论中，如用 Δ 记 $\mathbb{R}^N$ 上的 Laplace 算子，那么，当 $f\in C^0(\bar{\Omega})$ 任意时，区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N>1)$ 上的简单方程 $\Delta u=f(x)$ 不一定有解.

这个困难可由定义下面的空间来克服.

(ii) Hölder 连续函数空间

设 α 是正数，$0<\alpha<1$，如果

$$H_\alpha(u)=\sup_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}<\infty,\quad (0\leqslant\alpha\leqslant1)$$

那么，称函数 $u(x)$ 在 Ω 内满足指数为 α 的 Hölder 条件.

如在集合

$C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})=\{u|u\in C^m(\bar{\Omega}),\ H_\alpha(D^\beta u)<\infty,\ |\beta|=m\}$

上定义范数

$$\|f\|_{m,\alpha}=\|f\|_m+\sup_{|\beta|=m}H_\alpha(D^\beta f),$$

那么 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ 构成一个 Banach 空间. 因而，对 $\alpha=0$，范数 $\|f\|_{m,0}$ 和 $\|f\|_m$ 等价. 如果注意到对于固定的 m，当 α 在 $[0,1]$ 上变化时，空间族 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ 构成一个 Banach 链，这个事实是有用的. 这些空间解决了上面提到的位势理论问题，这是因为，如果 $f\in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$，Poisson 方程 $\Delta u=f$ 总有解 $u\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$，其中 $0<\alpha<1$.

(iii) μ-可积函数空间

设 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是定义在 Ω 上的测度空间，p 是满足 $1\leqslant p<\infty$ 的正数. 我们定义

$L_p(\Omega,\mu)=\{f|\int_\Omega|f|^pd\mu<\infty,\ f$ 是 μ-可测的函数$\}$.

如把仅在 μ-零测集上不相等的函数视作同一函数，并规定范数为

$$\|f\|_{L_p}=\{\int_\Omega|f|^pd\mu\}^{1/p},$$

那么 $L_p(\Omega,\mu)$ 是 Banach 空间. 显然 $L_2(\Omega,\mu)$ 是 Hilbert 空间，内积为

$$(f,g)_{L_2}=\int_\Omega fgd\mu.$$

当定义 $\|f\|_{L_\infty}=\operatorname{ess\,sup}_{\Omega}|f|$ 时，

$L_\infty(\Omega,\mu)=\{f|\|f\|_\infty<\infty,\ f$ 为 μ-可测$\}$

是 Banach 空间. 一般地，我们假定 $(\Omega,\mathscr{B},\mu)$ 是定义在 Ω 上的 Lebesgue 测度空间，并记 $d\mu=dx$.

当 p 变化时，L_p 空间之间的关系在今后将起重要的作用. 特

别，我们指出下面三个重要的不等式:

(a) Hölder 不等式　如 $f_i \in L_{p_i}(\Omega, \mu)$, $\sum_{i=1}^{k} 1/p_i = 1$, 那么 $\prod_{i=1}^{k} f_i$ 是 μ-可积的，而且

$$\int_\Omega \left(\prod_{i=1}^{k} f_i\right) d\mu \leqslant \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{L_{p_i}}. \tag{1.3.3}$$

因而对于 $\mu(\Omega) < \infty$ 和 $f \in L_p(\Omega, \mu)$

$$\|f\|_{L_r} \leqslant [\mu(\Omega)]^{r^{-1}-p^{-1}} \|f\|_{L_p}, \quad r \leqslant p \tag{1.3.4}$$

于是当 $\mu(\Omega) < \infty$ 时，对 $p \in [1, \infty)$, 空间族 $L_p(\Omega, \mu)$ 构成 Banach 链.

(b) 此外，如对某 $\beta > 0$, $f \in L_p \cap L_{p+\beta}$, 那么，对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有 $f \in L_{p+t\beta}(\Omega, \mu)$, 而且，对 $s \in [p, p+\beta]$ $\phi(s) = \log \|f\|_{L_s}$ 是 s 的凸函数.

(c) Clarkson 不等式　设 $f, g \in L_p(\Omega, \mu)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, 那么对 $p \geqslant 2$,

$$\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\|_{L_p}^{p} + \left\|\frac{1}{2}(f-g)\right\|_{L_p}^{p} \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_{L_p}^{p} + \|g\|_{L_p}^{p}). \tag{1.3.5}$$

(1.3.5) 的一个直接推论是: 如 $2 \leqslant p < \infty$, 则 $L_p(\Omega, \mu)$ 一致凸. 当 $1 < p < 2$ 时, L_p 也有一个和 (1.3.5) 类似的不等式，于是在 $1 < p < 2$ 时, $L_p(\Omega, \mu)$ 也是一致凸的.

(iv) 具广义 L_p 导数的函数 (Sobolev) 空间　在很多与微分算子有关的问题中，把函数的导函数的 L_p 范数结合到 Banach 范数中是很方便的. 为此，考察 $C^\infty(\Omega)$ 中的函数. 对任意 $p \geqslant 1$ 和整数 $m \geqslant 0$, 我们取 $C^\infty(\Omega)$ 在范数

$$\|u\|_{m,p} = \left\{\sum_{|\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L_p}^{p}\right\}^{1/p} \tag{1.3.6}$$

下的闭包，所得的 Banach 空间称作 Sobolev 空间 $W_{m,p}(\Omega)$. 对

于固定的 p，$W_{0,p}(\Omega)=L_p(\Omega)$. 显然，当 m 在非负整数上变化时，它们构成 Banach 链．而且，当 $p=2$ 时，$W_{m,2}(\Omega)$ 是 Hilbert 空间，其内积为

$$(u,v)_{m,2}=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega D^\alpha u\cdot D^\alpha v dx.$$

还可把空间 $W_{m,p}(\Omega)$ 修改一下，以把边界条件结合进去．例如，$C_0^\infty(\Omega)$ 在 $W_{m,p}(\Omega)$ 中的闭包记作 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$，它由这样的函数构成，这些函数直到 m 阶的导数在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上"广义"为 0．如果 Ω 是有界区域，由 Poincaré 的基本不等式推出，存在一个绝对常数 $k(\Omega)$，使得对 $W_{1,p}(\Omega)$ $(1<p<\infty)$

(1.3.7) $$\|u\|_{L_p}\leqslant k(\Omega)\|\nabla u\|.$$

于是对 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中的有界区域，由

$$\|u\|_{m,p}=\left\{\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega|D^\alpha u|^p\right\}^{1/p}$$

给出的"短"范数等价于由 (1.3.6) 给出的范数，这点不难由反复应用 (1.3.7) 得出．

应用局部坐标邻域和单位分解，可以在 Riemann 流形 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 上定义 Sobolev 空间 $W_{m,p}$. 例如，空间 $W_{1,2}(\mathfrak{M}^N,g)$ 就定义为 $C^\infty(\mathfrak{M}^N,g)$ 在范数

$$\|u\|_{1,2}=\int_{\mathfrak{M}^N}\{u^2+|\nabla u|^2\}dV_g$$

下的闭包．其中，根据局部坐标，我们有

$$\int_{\mathfrak{M}^N}|\nabla u|^2dV_g=\sum_{i,j=1}^N\int_{\mathfrak{M}^N}g^{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dV_g.$$

所有这些积分都和用来定义它们的局部坐标邻域以及单位分解无关．

Sobolev 空间可以推广到"负"微商阶的情形．如 $m\geqslant 0$，$1<p<\infty$，$p^{-1}+q^{-1}=1$，那么取分布意义下的导数，

$$W_{-m,p}(\Omega)=\left\{u\,\middle|\,u=\sum_{|\alpha|\leq m}D^\alpha g_\alpha,\ g_\alpha\in L_p(\Omega)\right\}$$

就是一个 Banach 空间，其上范数定义为

$$\|u\|_{-m,p}=\sup\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_{\Omega}(-1)^{|\alpha|}g_{\alpha}D^{\alpha}f\,dx.$$

上确界是对 $W_{m,q}$ 中范数为 1 的全体函数取得的.

在位势理论中，Sobolev 空间非常重要. 这是由于有如下的性质：如 $f\in L_p(\Omega)$，$1<p<\infty$，那么，方程 $\Delta u=f$ 的 Dirichlet 问题总有广义解 $u\in \mathring{W}_{2,p}(\Omega)$.

1.3C 有界线性泛函与弱收敛

设 X 是 Banach 空间，$h(x)$ 是由 X 到 $\mathbf{R}^1$ 的线性映射，如有与 x 无关的常数 K，使 $|h(x)|\leqslant K\|x\|_X$，则称 $h(x)$ 为 X 上的有界线性泛函. 显然，对依范数收敛来说，$h(x)$ 连续. X 上所有有界线性泛函的集合称作 X 的共轭空间，记为 X^*. X^* 对于范数 $\|h\|=\sup\|h(x)\|$ 也是 Banach 空间. 其中上确界是对球面 $\|x\|_X=1$ 取的. X 上的有界线性泛函也记成 $x^*(x)$，其中 $x^*\in X^*$，x 在 X 中变化. 如 $(X^*)^*=X$，则空间 X 称作自反的，这样的空间具有与 Hilbert 空间相同的很多几何性质. 特别，所有一致凸空间都是自反的. 在本书中，下面的有界线性泛函延拓的著名结果是很重要的.

(1.3.8) **Hahn-Banach 定理** 设 $p(x)$ 是定义在 Banach 空间 X 上的拟范数，M 是 X 的线性子空间，$f(x)$ 是定义在 M 上的线性泛函，对 $x\in M$，有 $|f(x)|\leqslant p(x)$，那么 f 可以延拓成 X 上的有界线性泛函 $F(x)$，且 $|F(x)|\leqslant p(x)$.

这个结果有如下推论

(1.3.9)(i) 设 M 是 X 的闭线性子空间，$h(x)$ 是 M 上有界线性泛函，那么 $h(x)$ 可以延拓成 X 上有界线性泛函 $F(x)$，且 $\|F\|_X=\|h\|_M$.

(ii) 如果 $x_0\in X$，那么存在一个范数为 1 的线性泛函 $h\in X^*$，使 $h(x_0)=\|x_0\|$，于是 $\|x\|_X=\sup|h(x)|$，上确界是对单位球面 $\|h\|_{X^*}=1$ 取的.

(iii) 设σ是 X 的非空凸开子集，M 是与σ不交的线性子空间，那么X有一个闭的真子空间，包含 M 且与σ不交.

得出某已给 Banach 空间X上的任意线性泛函的具体表达式是很有用的. 在这方面，我们指出

(1.3.10) (i) **Riesz 表现定理** 设X是一个 Hilbert 空间，那么，定义在X上的任一有界线性泛函 $h(x)$ 可以唯一表成 $h(x)=(x, y)$，其中y是X中的一个元素.

(ii) 对 $1<p<\infty$ 和 $p^{-1}+q^{-1}=1$, $L_p^*(\Omega, \mu)=L_q(\Omega, \mu)$ 于是，对这些 p, $L_p(\Omega, \mu)$ 自反.

(iii) $\mathring{W}_{m,p}^*(\Omega)=W_{-m,q}(\Omega)$，其中 m 是整数，$1<p<\infty$，$p^{-1}+q^{-1}=1$. 于是对这些m和p, $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 自反.

为讨论 Banach 空间中各种不同类型的收敛，X上的有界线性泛函是特别有用的. X 中序列 x_n 弱收敛于X中的元素 x 是指：对任意 $h\in X^*$，都有 $h(x_n)\to h(x)$. 当X的维数小于 ∞ 时，弱收敛和范数拓扑一致. 因此，只有在无穷维 Banach 空间时，弱收敛的概念才是新的. 弱收敛有如下基本性质:

(1.3.11) (i) 弱极限如存在必唯一.

(ii) 如果在X中 x_n 强收敛到 x，那么，在X中 x_n 弱收敛到 x.

(iii) 如果在X中 x_n 弱收敛到 x，那么 $\{\|x_n\|\}$ 一致有界，并且 $\|x\|\leqslant \underline{\lim}\|x_n\|$.

(iv) 如果 x_n 弱收敛到 x，那么，有 x_n 的凸组合强收敛到 x.

(v) 设X是自反 Banach 空间，那么X是(序列)弱完备的.

(vi) 在一致凸 Banach 空间X中，由 x_n 弱收敛到 x 和 $\|x_n\|\to\|x\|$ 可推出 x_n 强收敛到 x.

对于今后所研究的分析中的许多非线性问题来说，给出使弱收敛序列成为强收敛的具体条件是很重要的，上面 (1.3.11 (vi)) 就是这方面最简单，但又具一定特点的结果.

1.3D 紧 性

在讨论与无穷维 Banach 空间的有关问题时，总试图找出 X

中那些子集，它们具有有限维空间中闭有界子集的主要性质. 为此，我们称 Banach 空间 X 的子集 M 为紧的，如果 M 闭(在范数拓扑下)，并且 M 中每一序列都包含有强收敛子列. 类似可定义弱序列紧的概念. 这方面有用的结果是:

(1.3.12) (i) 在 Banach 空间 X 的紧集 M 中，弱收敛与强收敛一致.

(ii) Banach 空间紧子集的闭凸包仍然紧.

(iii) 自反 Banach 空间 X 的有界子集是弱序列紧的.

(iv) 如 Banach 空间 X 的球面 $\partial\sigma_n = \{x \mid \|x\| = n,\ x \in X\}$ 紧，那么 $\dim X < \infty$.

设 A 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的一个映射，如果对 X 中任一有界 σ, $A(\sigma)$ 都是 Y 中相对紧集，则称 A 是紧映射. 紧映射的值域可分. 这是因为 $A(X) = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A(\sigma_n)$, 每个 $A(\sigma_n)$ 可分，所以 $A(X)$ 本身可分. 深入研究这类算子是很基本的，我们将在 1.4E 和 2.4 节中进行.

对于 1.2 节中引进的特殊的 Banach 空间，找出紧性的具体刻画是非常重要的. 有两个著名的准则是:

(1.3.13) **Arzela-Ascoli 定理** 如果 Ω 有界，那么 $C(\Omega)$ 的子集 S 相对紧的必要充分条件是: S 有界(在上确界范数意义下)且 S 中元素等度连续.

(1.3.14) **M. Riesz-Tamarkin 定理** 如果 Ω 有界，$1 \leqslant p < \infty$, 那么 $L_p(\Omega)$ 的子集 S 相对紧的必要充分条件是: (i) S 在 $L_p(\Omega)$ 范数意义下有界，(ii) 在 L_p 范数下等度连续 (即当 $|y| \to 0$ 时，$\|f(x+y) - f(x)\|_{L_p} \to 0$ 对 $f \in S$ 一致成立).

后面要用到 (1.3.13) 和 (1.3.14) 的直接推论:

(1.3.15) 设 Ω 是有界区域，若 $m \geqslant m'$, $\alpha \geqslant \alpha'$, 且其中至少有一个不等式成立，那么 $C^{m,\alpha}(\Omega)$ 范数下的有界集是 $C^{m',\alpha'}(\Omega)$ 中相对紧集.

(1.3.16) **Rellich 引理** 设 Ω 是有界区域，$1 \leqslant p < \infty$, $m \geqslant 1$,

那么 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 范数下的有界集是 $\mathring{W}_{m-1,p}(\Omega)$ 中相对紧集.

对于很多要讨论的问题来说，把上面的结果推广到一般无界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 是很要紧的. 这方面的一些典型结果是:

(1.3.14′) 只要对条件 (i), (ii) 再加上条件

(iii) S 在无穷远点等度小(即 $\lim\limits_{R\to\infty}\|f\|_{L_p(\Omega-\{x||x|\leq R\})}=0$ 对 $f\in S$ 一致)，那么，Riesz-Tamarkin 定理 (1.3.14) 对无界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 仍然成立.

(1.3.16′) $W_{m,p}(\Omega)\to W_{m-1,p}(\Omega)$ 的嵌入紧的必要充分条件是: 当 $|x|\to\infty$ 时，$\mathrm{vol}[\Omega\cap\{y||y-x|<1\}]\to 0$.

1.3E 有界线性算子

设 X, Y 是 Banach 空间，L 是映 X 入 Y 的线性算子，如果存在一个与 $x\in X$ 无关的常数 K，使对一切 $x\in X$，都有 $\|Lx\|_Y\leq K\|x\|_X$，就称 L 为有界(线性)算子. 对于 X 上定义的强拓扑和弱拓扑两者来说，这样的算子都是连续的. 当 X, Y 固定时，这类映射的集合又构成一个 Banach 空间，记为 $L(X,Y)$，其范数定义为 $\|L\|=\sup\|Lx\|_Y$，上确界是对所有 $\|x\|_X=1$ 取的. 任一有界线性算子 $L\in L(X, Y)$ 都有一共轭算子 $L^*\in L(Y^*, X^*)$，它由 $L^*g=f$ 唯一确定，其中 $f(x)=g(Lx)$，g 为 Y 上任一有界线性泛函，$\|L^*\|=\|L\|$. 对两个算子 $L_1, L_2\in L(X, Y)$，

$$(\alpha L_1+\beta L_2)^*=\alpha L_1^*+\beta L_2^*,$$

$$(L_1L_2)^*=L_2^*L_1^*.$$

对算子 $L\in(X,X)$，所有使 $L-\lambda I$ 有有界逆的复数 λ 的集合称作 L 的预解集 $\rho(L)$. 所有其他的复数 λ 则构成 L 的谱，记作 $\sigma(L)$. 如果 $\mathrm{Ker}(L-\lambda I)\neq\phi$，这样的 $\lambda\in\sigma(L)$ 称作 L 的特征值，非零元 $x\in\mathrm{Ker}(L-\lambda I)$ 称作 L 的相应于特征值 λ 的特征元. 特征值的集合称作 L 的点谱. 有界线性算子 L 的本质谱 $\sigma_e(L)$ 由 $\sigma(L)$ 中那些 λ 构成: 不可能因为对 L 加入某个紧线性

算子 C 就可把它从谱中除去.已经知道,$\lambda \bar{\in} \sigma_e(L)$ 等价于 $\lambda I - L$ 的值域为闭集,有有限维核和余核,且

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - L) = \dim \operatorname{coker}(\lambda I - L).$$

下面的线性算子在今后起着重要的作用:

(1.3.17) **Sobolev 积分算子** 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域,λ 是正数,那么由

$$Sf(x) = \int_\Omega \frac{f(y)dy}{|x-y|^\lambda}$$

定义的线性算子有如下性质:

(i) 对 $f \in L_p(\Omega)$ 和 $\lambda < N(1-1/p)$,S 是 $L_p(\Omega) \to C^{0,\mu}(\bar{\Omega})$ 的有界线性算子,其中 $\mu = \min(1, N(1-1/p)-\lambda)$.

(ii) 对 $\lambda > N(1-1/p)$,S 是从 $L_p(\Omega)$ 到 $L_r(\Omega)$ 的有界线性算子,其中 $r < Np/(N-(N-\lambda)p)$.

(1.3.18) **Calderon-Zygmund** 奇异积分算子 对 $x \in \mathbb{R}^N$,令 $K(x) = \omega(x)/|x|^N$,其中 $\omega(x)$ 是 $\mathbb{R}^N - \{0\}$ 上的正 C^∞ 函数,$\int_{|x|=1} \omega(x)dx = 0$,那么,当 $1<p<\infty$ 时,线性卷积算子 $L_u = K * u$ 是 $L_p(\mathbb{R}^N) \to L_p(\mathbb{R}^N)$ 的有界线性算子.

(1.3.19) **Korn-Lichtenstein 定理** 如 $K(x)$ 是具有上面(1.3.18)所规定性质的函数,$u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)(0<\alpha<1)$,$u$ 有紧支集,那么,当 $0<\alpha<1$ 时,卷积 $Lu = K*u$ 是从 $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 到 $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ 的有界线性映射.

今后我们还要用到关于有界线性算子性质的如下基本结论:

(i) 关于逆算子

(1.3.20) **Banach 定理** 假定 $L \in L(X, Y)$ 既是单射,又是满射,那么 L 有有界线性逆 $L^{-1} \in L(Y, X)$.

(1.3.21) **Lax-Milgram 引理** 如 X 是 Hilbert 空间,$L \in L(X, X)$,存在一个绝对常数 β,使对一切 $x \in X$,都有 $|(Lx, x)| \geqslant \beta\|x\|^2$,那么 L 有有界逆,并且 $\|L^{-1}\| \leqslant 1/\beta$.

(1.3.22) 如 $L \in L(X, Y)$,那么 L 有有界逆 L^{-1} 的必要且充分

条件是 L^* 有有界逆 $(L^*)^{-1}$；且这时有 $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$.

(ii) 线性算子的映射性质

(1.3.23) **开映射定理** 若算子 $L \in L(X,Y)$ 是满射，则 L 映 X 中开集成 Y 中开集.

(1.3.24) **闭值定理** 设 $L \in L(X, Y)$，L^* 是单射，值域是闭集，那么 L 的值域是整个 Y. 此外，任何 $L \in L(X,Y)$ 值域为闭集的充分必要条件是：存在绝对常数 C，使得

$$\|Lx\| \geqslant Cd(x, \ker L),$$

其中 $\ker L$ 记 L 的零子空间.

(1.3.25) **一致有界定理** 如 $L_n \in L(X, Y)$，且对任 $x \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty} L_n x$ 存在，那么 $\{\|L_n\|\}$ 一致有界，并且存在一个有界算子 $L = \lim\limits_{n\to\infty} L_n$，使得对一切 $x \in X$，都有 $L_n x \to Lx$.

(iii) 投影算子和嵌入算子

(1.3.26) **投影算子** 算子 $P \in L(X, X)$ 称作投影算子，如果 $P^2 = P$. 若用 $R(P)$ 和 $R(I-P)$ 分别记 P 和 $I-P$ 的值域，那么 $X = R(P) \oplus R(I-P)$. 如果

$$X = M \oplus N = \{x \mid x = m + n,\ m \in M,\ n \in N,\ x \in X\},$$

M 或 N 为有限维，且 $M \cap N = \phi$，那么映射 $Qx = m$ 是投影算子.

(1.3.27) **嵌入算子** 如 Banach 空间 X 被嵌入 Banach 空间 Y，由 $i(x) = x$ 定义的线性映射 $i: X \to Y$ 就称作嵌入算子. 因为 $X \subset Y$，算子 i 连续，所以 $i \in L(X, Y)$. 此外，如果 X 紧嵌入 Y，那么，算子 i 也是紧的(参看 1.3F(i)).

下面的结果指出，从嵌入算子的性质可以导出新的不等式

(1.3.28) **Lions 引理** 设 X_1, X_2, X_3 是满足嵌入关系 $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ 的三个 Banach 空间，假设嵌入 $X_1 \to X_2$ 是紧算子，那么，对任给 $\varepsilon > 0$，都存在 $K(\varepsilon) > 0$，使对一切 $y \in X_1$，都有

$$\|y\|_{X_2} \leqslant \varepsilon \|y\|_{X_1} + K(\varepsilon) \|y\|_{X_3}.$$

证明： 设不等式不真，那么就有 X_1 中序列 $\{y_n\}$，使 $\|y_n\|_{X_2} \geqslant \varepsilon \|y_n\|_{X_1} + n \|y_n\|_{X_3}$.

令 $v_n = y_n/\|y_n\|_{X_1}$，我们得到

(1.3.29) $$\|v_n\|_{X_1} = 1, \|v_n\|_{X_2} \geqslant \varepsilon + n\|v_n\|_{X_3}.$$

根据嵌入 $X_1 \subset X_2 \subset X_3$ 的性质，有 v_n 的子列，我们仍记作 v_n，使 v_n 在 X_2, X_3 中均强收敛到 v. 另一方面，由(1.3.29)，我们应有 $\|v\|_{X_3} = 0$ 和 $\|v\|_{X_2} \geqslant \varepsilon > 0$ 同时成立，矛盾.

1.3F 某些特殊类型的有界线性算子

(i) 紧线性算子 线性算子 $C \in L(X, Y)$ 称作紧算子，如对任一有界集 $B \subset X$, $C(B)$ 都是 Y 中相对紧集. 值域有限维的有界线性算子(必然)是紧算子. 反之，如果 X, Y 是 Hilbert 空间，那么紧线性算子是这种算子的一致极限. 紧线性算子理论已得到高度的发展，它的主要结果可以总结如下:

(1.3.30) 设 $C \in L(X, X)$ 是紧算子，$L = I + C$，那么 (a) L 的值域是闭集，(b) $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{coker} L < \infty$，(c) 存在有限整数 β，使 $X = \operatorname{Ker}(L^\beta) \oplus \operatorname{Range}(L^\beta)$，而且 L 是从 $\operatorname{Range}(L^\beta)$ 到自身的线性同胚. (d) C 的谱 $\sigma(C)$ 由特征值 λ_N 的可数集构成，这些特征值(零可能除外)都是孤立的和有限重的.

(1.3.31) 紧线性算子 $C \in L(X, Y)$ 映 X 中弱收敛序列成 Y 中强收敛序列(即 C 必然是全连续算子). 反之，如 X, Y 是 Hilbert 空间，任何全连续线性算子都是紧算子.

$L(X, Y)$ 中紧算子的集合 $K(X, Y)$ 有如下性质:

(1.3.32) 在 $L(X, Y)$ 中一致算子拓扑意义下，$K(X, Y)$ 是闭集. 此外，当且仅当 $C^* \in K(Y^*, X^*)$ 时，$C \in K(X, Y)$. 集 $K(X, Y)$ 也是赋范环 $L(X, Y)$ 中的闭两侧理想.

设 C 是两个函数空间 X, Y 之间的有界线性算子，一般地说，结果 C 的值域中的函数比 X 中的函数“更光滑”，那么 C 是紧算子. 例如

(1.3.33) Sobolev 积分算子定义为

$$Sf(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^\lambda} dy, \quad (\Omega \text{ 是 } \mathbf{R}^N \text{ 中有界区域})$$

如同在 (1.3.17) (i), (ii) 中那样，作为从 $L_p(\Omega)$ 到 $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ 或到

$L_r(\Omega)$ 的线性算子，S 是紧算子.

(1.3.34) 当 Ω 是有界区域，$\mu \geqslant \mu'$，$\alpha \geqslant \alpha'$ 时（其中至少有一个不等式是严格的），嵌入算子 i: $\mathring{W}_{m,p}(\Omega) \to \mathring{W}_{m-1,p}(\Omega)$ 是紧算子.

这些结果对嵌入算子 $i: W_{m,p}(\Omega) \to W_{m-1,p}(\Omega)$ 也是对的，只要有界区域 Ω 的边界充分正则.

(ii) **Fredholm 算子及其推广** 算子 $L \in L(X, Y)$ 称作 Fredholm 算子，如果 (a) L 的值域是 Y 中闭集，(b) 子空间 $\operatorname{Ker} L$ 和 $\operatorname{coker} L$ 都是有限维的. $L(X, Y)$ 中的 Fredholm 映射的集合记作 $\Phi(X, Y)$. 可以证明，$\Phi(X, Y)$ 是 $L(X, Y)$ 中的开子集. Fredholm 映射 L 的指标 $\operatorname{ind} L$ 可由下二公式之一来定义:

(1.3.35) $\qquad \operatorname{ind} L = \dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{coker} L,$

(1.3.36) $\qquad = \dim \operatorname{Ker} L - \dim \operatorname{Ker} L^*.$

可以证明，在紧扰动下或在 $L(X, Y)$ 中范数充分小的算子的扰动下，指标不变. 于是，在 $\Phi(X, Y)$ 的连通分支中指标是常数。此外，如 $A \in \Phi(X, Y)$，$B \in \Phi(Y, Z)$，那么 $BA \in \Phi(X, Z)$，而且 $\operatorname{ind} BA = \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A$. 指标为 k 的 Fredholm 映射的集合记作 $\Phi_k(X, Y)$.

根据 (1.3.30)，恒等算子的紧扰动是零指标的 Fredholm 算子. 反之，(看 (1.3.38) 的下面)，任一 Fredholm 映射 $L \in \Phi_0(X, Y)$ 和恒等算子的紧扰动仅仅相差 $L(X, Y)$ 中的一个线性同胚(映射). 考虑向前和挪后的移位算子，可以得到任一可分 Hilbert 空间上的任意指标的 Fredholm 映射的例子.

可对 Fredholm 算子 L 的概念作如下有用的推广: 要求 L 的值域闭，但允许 $\dim \operatorname{coker} L = \infty$，这种算子称作半 Fredholm 算子，记作 $\Phi_+(X, Y)$. 这种算子的特征可以刻画如下:

(1.3.37) 算子 $L \in L(X, Y)$ 是半 Fredholm 算子的必要且充分条件是: 存在相对于 $\|\ \|_X$ 的紧半范 $|\ |$，使对一切 $x \in X$，都有

$$\|Lx\| + |x| \geqslant c\|x\|,$$

其中 c 是正的绝对常数.

当且仅当 (1.3.37) 对 L 和它的共轭算子 L^* 都成立时，L 是 Fredholm 算子.

Fredholm 算子和半 Fredholm 算子的基本性质如下：

(1.3.38) (i) 如对某 $k>0$，$L\in\Phi_k(X, Y)$，那么存在一个范数任意小(但非零)的有限秩的紧线性映射 C，使 $L=L_0(I+C)$，其中 $L_0\in L(X, Y)$ 是满射，并且 $\dim \mathrm{Ker} L_0=k$.

(ii) 如 $L\in\Phi(X, Y)$，那么有 X 的闭线性子空间 X_0，Y 的闭线性子空间 Y_0 以及算子 $L_0\in L(X, Y)$，使得：

(1) 如用 $\hat{L}$ 记 L 在 X_0 上的限制，P 是 Y 到 $\mathrm{coker} L$ 上的投影，则 $\hat{L}$ 有逆，且 $L_0=\hat{L}^{-1}(I-P)$ 和 L 的两侧逆只相差一个紧算子.

(2) $X=X_0+\mathrm{Ker} L$，$Y=Y_0+\mathrm{coker} L$，事实上

(3) L_0L 是 X 到 X_0 上的投影，同时，LL_0 是 Y 到 Y_0 上的投影.

(iii) 对 $L\in\Phi_+(X, Y)$，$\dim\mathrm{Ker} L$ 上半连续. 即是说，如果 $\|B\|$ 充分小，那么 $\dim \mathrm{Ker}(L+B)\leqslant \dim \mathrm{Ker} L$.

(iv) 如 $X=Y$ 是 Hilbert 空间，$L\in\Phi(X, Y)$，那么线性方程 $Lx=y$ 有解的必要充分条件是 y 与 $\mathrm{Ker} L^*$ 正交.

(iii) 定义在 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子 算子 $L\in L(H, H)$ 称作自共轭的，如对一切 x，$y\in H$，都有 $(Lx, y)=(x, Ly)$. 自从 Hilbert 奠基性的工作以来，对这种算子的结构已研究得很深入了. 下面的结果在今后是有用的：

(1.3.39) **双线性型和自共轭算子** 如果 $\zeta(x, y)$ 是有界双线性泛函，那么，有唯一确定的自共轭算子 $L\in L(H, H)$，使 $\zeta(x, y)=(Lx, y)$. 当且仅当 $\zeta(x, y)$ (对 x 和 y) 对弱收敛连续时，L 是紧算子.

(1.3.40) **自共轭算子的谱**

(i) 自共轭算子 L 的谱包含在实数轴的区间 $[m, M]$ 中，其中 $m=\inf(Lx, x)$，下确界是对 $\partial\Sigma_1=\{x\mid\|x\|=1\}$ 取的，$M=\sup(Lx, x)$，上确界也是对 $\partial\Sigma_1$ 取的. 此外，$m, M\in\sigma(L)$.

而且

$$\|L\| = \max(|m|, |M|) = \sup_{\|x\|=1} |(Lx, x)|.$$

(ii) 对自共轭算子L而言，数 $\lambda \in \sigma(L)$ 的必要充分条件是：存在绝对常数 C，使对一切 $x \in H$，都有 $\|Lx - \lambda x\| \geq C\|x\|$，而且自共轭算子$L$的本质谱 $\sigma_e(L)$ 由 $\sigma(L)$ 中那些数组成，它们不是重数有限的特征值.

(iii) 如果L是自共轭紧算子，那么 $\sigma(L)$ 由至多可数无穷个实特征值 $\{\lambda_k\}$ 组成，这个集是离散集(可能在 $\lambda = 0$ 除外). 并且，λ_k 的重数 $\dim \mathrm{Ker}(L - \lambda_k I) < \infty$，$Lx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(x, x_k)x_k$，其中 $\{x_k\}$ 是特征元的正交列，λ_k 重复出现 $\dim \mathrm{Ker}(L - \lambda_k I)$ 次.

(iv) 自共轭紧算子L的特征值可以用极小极大原则来描述. 特别，如果正特征值 λ_k^+ 按递减次序排列(按重数重复出现)，那么

$$\lambda_k^+ = \min_{\pi_{k-1}} \max_{x \in \pi_{k-1}} (Lx, x)/\|x\|^2, \tag{1.3.41}$$

其中 π_{k-1} 记H的任一余维数为 $k-1$ 的线性子空间. 或者

$$\lambda_k^+ = \max_{P_k} \min_{x \in P_k} (Lx, x)/\|x\|^2, \tag{1.3.42}$$

其中 P_k 记H的任一 k 维线性子空间.

(v) 设L是自共轭算子，λ_0是L的重数有限的孤立特征值，那么，在"解析扰动" $L(\varepsilon)$ 下，λ_0是稳定的(其中 $L(\varepsilon) = L + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n L^{(n)}$，$|\varepsilon|$ 足够小，$L^{(n)}$ 自共轭，$\|L(\varepsilon)\| < \infty$). 事实上，对于 $|\varepsilon|$ 充分小，$\lambda \in \Delta = (\lambda_0 + \beta, \lambda_0 - \alpha)$，其中 α, β 选得使Δ中不含L的别的谱点，存在 μ 个收敛的实幂级数

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_i^{(j)},$$

$$x_i(\varepsilon) = x_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j x_i^{(j)} (i = 1, \cdots, \mu)$$

使L在Δ中的谱由特征值 $\lambda_i(\varepsilon)$ 组成，相应的特征元 $x_i(\varepsilon)$ 正交.

(vi) 正自共轭算子L(即 $\sigma(L) \subset [0, \infty)$) 有唯一的正自共

轭平方根 $L^{1/2}$，使 $(Lx, x) = \|L^{1/2}x\|^2$.

(1.3.43) **投影算子** 设 M 是 H 的闭子空间，如果 $H = M \oplus M^{\perp}$ 的元素 x 记作 $x = m + m^{\perp}$，那么，线性映射 $Px = m$ 称作 H 到 M 上的正交投影.

(i) 从 H 到 H 的闭子空间 M 上的任一正交投影 P 自共轭，且 $P^2 = P$, $\|P\| = 1$, $\|(I - P)x\| = d(x, M)$. 反之，任一自共轭算子 Q，若 $Q^2 = Q$，则 Q 是从 H 到 $Q(H)$ 上的正交投影.

(ii) H 到 M 上的正交投影算子是紧算子的必要充分条件是 $\dim M < \infty$.

关于 Laplace-Beltrami 算子的附注：

有界自共轭线性算子的性质是非常重要的，这是因为，在整个几何学和数学物理中，到处都会遇到在适当的 Hilbert 空间结构中的这类算子. 例如，用 Δ 记 Laplace-Beltrami 算子，它作用于定义在紧 Riemann 流形 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的光滑函数类上，算子 Δ 可由局部坐标以及公式

$$\Delta u = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}$$

给出，其中 $|g| = \det(g_{ij})$, $g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$. 如果令

$$\zeta(u, v) = \int v \Delta u dV_g = -\sum_{i,j=1}^{N} \int g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dV_g,$$

并分部积分. 那么，Δ 可以延拓成映 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 到自身的有界自共轭线性算子 L. 事实上，由 Cauchy-Schwartz 不等式，对每个 $u, v \in C^{\infty}(\mathfrak{M}, g)$，有共同的绝对常数 $K > 0$，使 $|\zeta(u, v)| \leqslant K\|u\|_{1,2}\|v\|_{1,2}$，于是 $\zeta(u, v)$ 是有界双线性泛函. 根据(1.3.39)，存在唯一有界自共轭算子 L，L 映 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 到自身，使 $(Lu, v) = \zeta(u, v)$.

对形若 $\mathfrak{L}u = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha}\{a_{\alpha\beta}(x) D^{\beta} u\}$ 的任一"形式自共轭"微分算子有类似的结论成立，其中 $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ 是有界可测函数. 这类算子定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上，在其边界 $\partial\Omega$ 上加上了某些适当的边界条件. 在最简单的情形，即边界条件为 Dirichlet **边界条件** $D^{\alpha}u|_{\partial\Omega} = 0$, $|\alpha| \leqslant m - 1$. 对 $u, v \in C_0^{\infty}(\Omega)$，令

$$\zeta(u, v) = \int_{\Omega} \cdots u,$$

经过几次分部积分，我们有

$$\zeta(u,v)=\int_\Omega v\mathfrak{L}u=\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\alpha uD^\beta v.$$

和上面一样，由(1.3.39)，有唯一的自共轭算子 $L\in L(\mathring{W}_{m,2}(\Omega),\mathring{W}_{m,2}(\Omega))$，使 $\zeta(u,v)=(Lu,v)$.

1.4 不等式和估计

为实现我们在第一部分开始处所描述的方案，需要把给定的非线性微分方程组 $\mathfrak{S}$ 和映射 $f(\mathfrak{S})$ 联系起来，其中 $f(\mathfrak{S})$ 作用于适当选取的 Banach 空间之间．关键之点在于：在这个联系中，$f(\mathfrak{S})$ 应该保留方程组 $\mathfrak{S}$ 主要的数量性质．这些数量性质包括诸如有界性、连续性、紧性，而只有应用下面所讲类型的不等式和估计才能做到这一点．

我们限于描述的两类结果，它们是今后必需的主要的分析事实．第一类(在 1.4A—1.4B 节中讲述)是所谓 Sobolev 空间 $W_{m,p}(\Omega)$ 的不等式，这些不等式清楚地指出了下面这些量之间的联系：

(i) 函数 f 的广义导数的 L_p 范数，

(ii) 函数 f 自身在定义域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的 L_p 范数，

(iii) 函数 f 和它的导数在各点的性状，

(iv) 集 Ω 的维数，

(v) 当看作"更大的" Banach 空间 $X\supset W_{m,p}(\Omega)$ 的子集时，$W_{m,p}(\Omega)$ 中的有界集．

第二类(在 1.4C 中讲述)可以归纳为对两类线性椭圆型偏微分方程解的估计．

(i) L_p 估计 $(1<p<\infty)$ (即在积分或"平均"范数意义下的解的估计)，

(ii) Hölder 空间 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})(0<\alpha<1)$ 中的逐点估计(即通常逐点意义下的估计)．

关于逐点估计与积分估计的附注

在这两种情形，对于我们将要讨论的具体的非线性问题的解来说，逐点估计和积分估计之间的紧密联系都是关键性的．例如，很多非线性问题，

它们先用经典的逐点的形式写出，然后可以加以改写并在 Hilbert 空间中求解．那么，必须保证这个"Hilbert 空间的解"产生实际的非线性问题的解，后者是用光滑函数来表达的．正是在这点上所讲的估计非常有价值．这是因为，我们所用的 Hilbert 空间范数不可避免地要取积分形式，于是，该估计从积分数据中提供出逐点的信息．

1.4A 空间 $W_{1,p}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$

我们先考虑 $\Omega = \mathbf{R}^N$ 和函数具紧支集的简单情形．

(1.4.1) 定理 设 $u \in W_{1,p}(\mathbf{R}^N)$ 在 $\mathbf{R}^N$ 中有紧支集，那么

(i) 当 $p > N$ 和 $N + \mu p < p$ 时，有 $u \in C^{0,\mu}(\mathbf{R}^N)$，而且

$$\|u\|_{C^{0,\mu}(\mathbf{R}^N)} \leqslant C_1 \|\nabla u\|_{L_p(\mathbf{R}^N)}, \tag{1.4.2}$$

其中常数 C_1 与 u 的支集有关，但与 u 本身无关．

(ii) 当 $p \leqslant N$ 和 $(N-p)r < Np$ 时，有 $u \in L_r(\mathbf{R}^N)$，而且

$$\|u\|_{L_r(\mathbf{R}^N)} \leqslant C_2 \|\nabla u\|_{L_p(\mathbf{R}^N)}, \tag{1.4.3}$$

其中常数 C_2 也是与 u 的支集有关，但与 u 本身无关．

由 Sobolev 积分算子的有界性可以直接证明这些不等式．因为，对任 $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$，有

$$|u(x)| \leqslant \frac{1}{\omega_N} \int \frac{|\nabla u|}{|x-y|^{N-1}} dy, \quad \text{其中 } \omega_N = \operatorname{vol}(|x| = 1). \tag{1.4.4}$$

最后这个不等式是这样得到的：对任一固定的方向，

$$u(x) = -\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial r}(x + r\omega) dr,$$

在 ω 的所有方向上积分，就给出

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_N} \int r^{1-N} \frac{\partial u(y)}{\partial r} dy.$$

极限情形时的说明：

今后对两种极限情形感兴趣．对 (1.4.1) 中给出的每种情形，都可用一种重要的方法把结论加强．在第一种情形，假定 $p = N$，于是从 (1.4.3) 推出，对一切有限的 r，$u \in L_r(\mathbf{R}^N)$．有例指出，$W_{1,p}(\mathbf{R}^N) \not\subset L_\infty(\mathbf{R}^N)$．于是，自然想了解当 α 在 $(0, \infty)$ 中变化时 e^{u^α} 的可积性．

在第二种情形，设 $p < N$，但是 $r = Np/(N-p)$．这时 (1.4.3) 有加强了的推广，其中的常数与所给函数 u 的支集的大小

无关。 在本章末尾的附注中用维量分析指出这个事实的可能性。此外，我们还会看到，这个极限情形将失去某些紧性。对于解第六章中所讨论的某些数学物理和微分几何的问题来说，这个"紧性的丢失"将起关键性的作用。

(1.4.1′) **定理** 设 $u\in W_{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 中有紧支集

(i) 当 $P<N$ 和 $r=Np/(N-p)$ 时，有 $u\in L_r(\mathbb{R}^N)$ 且

$$\|u\|_{L_r(\mathbb{R}^N)}\leqslant C_{r,N}\|\nabla u\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}, \tag{1.4.5}$$

其中
$$C_{r,N}=\frac{p}{2\sqrt{N}}\left(\frac{N-1}{N-p}\right);$$

(ii) 当 $p=N$ 时，存在仅与 N 有关的正数 C_1, C_2, 使

$$\int\exp\left(C_1\frac{|u|}{|\nabla u|_{L_p}}\right)^{N/(N-1)}\leqslant C_2\mu(\operatorname{supp}(u)). \tag{1.4.6}$$

(1.4.5)的证明： 我们先对 $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 和 $p=1$ 进行证明，然后，把这特殊情形用到 $v=u^\sigma$, $\sigma=((N-1)/(N-p))p$, 由 Hölder 不等式就可得到一般情形 $p<N$ 时的结论。对 $p=1$, 我们先注意到

$$|u(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|dx_i=\frac{1}{2}I_i.$$

把这些不等式连乘，就得出

$$|2u(x)|^{N/(N-1)}\leqslant(I_1I_2\cdots I_N)^{1/(N-1)}.$$

把最后这个不等式对变元 x_1, x_2, $\cdots$, x_N 逐次积分，在每一步都用 Hölder 不等式 (1.3.3). 这样，在第一步，当令 $I_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\partial u/\partial x_i|dx_idx_j$ 时，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}|2u(x)|^{N/(N-1)}dx_1\leqslant I_1^{1/(N-1)}\int_{-\infty}^{\infty}(I_2\cdots I_N)^{1/(N-1)}dx_1$$
$$\leqslant I_1^{1/(N-1)}(I_{21}\cdots I_{N1})^{1/(N-1)}.$$

因为几何平均值不超过均方根值，在最后一步可得

$$\int_{\mathbb{R}^N}|2u(x)|^{N/(N-1)}dx_1\cdots dx_N\leqslant\left\{\prod_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|dx_1,\cdots dx_N\right\}^{1/(N-1)},$$

由此推出

$$\|u\|_{N/(N-1)}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{N}}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|dx_1\cdots dx_N\leqslant\|\nabla u\|_{L_1}.$$

(1.4.6) 的证明：证明基于对不等式 (1.4.5) 中的绝对常数(它们是 p 的函数) 保持一个精确的上界。事实上，我们可以证明（从(1.4.4)），对函数 $u\in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |u|^{Np/(N-1)} \leqslant c_0 (c_1 \|\nabla u\|_{0,N})^{Np/(N-1)} p^p \mu(\Omega).$$

从这个估计不难得到

$$\int \exp\left\{\frac{u}{c_1\|\nabla u\|_{L_N}}\right\}^{N/(N-1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \int \frac{1}{p!} \left(\frac{u}{c_1\|\nabla u\|_{L_N}}\right)^{pN/(N-1)}$$

$$\leqslant \text{const} \cdot \mu(\Omega) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^{pN/(N-1)} \frac{p^p}{p!}.$$

当 c_2/c_1 充分小时这个级数收敛，于是对这些 c_1，c_2，不等式成立.

关于变分学不等式的附注：

刚才介绍的不等式 (1.4.2)—(1.4.5) 可以用等周变分问题的术语来陈述. 例如，(1.4.3) 可以表述如下：考虑 $W_{1,p}(\Omega)$ 中范数 $\|u\|_{1,p}=1$ 的函数集合 Σ，那么，(i) 对哪些 r，$\sup\limits_{u\in\Sigma}\|u\|_{L_r}<\infty$? (ii) 对哪些 r 和什么样的区域 Ω，可由 Σ 中的一个元达到 $\sup\limits_{u\in\Sigma}\|u\|_{L_r}$? (1.4.1)—(1.4.1′)是对 (i) 的肯定的回答. 为回答 (ii)，下面要介绍的紧嵌入是关键. 事实上，因为 $W_{1,p}(\Omega)$ 被紧嵌入到 $L_r(\Omega)$ 中，由 (1.3.31) 推出，对于 $W_{1,p}(\Omega)$ 中的弱收敛来说，泛函 $G(u)=\|u\|_{L_r}$ 连续. 于是，如果 $\alpha=\sup\limits_{u\in\Sigma}\|u\|_{L_r}<\infty$，$u_n\in\Sigma$ 和 $\|u_n\|_{L_r}\to\alpha$，$\{u_n\}$ 将有弱收敛子列，其弱极限为 $\bar{u}$，使 $\|\bar{u}\|_{L_r}=\alpha$. 此外还有 $\|\bar{u}\|_{1,p}=1$，否则由 (1.3.11)，$0<\|\bar{u}\|_{1,p}<1$. 于是对某个 $t>1$ 有 $\|t\bar{u}\|_{L_r}>\alpha$，同时又有 $\|t\bar{u}\|_{1,p}=1$，矛盾. 所以下面的结果是很重要的.

(1.4.7) **Kondrachov 紧性定理及其推广** 设 S 是 $W_{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 中有共同紧支集函数的集合，而且 $\{\|u\|_{1,p}|u\in S\}$ 一致有界. 那么，(i) 当 $N+\mu p<p$ 时，S 在 $C^{0,\mu}(\mathbb{R}^N)$ 中相对紧，(ii) 当 $r<Np/(N-p)$ 时，S 在 $L_r(\mathbb{R}^N)$ 中相对紧. 此外，(iii) 在 $N=p$ 的特殊情形，泛函 $\int_{\mathbb{R}^N} e^{ku}$ 对 S 中的弱收敛连续. 但是，(iv) 对 $r=Np/(N-p)$，S 不一定是相对紧集.

(i) 的证明： (i) 直接从下面的定理和事实推出. Arzela-Ascoli 定理，Sobolev 积分算子 (1.3.33) 的有界性，以及当 $\alpha'<\alpha$ 时，对有界区域，$C^{0,\alpha}(\Omega)\subset C^{0,\alpha'}(\Omega)$ 是紧嵌入.

(ii) 的证明: 对 $W_{1,p}\to L_p$，结果易从 M. Riesz-Tamarkin 定理导出. 当 r 属于开区间 $(p, Np/(N-p))$ 时，则用 (1.3.35) 以及 (1.3B 中所讲的) L_p 范数的对数凸性性质. 事实上，如果 $\{f_n\}$ 是 L_r 中的任意弱收敛序列，$\{f_n\}$ 在 L_p 中强收敛. 再令 $p_*=Np/(N-p)$，对某个 $0<\alpha<1$，就有

$$\|f_n-f_m\|_{L_r}\leqslant\|f_n-f_m\|_{L_p}^{\alpha p}\|f_n-f_m\|_{L_{p_*}}^{(1-\alpha)p_*}.$$

于是，如所要求的，$\{f_n\}$ 是 L_r 中收敛序列，显然这就推出了 S 相对紧.

(iii) 的证明: 显然，如果 u_n 在 $W_{1,N}(\mathbb{R}^N)$ 中弱收敛到 u，且 $\{u_n\}$ 有相同的紧支集，那么由 (1.3.16)，u_n 依测度收敛到 u. 于是为证 $\int_{\mathbb{R}^N}e^{(hu_n)}\to\int_{\mathbb{R}^N}e^{(hu)}$，只需注意到，由 (1.4.6)，对某个常数 c，$\left\{\int_{\mathbb{R}^N}\exp(cu_n^2)\right\}$ 一致有界；从而结果可从 Lebesgue 积分定理推出.

为找出对任意区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 都成立的 Sobolev 不等式，且其中常数与所涉及函数的支集无关，我们证明 (1.4.2) 的如下推广:

(1.4.8) 设 $1<p<\infty$，并且当 $u\in L_s(\mathbb{R}^N)$ 时，$|\nabla u|\in L_p(\mathbb{R}^N)$，那么，(i) 对闭区间 $[s, Np/(N-p)]$ 中的任意实数 r，$u\in L_r(\mathbb{R}^N)$. 此外，对某个 $\alpha\in[0,1]$，有一绝对常数 C_α，使得

(1.4.9) $$\|u\|_{L_r}\leqslant C_\alpha\|u\|_{L_s}^{\alpha}\|\nabla u\|_{L_p}^{1-\alpha},$$

其中 $\dfrac{1}{r}=(1-\alpha)\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{N}\right)+\dfrac{\alpha}{s}$.

(ii) 于是，只要在不等式 (1.4.3) 的右端把 $\|\nabla u\|_{L_p}$ 换成 $\|u\|_{1,p}$，不等式 (1.4.3) 仍成立，且其中绝对常数与 u 的支集无关.

(i) 的证明: 从 L_p 范数的凸性，(1.4.2) 和 (1.3.16) 推出不等式 (1.4.9)，α，r，p，N 和 s 之间的关系可由维量分析确定.

(ii) 的证明: 在 (1.4.9) 中令 $s=p$，再用不等式

$$\|u\|_{L_p}^{\alpha}\|\nabla u\|_{L_p}^{1-\alpha}\leqslant C_p\|u\|_{1,p},$$

其中 C_p 仅与 p 有关.

(1.4.1″) **推论** 对任意的 $u\in W_{1,p}(\mathbb{R}^N)$，当把 $\|\nabla u\|_{L_p}$ 换成 $\|u\|_{W_{1,p}}$ 时，不等式 (1.4.2)—(1.4.3) 仍成立，其中常数与 u 的支集以及 u 本身均无关.

(1.4.10) **紧性定理** 设 S 是 $W_{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 的在 $\mathbb{R}^N$ 中有共同紧支集函数的有界集，那么，和 (1.4.7) 相同，有

(i) 当 $N+\mu p<p$ 时，S 在 $C^{0,\mu}(\mathrm{R}^N)$ 中相对紧。

(ii) 当 $r<Np/(N-p)$ 时，S 在 $L_r(\mathrm{R}^N)$ 中相对紧。

此外，当 Ω 是 R^N 中有界区域时，对一切 $k>0$，泛函 $\int_\Omega e^{ku}=\psi_k(u)$ 对 $W_{1,N}(\Omega)$ 中的弱收敛连续。

(1.4.11) **推论** 对任意有界区域 $\Omega\subset\mathrm{R}^N$，如把空间 $W_{1,p}(\mathrm{R}^N)$ 换成 $\mathring{W}_{1,p}(\Omega)$，(1.4.1)—(1.4.7) 全部成立。更一般地，如 $p<N$，$\nabla u\in L_p(\mathrm{R}^N)$，$u\in L_s$，那么，当 $r\in[1/s, Np/(N-p)]$ 时，$u\in L_r$ 且对某个 $\alpha\in[0,1]$，

$$\|u\|_{L_r}\leqslant \mathrm{const}\|u\|_{L_s}^{\alpha}\|\nabla u\|_{L_p}^{1-\alpha}.$$

1.4B 空间 $W_{m,p}(\mathrm{R}^N)$ 和 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$

(m 为大于 1 的整数，$1\leqslant p<\infty$)

反复应用 1.4A 中的结果可以证明如下结论：

(1.4.12) **定理** 设 $u\in W_{m,p}(\mathrm{R}^N)$ 在 R^N 中有紧支集，那么，

(i) 当 $mp>N$ 和 $N+p(\alpha+\mu)<mp$ 时，$u\in C^{\alpha,\mu}(\mathrm{R}^N)$ 且有

(1.4.13) $$\|u\|_{C^{\alpha,\mu}}\leqslant \mathrm{const}\|D^m u\|_{L_p},$$

其中常数与 $\mathrm{supp}(u)$ 有关，但与 u 本身无关。

(ii) 当 $mp\leqslant N$ 和 $(N-\beta p)r<Np$ 时，$D^{m-\beta}u\in L_r(\mathrm{R}^N)$，且有

(1.4.14) $$\|D^{m-\beta}u\|_{L_r}\leqslant \mathrm{const}\|D^m u\|_{L_p},$$

其中常数与 $\mathrm{supp}(u)$ 有关，但与 u 本身无关。

(iii) 当 $mp<N$ 和 $r=Np/(N-\beta p)$ 时，$D^{m-\beta}u\in L_r(\mathrm{R}^N)$ 且有

(1.4.15) $$\|D^{m-\beta}u\|_{L_r}\leqslant c(\beta,N,m)\|D^m u\|_{L_p},$$

其中常数仅与 r 和 N 有关，但与 u 或 $\mathrm{supp}(u)$ 无关。

(1.4.16) **推论** 对于任意的 $u\in W_{m,p}(\mathrm{R}^N)$，当把 $\|D^m u\|_{L_p}$ 换成 $\|u\|_{W_{m,p}}$ 时，不等式 (1.4.13)—(1.4.15) 仍然成立，且其中常数既和 $\mathrm{supp}(u)$ 无关，也与 u 无关。更一般地，如果 $u\in L_s(\mathrm{R}^N)$，

$D^m u \in L_p(\mathbb{R}^N)$，那么对 $r < Np/(N - m\beta)$，我们有 $D^{m-\beta}u \in L_r(\mathbb{R}^N)$，且

(1.4.17) $\|D^{m-\beta}u\|_{L_r} \leqslant \text{const}\, \|D^m u\|_{L_p}^{\alpha} \|u\|_{L_r}^{1-\alpha}$，$\alpha \in [0,1]$.

(1.4.18) **推论** 设 S 是 $W_{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 的在 $\mathbb{R}^N$ 中有公共紧支集的函数的有界集，那么

(i) 当 $N + (\alpha + \mu)p < p$ 时，S 在 $C^{\alpha,\mu}(\mathbb{R}^N)$ 中相对紧。

(ii) 当 $r < Np/(N - \beta r)$ 时，S 在 $W_{m-\beta,r}(\mathbb{R}^N)$ 中相对紧。

(1.4.19) **推论** 对任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$，如果把空间 $W_{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 换成 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$，那么 (1.4.12)—(1.4.18) 全部成立。

关于任意区域的说明:

对于任意区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$，只要 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 具有适当的光滑性，上面的微分不等式仍然成立. 这个结果可由所谓 Calderon 延拓定理得到. 该定理指出，对于充分光滑的 $\partial\Omega$，存在一个从 $W_{m,p}(\Omega)$ 到 $W_{m,p}(\mathbb{R}^N)$ 的有界线性变换 E，使得对一切 $u \in W_{m,p}(\Omega)$，Eu 在 Ω 上的限制与 u 重合.

1.4C 线性椭圆型微分算子的估计

问题中的估计分为两类:

(1) L_p 估计 $(1 < p < \infty)$，即一个算子在积分或平均意义下的估计，以及

(2) Hölder 空间 $C^{m,\mu}$ 中$(0 < \mu < 1)$ Schauder 型的逐点估计.

对于线性微分算子 $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha$，通常根据它们的主部 $P_m(x, D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) D^\alpha$ 来分类. 特别，我们可以令

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

把 $P_m(x, D)$ 和未定元 ξ 的一个齐次多项式 $P_m(x, \xi)$ 联系起来. 如果对 $x \in \Omega$，多项式 $P_m(x, \xi)$ 对 ξ 正定，那么 $P(x,D)$ 在$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 中是椭圆型的. 这就清楚地推出 m 是偶数. 如果存在常数 $c > 0$ 使得 $P_m(x, \xi) \geqslant c|\xi|^m$，那么算子 $P(x, D)$ 是一致椭圆型的.

一个微分算子 $P(x, D)$ 说成是散度形式的，如果

(1.4.20) $$P(x, D) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^{\alpha}\{a_{\alpha\beta}(x)D^{\beta}\}.$$

有了这些准备，现在我们可以建立问题中的估计。

(1.4.21) **(i) Gårding 不等式** 设 $P(x, D)$ 是散度形式的一致椭圆型微分算子，定义在 R^N 中有界区域 Ω 上，其系数有界可测，但最高次项的系数 $a_{\alpha\beta}(x)(|\alpha| = |\beta| = m)$ 一致连续，那么，对 $u \in \mathring{W}_{m,2}(\Omega)$，

(1.4.22) $(P(x, D)u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{\mathring{W}_{m,2}(\Omega)} - c_2\|u\|_{L_2(\Omega)}$，

其中 $c_1 > 0$，c_1，c_2 都是与 u 无关的常数。

$m = 2$ 时的证明： 在 $m = 2$ 的二阶情形证明是容易的. 在很多书中都给出了更困难的 $m > 2$ 情形的证明细节，这里就不再重复了.

$$(P(x, D)u, u)_{L_2} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=1} \int a_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}uD^{\beta}u - R(x, u, D^{\alpha}u),$$

其中 $R(x, u, D^{\alpha}u)$ 是 u 和 $D^{\alpha}u$ 的双线性型，$|\alpha| = 1$，其系数有界、可测. 根据 Hölder 不等式，我们可以假定，对任意 $\varepsilon > 0$ 和某个绝对常数 $c(\varepsilon)$，

$$R(x, u, D^{\alpha}u) \leqslant \varepsilon\|\nabla u\|^2_{0,2} - c(\varepsilon)\|u\|^2_{0,2}.$$

于是从 $P(x, D)$ 的一致椭圆性就得到了结论.

(ii) 对线性椭圆型方程解的 L_p 估计

设 L 是定义在有界区域 $\Omega\subset\mathrm{R}^N$ 上的 $2m$ 阶椭圆微分算子. 为简单起见，我们假定 L 的系数是 C^{∞} 函数，Ω 的边界 $\partial\Omega$ 也是属于 C^{∞} 类的. 椭圆型边值问题

(1.4.23) $$Lu = f, \quad D^{\alpha}u|_{\partial\Omega} = 0$$

的解是指函数 $u \in L_p(\Omega)$，它使对一切 $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$

(1.4.24) $$\int uL^*\varphi = \int f\varphi$$

成立，其中 L^* 是 L 的形式共轭算子(参看 1.5 节).

(1.4.25) **定理** 设 $1 < p < \infty$，假定 u 是 (1.4.23) 在 (1.4.24) 意义下的解，那么 $u \in W_{2m,p}$，且

(1.4.26) $$\|u\|_{2m,p} \leqslant c_1\|Lu\|_{0,p} + c_2\|u\|_{0,p},$$

其中正常数 c_1，c_2 与 u 无关，而且，如果 $\mathrm{Ker}\, L = 0$，那么 $c_2 = 0$.

(iii) Schauder 型的 $C^{m,\alpha}$ 估计

(1.4.27) **定理** 在对 L 和 Ω 作同样假定的条件下，设 $u\in C^{0,\alpha}(\Omega)$ 是 (1.4.23) 在 (1.4.24) 意义下的解 ($f\in C^{\alpha}$)，那么 $u\in C^{m,\alpha}(\Omega)$，并且

(1.4.28) $\|u\|_{C^{m,\alpha}(\Omega)}\leqslant c_1\{\|Lu\|_{C^{0,\alpha}}+c_2\|u\|_{C^{0,\alpha}}\}$.

当 L 是 $\mathbb{R}^N$ 上算子 Δ 时的证明思路:

对 $\mathbb{R}^N$ 上 Laplace 算子 Δ，我们考虑 Green 函数 $G(x,y)$，

$$G(x,y)=\begin{cases}-\omega_N^{-1}(N-2)^{-1}|x-y|^{2-N}, & \text{当 } N>2 \text{ 时}\\ -(2\pi)^{-1}\ln|x-y|, & \text{当 } N=2 \text{ 时}\end{cases}$$

首先注意到对具紧支集的 f 和 $\Delta u=f$，

$$u=\int_{\mathbb{R}^N}G(x,y)f(y)dy=h*f,$$

使得(形式地)，

(1.4.29) $$D_iD_ju=(D_iD_jh)*f.$$

下面指出，可把 Calderon-Zygmund 不等式(1.3.18)用于最后一个卷积方程. 这是因为，对一切 $N\geqslant 2$，D_jh 在 $\mathbb{R}^N-\{0\}$ 上光滑，是 $1-N$ 次齐次式，因而是 Calderon-Zygmund 核函数. 这样，由 (1.3.18)，对任何固定的 $p\in(1,\infty)$，我们有

$$\|u\|_{2,p}\leqslant\text{const}\|f\|_{L_p}\leqslant\text{const}\|\Delta u\|_{L_p}.$$

其次，为导出 Schauder 型的估计，我们把(1.3.19)用于方程(1.4.29)；再次，注意到核 D_iD_jh 是 Calderon-Zygmund 核函数，于是

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}}\leqslant\text{const}\|f\|_{0,\alpha}\leqslant\text{const}\|\Delta u\|_{0,\alpha}.$$

至于一般情形的证明，读者可参考 Agmon(1959, 1964)以及其他的文章.

1.5 微分方程组的古典解和广义解

广义微分的概念使得可以区分一个微分方程组 $\mathfrak{S}$ 的古典解和在某种平均(即积分)意义下满足 $\mathfrak{S}$ 的解. 例如，对于定义在区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的 m 阶线性微分方程 $Lu\equiv\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)D^\alpha u=f$，如果对所有的"测试函数" $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，局部可积函数 u 满足

(1.5.1) $\int_\Omega uL^*\varphi=\int_\Omega f\varphi$ $\left(\text{其中 } L^*=\sum_{|\alpha|=m}(-1)^\alpha D^\alpha a_\alpha\right)$，

则 u 是该方程的一个"分布解". 另一方面，在 Ω 上 $Lu=f$ 的

古典解一般是指这样一个函数 u，u 在 Ω 上 m 次连续可微，在每一点 $x\in\Omega$ 满足 $Lu=f$.

在线性偏微分方程理论中，这种推广了的解的概念已被证明是非常有用的。此外，对于线性椭圆算子 L 来说，当 f 和系数 $a_\alpha(x)$ 足够光滑时，$Lu=f$ 的分布解的集合和古典解的集合重合。

1.5A $W_{m,p}$ 中的弱解

一般说来，分布解不能相乘，于是对于非线性问题来说，另一种广义解，"弱解"(古典解和分布解的中间物)就很重要了。

设开集 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$，Dirichlet 问题

$$(1.5.2)\qquad G(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)=0,$$

$D^\alpha u|_{\partial\Omega}=0$，如果 $u\in W_{m,p}(\Omega)$，且

$$(1.5.3)\qquad \sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)D^\alpha\varphi=0 \text{ 对一切 } \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

成立，那么把 u 称作 (1.5.2) 在 $W_{m,p}$ 中的一个弱解。

从 1.1C 节讨论的变分学问题中自然导出形若 (1.5.2) 的偏微分方程。在 (1.5.3) 中分部积分，直接得出：如果 $G(u)=0$ 的弱解足够光滑，那么它是 $G(u)=0$ 在古典的逐点意义下的解(当然要求函数 A_α 光滑)。$G(u)=0$ 的 Dirichlet 问题的古典解必是弱解。但如所周知的那样，即使在线性方程的情形，逆命题也是不对的。

例 设 $\Omega=\{x|x=(x_1,x_2,\cdots,x_N),|x|<1,x\in\mathbf{R}^N,N>2\}$，在 Ω 中，方程

$$(*)\qquad \Delta u=(N+2)x_1x_2|x|^{-2}$$

的 Dirichlet 问题有唯一的弱解 $u(x)=x_1x_2\log|x|\in R_{1,2}(\Omega)$。因为这个弱解在 $x=0$ 点不连续，所以 Poisson 方程($*$)没有古典解 $w(x)$。这是因为，在 $\partial\Omega$ 为 0 的唯一广义调和函数是恒为 0 的函数 (Weyl 引理)，所以，如果 $w(x)$ 存在，它必然和 $u(x)$ 恒等。

在对非线性微分方程组的系统研究中，已证明刚才引进的弱解的概念是非常成功的．因为它把这种方程组的解的研究很方便地分为两部分：一部分与弱解的存在性及其性质有关，另一部分则只涉及弱解的光滑性．而且，一般说来，可以由作用于适当的 Banach 空间之间的抽象算子(一般是非线性的)来描述这些弱解的结构．于是就可以把泛函分析强有力的结果应用于非线性微分方程的研究．

1.5B 半线性椭圆型方程组弱解的正则性

由于把方程组 $\mathfrak{S}$ 可能的解的范围扩大了，就有可能加进了无关的"伪解"，应该把这些"解"排除掉．于是，有关弱解的任何讨论都应处理这样的问题，即证明这样的广义解足够光滑，以致它就是古典的逐点意义下的解．这种问题称作正则性理论．与半线性椭圆微分方程边值问题有关的正则性理论是最简单的，同时也是最有用的正则性理论之一．

要用到两个关键的事实．首先，已知的广义解和该微分算子最高阶项的线性被用于把正则性问题看作一个**线性**非齐次方程，这个方程有一个属于某个 L_p 类的非齐次项．其次，问题的非线性性质可用于**增强**由线性正则性理论所得到的光滑性．由反复把较光滑的广义解，譬如说 $u(x)$，代回非齐次项(利用 Sobolev 不等式)，我们得出这个项是某个新的类 L_r 中的元素，$r > p$．这样依次进行，借助于线性正则性结论，就增强了 $u(x)$ 的光滑性．

在研究如下的半线性 Dirichlet 问题时，可以把研究这个正则性理论时用到的思想看得很清楚．设 L 是 $2m$ 阶线性椭圆型微分算子，它的系数定义在有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 上，足够光滑(譬如说 C^∞)，

$$Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u).$$

设 $u\in\mathring{W}_{m,2}(\Omega)$ 是边值问题

(1.5.4) $\qquad Lu = f(x,u)$，在 Ω 中，

(1.5.5) $\qquad D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \ |\alpha|\leqslant m-1$

的弱解．据 (1.5.3)，这意味着对一切 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$(1.5.6)\qquad \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\int_\Omega a_{\alpha\beta}(x)D^\beta uD^\alpha\varphi=\int_\Omega f(x,u)\varphi.$$

于是，如果 $f(x,u)$ 是它的变元的 C^1 函数，又预先知道在 Ω 上，$|u|\leqslant$ 常数，那么可以直接断定 $u\in C^{2m,\alpha}$．事实上，可以把 u 看作在 Ω 中线性非齐次方程 $Lu=g(x)$ 的一个弱解，其中 $g(x)=f(x,u(x))\in L_\infty(\Omega)$．由 (1.4.25)，对任何 $1<p<\infty$，$u\in W_{2m,p}$．根据 Sobolev 嵌入定理，对充分大的 p，$g(x)=f(x,u)\in C^{0,\alpha}(\Omega)$．于是，根据(1.4.27)，$u\in C^{2m,\alpha}(\Omega)$．这时，基于 L_p 上的重复论证以及对线性椭圆型方程的 Schauder 估计，结合 Sobolev 嵌入定理 (1.4.12)，就得到正则性结果．这个论证还可改进如下：

(1.5.7)设 $f(x,u)$ 是 x 和 u 的 Lipschitz 连续函数，当 $|u|$ 充分大时，满足如下增长条件

$$(1.5.8)\qquad |f(x,u)|\leqslant k\{1+|u|^\sigma\},\ 0<\sigma<\frac{N+2m}{N-2m}.$$

那么，在 Ω 中和在 $\partial\Omega$ 的所有充分光滑的部分上，(1.5.4) 的任何弱解都是 Ω 中的古典解．反之，如果 $\sigma>(N+2m)/(N-2m)$，(1.5.4) 可以有在 Ω 中不连续的弱解．

为简化这个证明，我们假定 $f(u)=k\{u^\sigma\}$，在 2.2 节，我们再来证明这样做是有根据的，在那一节中对合成算子 $f(u)=f(x,u)$ 进行了研究．为证明定理的第二部分，令 $L=\Delta$，Δ 是 Laplace 算子，请注意，如果 $r=|x|$，$\Omega=\{x\,|\,|x|<1\}$，那么，对 $\alpha>1-N/2$，$r^\alpha\in W_{1,2}(\Omega)$．此外，经过简单的计算可知(除去 $x=0$ 那一点)，$u=r^\alpha$ 满足方程

$$\Delta u+K(\alpha,N)u^{(\alpha-2)/\alpha}=0,$$

其中 $K(\alpha,N)=\alpha(2-\alpha-N)$．于是，对 $0>\alpha>1-N/2$，对形若 (1.5.4) 的方程的 Dirichlet 问题来说，$v=r^\alpha-1$ 是它在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 中的一个弱解．非线性项 $f(x,v)$ 满足增长限制 (1.5.8)，其中 $\sigma=(\alpha-2)/\alpha=1-\alpha/2>(N+2)/(N-2)$．最后注意到 $v=r^\alpha-1$ 在 $x=0$ 处有奇异性，故在 Ω 中不连续．

回过头来看第一部分，并设 $f(u)=ku^\sigma$，其中 $\sigma<(N+2m)/(N-2m)$．为证明弱解 $u\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 足够光滑，就是一个古典解，我们采用称之为靴襻过程的重复论证法，即逐步提高 $u(x)$ 的正则性．首先证明，对 Ω 的任意紧子域 Ω'，对某个 p，$u\in W_{2m,p}(\Omega')$，然后再证明，对任意有限的 $\bar p$，$u\in$

$W_{2m,\bar{p}}$. 于是只要 $N<2m\bar{p}$，从 Sobolev 嵌入定理就推出 $u\in C_{0,\alpha}(\Omega')$，从而 $f(x, u(x))\in C_{0,\alpha}(\Omega')$. 这样一来，由 Schauder 正则性定理(1.4.27)就得到 $u\in C_{2m,\alpha}(\Omega')$.

当 $N\leqslant 2m$ 时，因为由 Sobolev 嵌入定理，对任意有限的 p 都有 $|u|^\sigma\in L_p(\Omega')$，所以证明是容易的. 因为 $u(x)$ 已知，我们可以把方程 $Lu=ku^\sigma(x)$ 看作 u 的非齐次线性椭圆型偏微分方程. 由此，从 L_p 正则性定理(1.4.25)推出，对任意有限的 p，$u(x)\in W_{2m,p}(\Omega')$.

在 $N>2m$ 的情形，我们首先证明对某个 $\varepsilon>0$ 和 $p=2N(1+\varepsilon)/(N+2m)$，$u\in W_{2m,p}(\Omega')$. 为此，我们注意到，根据 Sobolev 嵌入定理，由 $u\in \mathring{W}_{m,2}(\Omega)$ 可推出 $u\in L_p(\Omega)$，其中 $p=2N/(N-2m)$，因而对 $s=p/\sigma$，$k|u|^\sigma\in L_s(\Omega)$. 因为 $\sigma<(N+2m)/(N-2m)$，故对某个 $\varepsilon>0$，$S=2N(1+\varepsilon)/(N+2m)$. 那么和上节一样，我们可以把方程 $Lu=k\{u^\sigma\}$ 看作 u 的线性非齐次椭圆型方程，又由(1.4.25)推出 $u\in W_{2m,s}(\Omega')$，其中 $s=2N(1+\varepsilon)/(N+2m)$. 现在证明，对 $S_1>S$，$u\in W_{2m,s_1}(\Omega')$. 因为 $u\in W_{2m,s}(\Omega')$，从 Sobolev 嵌入定理推出，对 $\rho_1=Ns/(N-2ms)$，$u\in L_{\rho_1}(\Omega')$，于是对 $S_1=\rho_1/\sigma$，$k|u|^\sigma\in Ls_1$. 下面证明 u 的正则性得到改善. 注意到

$$\frac{s_1}{s}=\frac{\rho_1}{p}=\frac{(Ns/2N)(N-2m)}{N-2ms},$$

经过简短的计算，可求得 $s_1/s=(1+\varepsilon)(N-2m)/(N-2m-4m\varepsilon)>1+\varepsilon$. 于是，由非齐次椭圆型方程的 L_p 正则性定理推出，不仅对 $S_1>s$，$u\in W_{2m,s_1}$，而且，在重复有限次这最后的论证后，可知对任意大的 $\bar{s}$，$u\in W_{2m,\bar{s}}$. 这就证明了所要的结果.

因为算子 L 是线性的，所以方程(1.5.4)是半线性的. 建立形若(1.5.2)的拟线性椭圆型方程的正则性理论则困难得多，除非 $m=1$ (即二阶方程)，或 $N=1$ (即常微分方程). 在二阶常微分方程的情形，对于很多应用来说，下面的正则性的结果已经够用了.

(1.5.9) $p>1$，设对一切 $\varphi\in \mathring{W}_{1,p}(a, b)$，$u(x)\in W_{1,p}(a, b)$ 满足如下的积分恒等式

$$\int_a^b\{F_z(x, u; u_x)\varphi_x+F_y(x, u, u_x)\varphi\}dx=0, \tag{1.5.10}$$

其中 $F(x, y, z)$ 是变元的 C^2 函数. 如果 $F_{zz}(x, y, z)\neq 0$，那么 $u(x)\in C^2(a, b)$.

证明：由 Sobolev 不等式的简单应用，我们指出，$\int_a^x F_y(x, \bar{u}, \bar{u}_x)=G(x)$ 是 Lipschitz 连续函数. 对(1.5.10)花括号内第二项分部积分，求出

$$\int_a^b\{F_z(x, u, u_x)-G(x)\}\varphi_x dx=0,$$

其中 ζ_x 是满足 $\int_a^b \zeta_x dx = 0$ 的任意有界可测函数．故(可能在一个零测集上重新定义 $\bar{u}(x)$ 后)，

$$F_z(x, \bar{u}, \bar{u}_x) = G(x) + \text{常数}. \tag{1.5.11}$$

因为 $F_{zz} > 0$，可用有限维时的隐函数定理解出 $\bar{u}_x(x)$，用 $\bar{u}(x)$ 和 $G(x)$ 表出．所以 $\bar{u}_x$ 是 Lipschitz 连续的，因而 $G(x)$ 应连续可微．又由(1.5.11)推出 $\bar{u}_{xx}$ 连续，这就是所要证明的．

对于拟线性二阶椭圆型偏微分方程来说，建立正则性结果是很困难的，在这个阶段我们也不必去纠缠它．首先，这些结果是一些优秀的近代专著的主要课题(请看本章末所列的参考书目)，其次，对于我们学习的主要部分来说，它们也并非必需的．事实上，总的说来，我们将讨论的数学物理和微分几何中的大部分非线性问题仅与半线性方程有关，对于这些方程，类似于(1.5.7)的简单结果就够用了．

1.6 有限维空间间的映射

对线性方程组的大部分研究基于有限维向量空间的理论，以及作用于它们之间的线性映射的理论．于是，很自然地，把一般(非线性)方程组的研究奠定在这样的想法上：从线性代数推广到非线性．在这一节，我们提到这方面以后要用到的一些结果．更充分的讨论和证明可以参看本章末所给出的文献．

1.6A Euclid 空间间的映射

设 Ω 记 $\mathbf{R}^N$ 中的一个开集，$f: \Omega \to \mathbf{R}^M$ 是光滑映射(譬如说属于 C^p 类)．一个想法是，由研究 f 的导数 $f'(x)$ (即 $N \times M$ 阶矩阵 $(D_j f_i(x))$，其中 $f = (f_1, \cdots, f_N)$)，来确定映射 f 的性质．于是，如果在点 x_0，$f'(x_0)$ 的秩等于 M，那么 f 映 x_0 的一个小邻域到 $f(x_0)$ 的一个小邻域上，这样的点 x_0 称作 f 的正则点，正则点的集合在 Ω 中的余集，即集合

$$\mathfrak{C} = \{x \mid x \in \Omega,\ f'(x) \text{ 的秩小于 } M\}$$

称作临界集，$\mathfrak{C}$ 中的点称作临界点*)．$\mathfrak{C}$ 是 Ω 中的闭集．这是因为，如果在 Ω 中 $x_n \to x$，那么 $f'(x_n)$ 的秩 $\geqslant f'(x)$ 的秩．下面的与集 $\mathfrak{C}$ 有关的结果是重要的．

(1.6.1) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的开子集，那么有

(i) **Sard 定理** 如果 $f(x)$ 是映 Ω 到 $\mathbb{R}^M$ 中的 p 次连续可微映射，那么当 $N-M+1 \leqslant p$ 时，临界值集 $f(\mathfrak{C})$ 在 $\mathbb{R}^M$ 中测度为 0。

(ii) **A. Morse 定理** 如果 $F(x)$ 是定义在 Ω 上的 N 次连续可微实值函数，$\mathfrak{C}$ 记 $F(x)$ 的临界点的集合，那么 $F(\mathfrak{C})$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中测度为 0。

这两个结果在分析中有无数的应用．在第三章我们将讨论这些结果在无穷维时的推广．

对于定义在 $\mathbf{C}^N$ 的有界区域 Ω 上，映入 $\mathbf{C}^M$ 的复解析映射 f，已经知道了它的很多映射性质，这就是：

(1.6.2) (i) 当 $N=M$ 时，z_0 是 f 的奇点的必要且充分条件是 f 在 z_0 附近不一对一。

(ii) 如用 U 记 z_0 的小邻域，集 $S=\{z|f(z)=p\}$，$z_0 \in S$，那么 $S \cap U$ 由有限多个不可约分支 $\{V_i\}$ 组成，每个 V_i 或是一个点，或者包含一条解析(非平凡的)曲线．此外，如果 $V_i \neq V_j$，则 V_i 包含一条不被 V_j 包含的解析曲线．

(iii) 如果 $S=\{z|f(z)=p\}$ 紧，那么 S 由有限多个点组成．

Sard 定理可以用来定义连续映射 $f: \Omega \to \mathbb{R}^N$ 的度．度是一个整数，当在 $\partial\Omega$ 上 $f(x) \neq p$ 时，它提供了方程 $f(x)=p$ 在 Ω 中解的"代数和" $(p \in \mathbb{R}^N)$．我们的定义分下面三部分给出

(i) 设 f 是 $\Omega \to \mathbb{R}^N$ 的 C^1 映射，$f'(x)$ 的秩为 N，故每当 $f(x_0)=p$，f 在 x_0 点的 Jacobi 行列式不为零，我们可以定义 f 在 p 点关于 Ω 的度为

*) 若在 $x \in \mathfrak{C}$，使 $y=f(x)$，则称 y 为 f 的临界值，反之称 $y \in \mathbb{R}^M$ 为 f 的正则值——译者注．

$$d(f, p, \Omega) = \sum_{f(x)=p} \operatorname{sgn} |J_f(x)|.$$

根据 $\bar{\Omega}$ 的紧性和反函数定理，这个和是有限数。

(ii) 现假定已知 f 是 $\bar{\Omega} \to \mathbf{R}^N$ 的 C^1 映射，那么，由 (1.6.1, (i))，可以找到正则点列 $\{p_n\}$ (对于(f, Ω))，使得在 $\mathbf{R}^N$ 中，$p_n \to p$. 我们可以定义 f 在 p 的度为

$$d(f, p, \Omega) = \lim_{n\to\infty} d(f, p_n, \Omega).$$

(iii) 最后，如果只知道 f 在 $\bar{\Omega}$ 中连续，由于有 C^1 映射列 f_n 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于 f，我们可令

$$d(f, p, \Omega) = \lim_{n\to\infty}(f_n, p, \Omega).$$

可以证明，在 (ii) 和 (iii) 中，函数 $d(f, p, \Omega)$ 有定义，极限存在且与逼近序列的选取无关. 从定义不难推出度函数的如下基本性质.

对有界区域 $D \subset \mathbf{R}^N$

(1.6.3) (i) (边界值依赖性) $d(f, p, D)$ 由 $f(x)$在 ∂D 上的性状唯一确定.

(ii) (同伦不变性) 设对任意 $t \in [0, 1]$, $H(x, t) = p$ 在 ∂D 上没有解 $(x \in \partial D)$，那么，当 $H(x, t)$ 是 x 和 t 的连续函数时，$d(H(x, t), p, D)$ 是与 $t \in [0, 1]$ 无关的常数.

(iii) (连续性) $d(f, p, D)$ 是 $f \in C(\bar{D})$ (对一致收敛拓扑而言)和 $p \in D$的连续函数.

(iv) 如 p 和 p' 处于 $\mathbf{R}^N - f(\partial D)$ 的同一连通分支内，那么 $d(f, p, D) = d(f, p', D)$.

(v) (区域分解性) 如果 $\{D_i\}$ 是D的不交开子集有限覆盖，且对一切 $x \in \left(\bar{D} - \bigcup_i D_i\right)$, $f(x) \neq p$, 那么 $d(f, p, D) = \sum_i d(f, p, D_i)$.

(vi) (乘积公式) 如果$p \in D \subset \mathbf{R}^N$, $p' \in D' \subset \mathbf{R}^m$, $f: D \to \mathbf{R}^N$, $g: D' \to \mathbf{R}^m$, 那么

$$d((f, g), (p, p'), D \times D') = d(f, p, D) \cdot d(g, p', D').$$

只要等式右端有意义.

(vii) 如果在 $\bar{D}$ 中 $f(x) \neq p$，那么 $d(f, p, D) = 0$.

(viii) (奇映射) 设 D 是关于原点对称的区域，$f: D \to \mathbf{R}^N$，在 ∂D 上 $f(x) \neq 0$，且在 ∂D 上有 $f(-x) = -f(x)$，那么 $d(f, 0, D)$ 是奇数.

(ix) 如 $d(f, p, D) \neq 0$，那么方程 $f(x) = p$ 在 D 中必有解.

(x) 设 U 是 $\mathbf{C}^n$ 中原点的邻域，f 是映 U 到 $\mathbf{C}^n$ 的复解析映射，$f(0) = 0$. 如果原点是 f 的孤立零点，Jacobi 行列式 $\det|J_f(0)| = 0$，那么，对原点的任何充分小的开邻域 U'，$d(f, 0, U') \geq 2$.

在对连续映射进行定性的研究时，刚才介绍的映射度是很有用的. 作为一个简单的例子，我们证明

(1.6.4) **Brouwer 不动点定理** 设 f 是映 $\mathbf{R}^N$ 中单位球 $\sigma = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$ 到自身的连续映射，那么 f 在 σ 中至少有一个不动点.

证明: 我们证明，或者在 σ 的边界上，或者在内部 f 有不动点. 设 f 在 σ 的边界 $\partial\sigma$ 上没有不动点，那么度 $\delta = d(I - f, 0, |x| < 1)$ 有定义. 我们证明，在这种情形. 用同伦映射 $h(x, t) = x - tf(x)$，$t \in [0, 1]$ 连接恒等映射和 $x - f(x)$ 得出 $\delta = 1$. 因为 f 映 σ 到自身，所以 $|f(x)| \leq 1$，方程 $h(x, t) = 0$ 在 σ 的边界 $\partial\sigma$ 上没有解. 事实上，如果方程在 $\partial\sigma$ 上有解，那么必然 $t = 1$，f 就在 $\partial\sigma$ 上有不动点. 于是，由 (1.6.3) 中提到的度的同伦不变性，$\delta = d(I, 0, |x| < 1) = 1$ (根据定义). 又由 (1.6.3(ix))，f 在 σ 中至少有一个不动点. 定理证毕.

在第五章中，我们把度的概念推广到 Banach 空间间的映射类上去，并用这个推广解决分析中的许多问题.

1.6B 同伦不变性

同伦群 设 $M(X, Y)$ 记拓扑空间 X 和 Y 之间的连续映射的集合，两个映射 $f, g \in M(X, Y)$ 称作同伦，如果存在单参数映射

族 $f_t \in M(X, Y)$，f_t 对 $t \in [0,1]$ 连续，并连接 f，g，即 $f_0 = f$，$f_1 = g$. 不难验证，同伦是一个等价关系，并划分 $M(X, Y)$ 成同伦类的集合，记作 $[X, Y]$. 我们希望能够得到有关这些同伦类的信息，如果可能，还想根据 X 和 Y 的拓扑性质来决定类 $[X, Y]$.

相应地在 $[X, Y]$ 中引进一个代数结构. 如用 $X = S^1$ 记将区间 $[0, 1]$ 端点重合而得的集合，固定一个基点 $y_0 \in y$，注意满足 $f(0) = y_0$ 的映射 $f \in [S^1, Y]$，对两个这样的映射 $f, g \in [S^1, Y]$，定义 $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$，其中

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} g(2s), & 0 \leqslant s \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ f(2s-1), & \dfrac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

不难证明，在固定基点 y_0 时，这个运算在集合 $[S^1, Y]$ 上满足群的公理. 这个群称作 Y 关于 y_0 的基本群，记作 $\pi_1(Y, y_0)$.

更一般地，可以定义高阶同伦群 $\pi_n(Y, y_0)$，考虑 n 维方体 I^n(n 个 $[0, 1]$ 的积)和它的边界 ∂I^n，以及映射 $[I^n, y]$ 的同伦类，这些映射映 ∂I^n 成固定基点 y_0. 对两个这样的映射，令

$$[f] \cdot [g] = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \cdots, t_n), & \text{对 } 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n), & \text{对 } \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

再验证这个运算又使上面的同伦类构成一个群 $\pi_n(Y, y_0)$. 也可以用另一个办法来描绘群 $\pi_n(Y, y_0)$，即考虑 $[S^n, Y]$ 中映固定点 $s_0 \in S^n$ 到 y_0 的元素. 事实上，如果把 I^n 的边界 ∂I^n 恒同于点 s_0，商 $I^n/\partial I^n$ 和 S^n 拓扑等价，故 $\pi_n(Y, y_0)$ 的元素可以恒同于同伦类 $[S^n, Y]$，后者映固定点 $s_0 \in S^n$ 成 y_0. 如果 Y 单连通，$\pi_n(Y, y_0)$ 与基点 y_0 无关，这时可使用记号 $\pi_n(Y)$.

在同伦论中，最重要的是球面同伦群 $\pi_k(S^n)$ 的计算. 下面的结果是已知的.

(1.6.5) $$\pi_k(S^n) \approx \{0\} \text{ 对 } k < n,$$

(1.6.6) $$\pi_n(S^n) \approx \mathbf{Z}.$$

在 1.6A 节中引进的映射度的概念可以用来加细 (1.6.6)，采用的办法是给出一个“有效的方法”以确定所给映射 $f: S^n \to S^n$ 的同伦类. 设 $\tilde{f}$ 是 f 到 $\sigma = \{x \mid |x| < 1\}$ 的任一连续延拓,则 f 的度就是 $d(\tilde{f}, 0, \sigma)$. 下面的 Hopf 的结果指出这个度是同维数球面之间映射的唯一同伦不变量.

(1.6.7) 定理 设 f 和 g 是 S^n 到 S^n 的两个映射,那么,f 和 g 同伦的必要且充分条件是 f 和 g 的度数相等.

其次，我们考虑当 $p \geqslant 0$ 时同伦群 $\pi_{n+p}(S^n)$ 的性质. 在第五章,一个重要的事实说,当 $n \to \infty$ 时,群 $\pi_{n+p}(S^n)$ 稳定(即对于充分大的 n, $\pi_{n+p}(S^n) \approx \pi_{n+1+p}(S^{n+1})$). 事实上，Frendenthal 和 Serre 的如下结果成立

(1.6.8) 设 p 是非负整数，那么，对任何整数 $n > p+1$ 同伦群 $\pi_{n+p}(S^n)$ 是标准同构,而且,对 $p > 0$ 这些稳定群是有限群.

在这个一点上，映射的同纬概念是根本的. 为定义这个概念,设 f 是 $S^r \to S^n$ 的映射，f 的同纬 $S(f)$ 是 f 的一个延拓，映 $S^{r+1} \to S^{n+1}$(我们分别把 S^r 和 S^n 看作 S^{r+1} 和 S^{n+1} 的赤道). $S(f)$ 是这样构成的,它连续映 S^{r+1} 的北半球入 S^{n+1} 的北半球,在南半球也是如此. 同纬导出一个同态 $E: \pi_r(S^n) \to \pi_{r+1}(S^{n+1})$. 事实上,这个同态产生 (1.6.8) 的同构.

不稳定同伦群 $\pi_{n+p}(S^n)(1 < n \leqslant p+)$ 表现出特别有趣的性质. 实际上，确定它们也提出较深刻的拓扑问题. Hopf 指出，$\pi_3(S^2)$ 是无穷的,事实上它同构于整数加法群,同时 $\pi_4(S^3) \approx \mathbf{Z}_2$,两元素的 Abel 群. 实则,当 n 是偶数时,每个形若 $\pi_{2n-1}(S^n)$ 的群都是无限的. 于是可以断定，当 $p > 0$ 时,在同纬运算下,很多信息被丢失了. 在分析中如何利用这些不稳定群是一个有趣的问题，我们将在第五章中作简要的讨论.

今后，最重要的问题是无穷维 Banach 空间映射类的同伦分类. 为阐明这一点，考虑非线性算子方程的可解性问题. 很自然的一个方法是把所给方程变形为另一较简单的方程，使得从简

单方程的可解性可推出原来所给方程的可解性．第五章将要讨论这个问题以及它与无穷维同伦的关系．

1.6C 同调和上同调不变量

(i) 奇异同调群 设 δ_p 记 $\mathbf{R}^{p+1}$ 中标准的 Euclid 单形，那么，定义在一个拓扑空间 X 上的(连续) p 单形是一个映 δ_p 入 X 的连续映射 σ．在一个可加 Abel 群 $\mathscr{G}$ 上的，X 上的奇异 p 链是一个线性组合 $c=\Sigma g_i\sigma_i$，其中 σ_i 是(连续) p 单形，系数 g_i 是 $\mathscr{G}$ 中元素．这样的链的集合 $C_p(X,\mathscr{G})$ 构成一个加法 Abel 群．如果 $f:X\to X'$ 是连续映射，$c\in C_p(X,\mathscr{G})$，那么，我们可由令 $f_1(\Sigma g_i\sigma_i)=\Sigma g_if(\sigma_i)$ 定义一个导出同态 $f_1:C_p(X,\mathscr{G})\to C_p(X',\mathscr{G})$．

现在用 $\delta_p=[x_1,x_2,\cdots,x_p]$ 记标准 Euclid p 单形，在相应的连续单形上，我们用

$$d(x_0,x_1,\cdots,x_p)=\sum_{i=1}^{p}(-1)^i[x_0,x_1,\cdots,\hat{x}_i,\cdots,x_p]$$

定义边界算子 d，其中符号 $\wedge$ 表示略去该顶点．对于一般的连续 p 单形 $\sigma(x_1,\cdots,x_p)$ 来说，我们规定 $d\sigma=\sigma_1d(x_0,x_1,\cdots,x_p)$；同时，对一般的元素 $\alpha\in C_p(X,\mathscr{G})$，$\alpha=\Sigma g_i\sigma_i$，我们用线性的办法来延拓 d，即 $d\alpha=\Sigma g_id\sigma_i$．于是 d 是 $C_p(X,\mathscr{G})\to C_{p-1}(X,\mathscr{G})$ 的一个同态，并且 $d^2=0$．

$d:C_p(X,\mathscr{G})\to C_{p-1}(X,\mathscr{G})$ 的核记为 $Z_p(X,\mathscr{G})$，称作 X 在 $\mathscr{G}$ 上的 p 维**循环群**；同时 $d:C_{p+1}(X,\mathscr{G})\to C_p(X,\mathscr{G})$ 的值域记为 $B_p(X,\mathscr{G})$，称作 X 在 $\mathscr{G}$ 上的 p 维边界群．相应的商群记为 $H_p(X,\mathscr{G})$，称作 X 在 $\mathscr{G}$ 上的 p 维同调群，即

(1.6.9) $$H_p(X,\mathscr{G})=Z_p(X,\mathscr{G})/B_p(X,\mathscr{G}).$$

可以由考虑 X 的子空间 Y 把这个定义拓广．事实上，同态 $d:C_p(X,\mathscr{G})\to C_{p-1}(X,\mathscr{G})$ 映子群 $C_p(Y,\mathscr{G})\to C_{p-1}(Y,\mathscr{G})$，于是 d 诱导出同态

$$d_p':C_p(X,\mathscr{G})/C_p(Y,\mathscr{G})\to C_{p-1}(X,\mathscr{G})/C_{p-1}(Y,\mathscr{G}),$$

而且 $d'_{p-1}d'_p=0$. 如用 $Z_p(X, Y, \mathscr{G})$ 记d'_p 的核,用 $B_p(X, Y, \mathscr{G})$ 记 d'_{p+1} 的值域,那么,我们可定义 p 阶相对同调群为

(1.6.10) $H_p(X, Y, \mathscr{G}) = Z_p(X, Y, \mathscr{G})/B_p(X, Y, \mathscr{G})$.

显然,如果 $Y = \emptyset$,那么 (1.6.10) 和 (1.6.9) 重合.

Abel 群 $H_q(X, A)$ 的秩称作 (X, A) 的 q 维 Betti 数,记作 $R_q(X, A)$,交错和 $\chi(X, A) = \sum_{q=0}^{\infty}(-1)^q R_q(X, A)$ 称作 (X, A) 的 Euler-Poincaré 示性数.

今后,确定某个已知空间的同调是重要的. 如果 $E^N = \{x \mid |x| \leqslant 1, x \in \mathbf{R}^N\}$ 和 $S^{N-1} = \partial E^N$, 我们有

$$H_q(E^N, S^{N-1}, \mathscr{G}) = \begin{cases} 0, \text{如 } q \neq N, \\ \mathscr{G}, \quad q = N, \end{cases}$$

$$H_q(S^{N-1}, \mathscr{G}) = \begin{cases} 0, \text{如 } q \neq 0, N-1, \\ \mathscr{G}, \quad q = 0, N-1 (N \neq 1), \end{cases}$$

$$H_0(S^0, \mathscr{G}) = \mathscr{G} \oplus \mathscr{G}.$$

(ii) 奇异上同调群 一个拓扑空间 X 相对于某个固定的 Abel 群 $\mathscr{G}$ 的奇异上同调群 $H^p(X, \mathscr{G})$,可以形式地通过对偶的办法由相应的奇异同调群来定义. 如果在上同调群的元素间定义一个"上积"运算,那么,X 的奇异上同调群有一个加法环结构. 我们将在第六章中用这个结构去估计定义在一个无穷维流形 X 上泛函 $\varphi(u)$ 的临界点的数目.

(iii) 有限维的 M. Morse 临界点理论 在 C^2 实值函数(它们定义在有限维光滑流形上)的 Morse 临界点理论中,刚才讲到的奇异同调理论起着基本重要的作用. 这个理论由对定义在 $\mathbf{R}^N$ 上的 C^2 实值函数的临界点进行分类开始. 最简单的临界点是非退化临界点,在这些点 x_0 处,$\nabla F(x_0) = 0$,但是 F 在 x_0 的 Hesse 行列式 $\det|H_F(x_0)| \neq 0$. 这样的点是孤立的. 而且,它们可由一个向量空间的维数 q 来分类,在该空间上,对于 $\xi \in \mathbf{R}^q$,二次型 $F''(x_0)\xi \cdot \xi$ 是负定的,这个数 q 就称作临界点 x_0 的指数. M. Morse 的一个引理指出,如果 $x = 0$ 是某个 C^2 实值函

数 $F(x)$ 的非退化临界点,其指数为 q, 那么,在 0 点的某个邻域 U 中,必存在一个局部坐标系 $(y_1, \cdots, y_N)$, 使

$$(1.6.11)\qquad F(y)-F(0)=-\sum_{i=1}^{q} y_i^2+\sum_{i=q+1}^{N} y_i^2.$$

更一般地,若 $F(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的 C^2 实值函数,x_0 是 $F(x)$ 的任一临界点,当 $\det|H_F(x_0)|=0$ 时,称 x_0 是退化的. 如果 x_0 是 $F(x)$ 的退化的,同时又是孤立的临界点,我们可以用它的 Morse 型数,即用那些(各种指数和 x_0 等价的)非退化临界点的数目对其进行分类. 更明确些,一个实值函数 $F(x)\in C^2(\mathbb{R}^N)$ 的孤立临界点 x_0 的型数是一个正整数序列 $(m_0, m_1, \cdots)$, 其中 m_q 定义为

$$m_q=R_q(\mathring{F}^{c_0}\cap O(x_0),\ \mathring{F}^{c_0}\cap O(x_0);\mathbf{Z})$$

(即 $(\mathring{F}^{c_0}\cap O(x_0)\cup\{x_0\},\ \mathring{F}^{c_0}\cap\{x_0\})$ 相对于 $\mathbf{Z}$ 的 q 维 Betti 数). 其中 $\varepsilon>0$ 是充分小的数,$F^c=\{x|F(x)\leqslant c\}$, $O(x_0)$是 x_0 充分小的邻域. 关于这些型数,已经知道下面一些事实:

(1.6.12) 设实值函数 $F(x)\in C^2(\mathbb{R}^N)$, 那么,它的孤立临界点 x_0 的型数 $(m_0, m_1, \cdots)$ 有限,当 $q>N$ 时 $m_q=0$.

(1.6.13) 设非退化临界点的指数为 q, 则其型数为

$$m_i=\begin{cases}0, & \text{当 } i\neq q,\\ 1, & \text{当 } i=q.\end{cases}$$

(1.6.14) 设 x_0 是某个 C^2 实值泛函 $F(x)$ 的孤立临界点,则 x_0 的型数是 F 的下半连续函数. 即,如果在 x_0 的一个小邻域 U 上,G 只有非退化临界点,并且在 $C^1(U)$ 中,G 和 F 充分邻近,那么在 U 中,对于 $q=0, 1, 2, \cdots$, G 至少有 m_q 个指数为 q 的非退化临界点.

进一步,若设 $\mathfrak{M}$ 是一个紧光滑 N 维流形,那么,非退化临界点和退化临界点的概念,非退化临界点的指数以及型数的概念,都可以借助于刚才在 $\mathbb{R}^N$ 中开集上的定义用局部坐标系加以定义. 事实上,在局部微分同胚下,这些概念都是不变量.

在这样一个紧光滑流形 $\mathfrak{M}$ 上,不难证明(用 Sard 定理),那

些在 $\mathfrak{M}$ 上只有非退化临界点的实值函数族 $\{F(x)\}$ 在 $C^2(\mathfrak{M})$ 中开且稠密． 此外，对于定义在 $\mathfrak{M}$ 上的任一个这样的函数，只要 $[a, b]$ 不包含 $F(x)$ 的临界水平，集合 $\mathfrak{M}^a=\{x|F(x)\leqslant a\}$ 就是集合 $\mathfrak{M}^b=\{x|F(x)\leqslant b\}$ 的形变收缩核． 另一方面，如果 $F^{-1}[a, b]$ 包含单个指数为 q 的临界点，那么，$\mathfrak{M}^b\approx\mathfrak{M}^a\cup E^q$，即 $\mathfrak{M}^b$ 同胚于 $\mathfrak{M}^a$ 和 q 维胞腔 E^q 的不交的并。

最后，我们指出一个既有趣又有用的公式，它说明函数 F 的 Morse 指数和映射 f 在 σ_ε 上的 Brouwer 度之间的关系，其中 F 是定义在 x_0 的小邻域上 C^2 实值函数，$x_0\in\mathbb{R}^N$ 是其孤立临界点，$f=\operatorname{grad}F$，σ_ε 是一个中心在 x_0 的充分小的球．在 $\partial\sigma_\varepsilon$ 上的相当一般的边界条件下，如果 $M_F(x_0)=(m_0, m_1, m_2,\cdots, m_N)$，那么下面的公式成立：

$$d(f, x_0, \sigma_\varepsilon)=\sum_{i=0}^{N}(-1)^i m_i. \tag{1.6.15}$$

注　　记

A. 关于研究分析中非线性问题的系统方法的历史说明

随着微积分学的出现，分析中的非线性问题自然产生．在十七、十八世纪的数学文献中，充满各种直接的和巧妙的解法，这些工作导致 Euler 和 Lagrange 去考虑变分学的一般理论． 此外，由于试图把 Newton 的待定系数法建立在一个严格的基础上，Cauchy 最后被导向解析的非线性问题的强函数法．时至今日，这个证法仍然得到广泛的应用．在研究实数域上的联立代数方程组或超越方程组的解时，Cauchy 还系统地应用了极小化方法(最速下降法)．

进一步，由1870年的论文开始，Poincaré 给我们的学科开创了一个新的方向．他致力于非线性问题定性方面的研究，揭示了数学研究一系列全新的课题． 由对物理学和几何学的系统研究所推动，Poincaré 在如此众多的领域中，如分歧理论（Poincaré 自己创造的术语），大范围变分学，拓扑方法在研究常微分方程组周期解中的应用，都引进了新的概念．我们这里提到的还仅仅是一部分．

Hilbert 在 1900 年国际大会上的著名演讲包含了一系列引人入胜的分析中的非线性问题，特别刺激了对非线性椭圆型偏微分方程的研究．对于发

展到更抽象的水平说来,后一个课题是决定性的. 特别,由 S. Bernstein 在20世纪前期所得到的,关于 Hilbert 提出的非线性椭圆型偏微分方程的结果是非常一般的,它为以后的抽象化和推广提供了基础.

较早时候的 Picard 把逐次逼近的思想引入非线性分析,这个思想是 Cauchy 强函数法的自然延伸.随后,S. Banach 在1920年的论文中,又把它推广成压缩映射原理. 这篇文章标志着非线性泛函分析的诞生. 这个时期其它重大结果有 E. Schmidt 关于非线性积分方程的工作,以及 Liapunov 关于平衡旋转形状的分歧现象的研究.

在非线性分析的发展过程中,"函数空间的不变点"是一篇关键性的论文,它是由 Birkhoff 和 Kellogy 在1922年发表的. 这篇文章激起了对无穷维空间中不动点定理的许多研究,以及代数拓扑到分析的其它延伸. 最深刻的工作属于 J. Schauder,他把他的一般结果系统地应用于非线性椭圆型偏微分方程的问题. 1934年,当由 Leray 和 Schauder 合写的"*Topologie et equations fonctionelles*"发表时,这个发展达到了高潮. 请参看 Caccio poli (1931).

在非线性问题的早期研究中,作为最后一个关键性的进展,我们提到大范围变分学上的推进,它是由 Marston Morse 在1922年开始,以及稍后的 Linsternik 和 Schnirelman 等人作出的.

第二次世界大战实际上毁灭了波兰的泛函分析学校,由 Banach 和 Schauder 计划的分析中非线性问题的书没能出版.

B. 数学经济学中的非线性问题

作为经济学中非线性问题的典型例子,我们提出在消费行为理论中出现的可积性问题. 假定经验的情形已知,它由顾客和需求函数组成,这些顾客有固定的收入 M,作用于 $n+1$ 维商品空间,其中每种商品按照指定价格 p_j 出售(假定 p_j 严格正),需求函数为

$$x_j = f_j(p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}, M) \quad (j = 1, 2, \cdots, n+1);$$

这些函数唯一确定第 i 种商品的数量,而这第 i 种商品以 x_j 作为价格和收入的函数. 可积性问题在于决定函数 f_j 应满足的条件,这些条件保证消费者以这样的方式行动: 使预算限制下的"效用函数"达到极大. 于是,这个问题是"变分学中逆问题"的一个简单例子. 此外,在适当的规范化和化简后,可以通过解下面的非线性偏微分方程来研究这个问题,

$$\frac{\partial M}{\partial p_j} = f_j(p_1, p_2, \cdots, p_{n+1}, M) \qquad (j = 1, \cdots, n+1), \; M(p_0) = M_0.$$

当假定这些需求函数 Lipschitz 连续但不可微时(数学经济学中很有用的一种情形),问题特别有意义.关于在这个领域内有趣的历史以及现代发展的进

一步讨论，有兴趣的读者可看"选择、费用和需求"一书，它是由 L. Hurwicz, J. Chipman 等人编辑的，还可见 Beger 和 Meyers (1971) 在该卷中的文章。

C. 维量分析和积分不等式

在 1.4 节中有很多积分不等式，它们涉及 L_p 范数和 Sobolev 范数，式中的绝对常数都和相应的区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 无关．为得到这种情形的其它信息，一种称作维量分析的简单方法是有用的．这个方法指出，如果一个不等式对给定的函数 $u(x)$ 成立，那么，它对 $u(cx)$ 也成立，其中 c 是常数，可取任何正值．例如，设范数不等式

$$\|u\|_{L_p(\Omega)}\leqslant K\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)},\quad u\in \mathring{W}_{1,2}(\Omega)$$

成立，其中 K 是与 Ω 的大小无关的绝对常数，p 是待定正数．感兴趣的读者不难用维量分析证明，使这个不等式成立的唯一值是 $p=2n/(n-2)$，这个结果和(1.4.5)一致．

D. 无界域时的加权范数和 Kondrachov 紧性定理

对于一般的无界区域(例如 $\mathbb{R}^N$)，Kondrachov 紧性定理(1.4.7)失效．如在课文中提到的，对于很多有意义的非线性问题来说，缺少紧性是一个严重的问题．于是，指出下面这点是很有意义的：只要在 Sobolev 范数中适当地加权(它在无穷远处衰减)，Kondrachov 紧性定理就可以被推广到一般的无界区域．作为一个简单的例子，我们指出下面的结果(在后面第六章可看到这个结果是有用的)：设 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意区域，如果函数列 $\{u_k\}$ 按 $W_{m,p}(\Omega)$ 范数一致有界，那么，只要 $q\geqslant p>1$，$\{u_k/|x|^\alpha\}$ 在 $L_q(\Omega)$ 中就没有收敛子列，其中 α 满足 $(\alpha-n)/q<(s-n)/q$，而 m,p,q 则如 Kondrachov 定理中所述．至于这个方向进一步的结果，建议读者去读参考文献中 Beger 和 Schechter 的文章(1972)．

E. Korteweg-Devries 方程

有趣的 Korteweg-Devries 方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2$$

最先在水波的近似理论中出现，它有形若 $u(x,t)=S(x-ct)$ 的行进波解，其中 c 是正数，$s(x)=3c\operatorname{sech}^2(x\sqrt{c}/2)$．它称作"孤波"或"孤子"．此外已观察到，这个方程的任何一个解，只要当 $|x|\to\infty$ 时它衰减为 0，那么在 $|t|\to\infty$ 时，就可以用有限个孤波的叠加来渐近逼近．这个方程也有一个无限的运动的积分，在某种意义下它是"可积的"．进一步的讨论可看 Lax (1968)，Zakharov 和 Faddeev (1971) 的文章．

F. 文献介绍

1.1 节：在下列文章中，可以找到用定性非线性分析研究流形上闭测地线的早期工作：Poincaré (1905)，Birkhoff(1927) 以及 Morse(1934). Poincaré 猜想在卵形面上至少有三条闭的简单测地线. 这刺激了对非线性问题的许多深入的研究，这些工作是由 Lusternik 和 Schnirelman(1930) 开始的.

关于 Plateau 问题的历史读者可以看 Courant(1950)，这个问题在高维时的推广是近年来一个卓越的成果. 如同在 Federer(1969) 中一样，它要求研究几何测度理论. 不过这个课题已经超出本书的范围(看 Nitsche, 1974).

通过非线性偏微分方程把代数曲线单值化的问题，如同这里所讲的，是 Poincaré(1890) 讨论的(参看 Berger, 1969). 在 Kazdan 和 Warner 的工作 (1974) 中，对方程 (1.1.6) 有一个很好的讨论，它与指定的 Gauss 曲率的保角尺度有关. Yamabe 的文章 (1960) 大大地推动了对一些存在性问题的现代研究，其中包括具指定曲率性质的尺度的存在性以及非线性偏微分方程光滑解的存在性.

在 Nirenberg (1964) 中谈到了一些与高维复流形上复结构的形变问题有关的非线性问题.

在 von Kármán (1940) 中对经典数学物理中的非线性问题作了很好的综述. 值得注意的是，对这些非线性问题的抽象结构已经有一点研究. 与这个问题有关的进一步参考文献，我们推荐下面的近代的书：Szebehely (1967) 关于天体力学，Volmir(1967) 关于非线性板壳，以及 Batchelor (1967) 关于流体力学的著作. 在最后一本书中有很多涡度环的吸引人的图画.

遗憾的是，现代数学物理的文献是如此纷繁，很难对所出现的非线性现象作出统一的讨论. 我们关于 (1.1.21) 的讨论基于 Wightman (1974). Einstein 的专著(1955)清楚地指出，对于相对论来说，在找寻非线性偏微分方程的奇性自由解时新方法是何等的重要. 在 Titza(1960)，Landau (1937) 和 Brout(1967) 中可以找到对相位跃迁的有趣的讨论.

1.2节：在 Heissenberg(1967) 中，对非线性系统的内在性质进行了很好的讨论. 关于湍流和非线性系统对参数的临界相依性之间的关系可以看 Laudan (1944)以及 Ruelle-Takens(1933) 的工作. 在 von Neumann(1957) 中，可以找到有关维数和非线性增长的有趣的评论.

历史地说，已经证明用线性问题中发展起来的方法去研究非线性问题是非固有困难的主要来源. 例如，可以像 Liapunow 在 1892 年所做的那样，用强函数法研究在非线性 Hamilton 扰动下(如由方程(1.2.15)所定义的)正规方式的保留问题，但是所得的结果比较弱. 较深入的研究要求把分析的和拓扑的技巧结合起来，正如同 Berger (1970) 和 Weinstein (1974) 所作的那

样.

1.3 节: 这节所讨论的材料是比较标准的，要看证明可以参考下面的节: Smirnov(1964), Riesz 和 Nagy(1952), Schechter(1971), Dunford 和 Schwartz (1958, 1963) 以及 Yosida(1965).

1.4节: Sobolev 定理最初是由 Sobolev(1938) 证明的,它的改进(1.4.1)属于 Nirenberg(1959) 和 Trudinger(1967). 这一节很多材料的证明，包括 Calderon 延拓定理,都可在 Agmon(1965) 中找到.

1.5 节: 在 Sobolev(1950) 的书中，读者可以找到对椭圆边值问题弱解的基本的、材料丰富的讨论. 相当时期以来，已经知道利用靴襻过程可以得到半线性椭圆型边值问题解的正则性. 式中的结果(1.5.7)是 Berger(1965) 得到的.

1.6节: 这里所讨论的微分拓扑基本结果的证明可以在 Milnor(1963, 1965) 中找到. 至于代数拓扑的结果,读者可以参考 Spanier(1966), Hilton(1953) 或 Wallace(1970) 的书. 在 Morse(1934)、Seifert 和 Threlfall(1938), Milnor(1963) 以及 Pitcher(1958) 中,都有对有限维时的 Morse 理论以及 Morse 型数的很好的讨论.

第二章 非线性算子

这一章分为七节，在前两节我们发展处理抽象非线性算子的微积分，并指出怎样把具体给出的算子用抽象的方式表达出来．后面五节给出一些特殊类型非线性算子的定义，并研究它们的性质．这些算子在今后都很有用．在定义这些算子时，经常用到两个关键的思想：第一，用 Fréchet 导数(即线性化)定义一类光滑的非线性算子；第二，由推广有限维空间之间映射的概念来定义一个算子类．

2.1 微积分初步

对无穷维空间之间的映射来说，初等微积分的很多结果同样适用，我们现在来考察这个重要的事实．规定记号如下：X 和 Y 记 Banach 空间，f 表示从 X 到 Y 的一个已知映射，记作 $f\in M(X,Y)$．我们讨论今后需要用到的 f 的如下性质：有界性、连续性(对各种类型收敛)、可积性、可微性和光滑性．

2.1A 有界性和连续性

称映射 $f\in M(X,Y)$ 连续(对依范数收敛)，如果由 X 中 $x_n\to x$ 总能推出在 Y 中 $f(x_n)\to f(x)$．f 称作有界，如果它映有界集成有界集．f 称作局部有界，如果 f 定义域中的每一点都有有界邻域 N，使 $f(N)$ 有界．当 f 线性时，连续性和有界性两个概念等价，但对一般映射来说，这个结论是不对的．

因为从有限维 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的连续映射必然有界，自然希望把这个结果推广到无穷维空间去．为此，我们引进映射 f 一致连续的概念．

(2.1.1) 如果为每个 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得从 $\|x-y\|<\delta$

就可推出 $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$，则称 f 一致连续．显然，一致连续映射是连续映射．我们还有

(2.1.2) 一致连续映射有界

证明：只需证 f 映任意球 $S_r=\{x \mid \|x\|\leqslant r\}$ 成有界集即可．对任 $\varepsilon>0$，由 f 的一致连续性，存在 $\delta>0$，对一切 $x, y\in S_r$，只要 $\|x-y\|<\delta$ 就有 $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$．

选取满足 $n\delta>2r$ 的任意正整数 n，那么，如果 $a, b\in S_r$，就可找 n 个点 $x_i\in S_r$，$x_0=a$，$x_{n-1}=b$，且 $\|x_i-x_{i-1}\|<\delta$，因而

$$\|f(a)-f(b)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}\|f(x_i)-f(x_{i-1})\|<(n-1)\varepsilon.$$

这个数与 a，b 无关，由此推出结论成立．

除了对依范数收敛的连续性以外，对一般 Banach 空间 X，Y 间的映射 f 来说，还有三种不同的、重要的(序列)连续性概念．当 X 和 Y 分别取弱或强拓扑时，考察 $f: X\to Y$ 的不同作用，就可得出这些不同的定义．即是：一个映射 $f\in M(X, Y)$ 可以 (i) 映 X 中强收敛序列成 Y 中弱收敛序列；(ii) 映 X 中弱收敛序列成 Y 中弱收敛序列；(iii) 映 X 中弱收敛序列成 Y 中强收敛序列．最后一种连续性 (iii) 称作**全连续性**，因为它能推出其余两种连续性．性质 (ii) 称作半连续性．当没有假定映射 f 具有一致连续性，而又要证明 f 的有界性时，连续性的这些不同概念有时是有用的．事实上，我们有

(2.1.3) 设 X 是自反 Banach 空间，$f\in M(X, Y)$，如 f 映 X 中弱收敛序列成 Y 中弱收敛序列，则 f 有界．

证明：我们用反证法证明．设 $\{x_n\}$ 是 X 中有界序列，但 $\|f(x_n)\|\to\infty$．根据 X 的自反性，$\{x_n\}$ 有弱收敛子序列(譬如说 $\{x_{n_j}\}$)．由假设，$\{f(x_{n_j})\}$ 弱收敛；由 (1.3.11)，$\{f(x_{n_j})\}$ 一致有界，这与 $\|f(x_n)\|\to\infty$ 矛盾．

今后把 Banach 空间 X 和 Y 之间连续映射的全体记作 $C(X, Y)$．

2.1B 积　　分

在 Banach 空间取值的函数的可积性可以借助于相应的一维

积分来定义。设 $x(t)$ 是定义在测度空间 $(T, \mu, \sigma(T))$ 上，取值于 Banach 空间 X 的函数，那么 $x(t)$ 的积分可根据对偶性定义如下：

定义 如果对 σ 环 $\sigma(T)$ 中每个元素 E 都有 $I_E(x) \in X$，使对每个 $x^* \in X^*$，都有

(2.1.4) $$x^*(I_E(x)) = \int_E x^*(x(t))d\mu, \qquad \text{（在 Lebesgue 意义下）}$$

则称 $x(t)$ 可积，并记 $\int_E x(t)d\mu = I_E(x)$.

显然，这样定义的算子 $I_E(x)$ 是线性算子.

Hahn-Banach 定理保证了 $\int_E x(x)d\mu$ 唯一确定，并且有

(2.1.5) $$\left\|\int_E x(t)d\mu\right\| \leqslant \int_E \|x(t)\|d\mu.$$

于是，如果算子 $I_E(x) = \int_E x(t)d\mu$ 映 X 入 X^{**}，且和通常 $X \to X^{**}$ 的嵌入算子恒等，则 $x(t)$ 是 μ 可积的. 要严格确定哪些函数在这种定义下可积是很困难的. 因为，即使对每个 x^*，$x^*(x(t))$ 都可测且可积，一般地说，也只能得出 $I_E(x) \in X^{**}$. 当 X 是自反空间时，情况较好，一般说来，我们有

(2.1.6) **定理** 设 $M = (T, \mu, \sigma(T))$ 是测度空间，$x(t)$ 是定义在 M 上，取值于 Banach 空间 X 的可测函数（指在如下意义可测：它是 M 中阶梯函数或是阶梯函数序列依范数收敛的 μ-a. e. 极限），那么，如果 $\|x(t)\|$ μ 可积，则 $x(t)$ μ 可积.

证明： 首先，我们对函数取可数个值的情形进行证明. 对 $k = 1, 2, \cdots$，设在 μ 可测集 E_K 上，$x(t) = x_k$，且 $\int_E \|x(t)\|d\mu < \infty$.

令 $I_E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mu(E_k \cap E)$，因为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|\mu(E_k \cap E) = \int_E \|x(t)\|d\mu < \infty,$$

所以前一级数绝对收敛. 因而对任意 $x^* \in X^*$，

$$x^*(I_E(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} x^*(x_k)\mu(E_k \cap E) = \int_E x^*(x(t))d\mu.$$

于是在这种情形，$I_E(x) \in X$ 且 $I_E(x) = \int_E x(t)d\mu$.

现在设 $x(t)$ 是在 X 中取值的任意可测函数，那么由定义，有取可数个值的函数的序列 $\{x_N(t)\}$ 使

(*) $$\|x_N(t) - x(t)\| \to 0 \quad \text{a. e.}$$

暂时假定

(**) $$\int_E \|x_N(t) - x(t)\| d\mu \to 0.$$

显然 $\|x(t) - x_m(t)\|$ 可测；因为对取可数个值的函数 $x(t)$ 来说，$I_E(x)$ 是线性函数，所以

$$\left\|\int_E x_N(t)d\mu - \int_E x_m(t)d\mu\right\| \leqslant \int_E \|x_N(t) - x_m(t)\| d\mu$$

$$\leqslant \int_E \|x_N(t) - x(t)\| d\mu + \int_E \|x_m(t) - x(t)\| d\mu \to 0.$$

于是 $I_E(x) = \left\{\int_E x_N(t)d\mu\right\}$ 是 X 中 Cauchy 序列. 这个序列有极限 $\bar{X}_E$，我们就把它定义为 $I_E(x)$. 显然 $I_E(x) \in X$，并且它和满足上面 (*) 和 (**) 的逼近序列 $\{X_N\}$ 的选取无关. 现在对任意 $x^* \in X^*$[1]，$(x^*, x_N(t)) \to (x^*, x(t))$ μ-a. e. 还有

$$\int_E |(x^*, x_N(t)) - (x^*, x(t))| d\mu$$

$$\leqslant \|x^*\| \int_E \|x_N(t) - x(t)\| d\mu \to 0.$$

于是

$$\int_E (x^*, x(t))d\mu = \lim_{N\to\infty} \int_E (x^*, x_N)d\mu$$

$$= \lim_{N\to\infty} (x^*, I_E(x_N)) = (x^*, I_E(x)),$$

从而 $x(t)$ 可积.

最后，当 $\int_E \|x(t)\| d\mu < \infty$ 时，我们构造满足(*)和(**)的一个逼近序列 $x_N(t)$. 因为 $x(t)$ 是阶梯函数的极限，在 X 中就有可数序列 $\zeta_1, \zeta_2, \cdots$，在 $x(t)$ 的值域中稠密. 当 k 是满足 $|x(t) - \zeta_k| < 1/N$ 的最小整数时，令 $W_N(t) = \zeta_k$. 函数 $W_N(t)$ 可测，且对所有的 t，$W_N(t) \to x(t)$. 而且，因为连续函数和可测函数的复合函数仍然可测，所以 $\|W_N(t)\|$ 和 $\|x(t)\|$ 是实

---

1) 在本章中，记号 (x^*, y) 和 $x^*(y)$ 均表示 X 上有界线性泛函——原注.

值可测函数. 于是有简单函数列 $g_N(x(t))$ 使 $0\leqslant g_N(x(t))\leqslant\|x(t)\|$ 和 $g_N(t)\to\|x(t)\|$. 对 $W_N(t)\neq 0$, 令 $x_N(t)=(g_N(t)/\|W_N(t)\|)W_N(t)$, 对其余, 令 $x_N(t)=0$. 那么 $x_N(t)$ 是取可数个值的函数, 显然可测, 而且 $\|x_N(t)\|\leqslant\|x(t)\|$ 和 $x_N(t)\to x(t)$. 因为 $\|x(t)\|$ 可积, $\|x_N(t)\|$ 可积, $\|x(t)-x_N(t)\|\leqslant 2\|x(t)\|$ 也就可积, 从而由 Lebesgue 控制收敛定理, $\int_E\|x_N(t)-x(t)\|d\mu\to 0$. 因而 $\{x_N(t)\}$ 是所求的满足 (*) 和 (**) 的序列.

(2.1.7) 推论 设 $x(t)$ 是 $[a,b]\to X$ 的连续函数, 那么 $x(t)$ 可积, 且(和通常一样)

$$\int_a^b x(t)dt=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}x(t_n^*)\{t_{n+1}-t_n\},\ \text{当}\ |t_{n+1}-t_n|\to 0\ \text{时};$$

其中 $t_n^*\in[t_n,t_{n+1}]$.

证明: 函数 $x(t)$ 在 $[a,b]$上一致连续, 因而阶梯函数在连续函数 Banach 空间 $C([a,b])$ 中稠密.

关于与积分有关的进一步结果建议读者参看 Gross (1964).

2.1C 微 分

算子 $f\in M(X,Y)$ 在一点的微分的概念主要有下面两种, 定义如下:

定义 $f\in M(X,Y)$ 在 x_0 点 Fréchet 可微是指存在一个线性算子 $A\in L(X,Y)$, 使得在 x_0 的邻域 U 中

$$\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|=o(\|x-x_0\|).$$

这时, 我们记 $A=f'(x_0)$, 并称 $f'(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 的 Fréchet 导算子. 如果 $X\to L(X,Y)$ 的映射 $x\to f'(x)$ 在 x_0 点连续, 则称 f 在 x_0 点 C^1.

定义 $f\in M(X,Y)$ 在 x_0 点 Gateaux 可微, 是指存在一个算子 $df(x_0,h)\in M(X\times X,Y)$ 和 x_0 的某个邻域 U, 使得对一切 $x_0+th\in U$, 都有

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\|f(x_0+th)-f(x_0)-tdf(x_0,h)\|=0.$$

$df(x_0, h)$ 称作 f 在 x_0 点的 Gateaux 导算子． 我们记 $\frac{d}{dt} f(x_0+th)|_{t=0} = df(x_0, h)$。

下面的性质是显然的：

(2.1.8) Fréchet 和 Gateaux 导算子唯一。

(2.1.9) 对任意数 β，$df(x_0, \beta h) = \beta df(x_0, h)$。

(2.1.10) Gateaux 导算子和有界线性泛函可换．即如果 $y^* \in Y^*$，$f \in M(X, Y)$ 在 x_0 点 Gateaux 可微，那么

$$\frac{d}{dt}(y^*, f(x_0+th))|_{t=0} = (y^*, df(x_0, h)).$$

(2.1.11) 如果 f 在 $x_0+th(0 \leqslant t \leqslant 1)$ Gateaux 可微，那么

$$f(x_0+th) - f(x_0) = \int_0^1 df(x_0+th, h)dt.$$

事实上，由 (2.1.10)

$$\int_0^1 \frac{d}{dt}(y^*, f(x_0+th))dt = \int_0^1 (y^*, df(x_0+th, h))dt.$$

由积分定义

$$(y^*. f(x_0+th) - f(x_0)) = \left(y^*, \int_0^1 df(x_0+th, h)\right),$$

因为 $y^* \in Y^*$ 任意，就得出结论．

有兴趣的读者不难证明如下的结论：

(2.1.12) 映射 $f \in M(X, Y)$ 的 Fréchet 可微性及其导算子与 X 和 Y 的等价范数无关．

下面的定理给出了 Gateaux 可微性和 Fréchet 可微性的关系．

(2.1.13) **定理** 如 $f \in M(X, Y)$ 在 x_0 点 Fréchet 可微，那么它在 x_0 点 Gateaux 可微．反之，如 f 在 x_0 点 Gateaux 可微，$df(x_0, h)$ 对 h 线性，即 $df(x_0, \cdot) \in L(X, Y)$，且作为 $X \to L(X, Y)$ 的映射连续，那么 f 在 x_0 点 Fréchet 可微．无论哪种情形，我们都有

$$f'(x_0)y = df(x_0, y).$$

证明：由定义直接推出，Fréchet 可微必 Gateaux 可微．为

证明反过来的结论，首先我们指出，根据假设条件和上面的(2.1.9)，可以写 $df(x,h)=df(x)h$，其中 $df(x)\in L(X,Y)$ 和 $\|df(x,h)\|\leqslant\|df(x)\|\|h\|$。利用上面的(2.1.11)，

$$
\begin{aligned}
&\|f(x+h)-f(x)-df(x)h\| \\
\leqslant &\left\|\int_0^1\{df(x+th,h)-df(x,h)\}dt\right\| \\
\leqslant &\int_0^1\|(df(x+th)-df(x),h)\|dt \\
\leqslant &\int_0^1\|df(x+th)-df(x)\|\|h\|dt=o(\|h\|).
\end{aligned}
$$

(2.1.14) 若映射 f 的 Fréchet 导算子一致有界，则 f 一致连续，从而连续、有界.

Fréchet 微分法则与有限维情形类似.

(2.1.15) **链锁法则** 设 X,Y,Z 是 Banach 空间，$U\subset X$，$V\subset Y$ 是开集，那么，如果 $f\in M(U,Y)$，$g\in M(V,Z)$，且 $f^{-1}(V)\subset U$，则 $[gf(x)]'=g'(f(x))\cdot f'(x)$.

(2.1.16) **乘积法则** 设 $U\subset X$ 是开集，$f\in M(U,\mathbf{R}^1)$，$g\in M(U,Y)$ 均可微，那么 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 可微，且

$$h'(x)y=f'(x)y\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)y.$$

(2.1.17) 设 U 是 X 的开集，$f:U\to Y$，其中 Y 是积空间 $Y=\prod_{i=1}^{N}Y_i$，那么，如果 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_N)$，其中 $f_i:U\to Y_i$ 可微，则 f 可微，且

$$f'(x)=(f_1'(x),f_2'(x),\cdots,f_N'(x)).$$

(2.1.15) 的证明： 设 $f(x+y)=f(x)+f'(x)y+o(\|y\|)$，那么

$$
\begin{aligned}
gf(x+y)&=g(f(x)+f'(x)y+o(\|y\|)) \\
&=g(f(x))+g'(f(x))[f'(x)y+o(\|y\|)]+o(\|y\|) \\
&=gf(x)+g'(f(x))\cdot f'(x)y+o(\|y\|).
\end{aligned}
$$

(2.1.16) 的证明： 设 f 和 g 展成

$$f(x+y)=f(x)+f'(x)y+o(\|y\|)$$

的形式，那么

$$f(x+y)g(x+y)=f(x)g(x)+[f'(x)y]g(x)$$

$$+ [f(x)]g'(x)y + o(\|y\|).$$

(2.1.17) 的证明是显然的,和有限维的情形完全相同。

当 $U = \prod_{i=1}^{N} U_i$, 其中 U_i 是 Banach 空间 X_i 的开子集时,不难定义映射 $f \in C^1(U, Y)$ 的偏导算子. 事实上,如果 $x=(x_1, \cdots, x_N) \in U$, 其中 $x_i \in U_i$, f 对 x_i 的 (Fréchet) 偏导算子 $D_i f(x)$ 可由

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_i + h, \cdots, x_N) - f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N)$$
$$= \beta(h) + o(\|h\|)$$

来定义, 其中 $\beta(h) \in L(X_i, Y)$. 当这个展式成立时, 规定 $D_i f(x)h = \beta(h)$. 显然,如果 $D_i f(x)$ 存在,则 $D_i f(x) \in L(X_i, Y)$. 此外,和通常的微积分教科书一样,我们可以证明,如果 $D_i f(x) \in L(X_i, Y)$, 则

(2.1.18) $$f'(x)h = \sum_{i=1}^{N} D_i f(x) h_i.$$

Fréchet 微分有如下类似于初等微积分中值定理的结论。

(2.1.19) **定理** 设 $f \in M([a, b], X)$ 是 Fréchet 可微映射, 对一切 $t \in [a, b]$, $\|f'(t)\| \leqslant \zeta'(t)$, 那么

(2.1.20) $$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \zeta(b) - \zeta(a).$$

(2.1.21) $$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{\xi \in [a,b]} \|f'(\xi)\| |b - a|.$$

证明: 显然,对任 $x^* \in X^*$, 实值函数 $(x^*, f(t))$ 可微,根据 (2.1.11),

$$(x^*, f(b) - f(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}(x^*, f(t))dt = \int_a^b (x^*, f'(t))dt.$$

如果把 x^* 取作这样的线性泛函: 范数为 1 且

$$(x^*, f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|,$$

我们就可求得

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\| dt \leqslant \zeta(b) - \zeta(a).$$

同时也有 (2.1.21) 成立。

2.1D 多重线性算子

有界性、连续性和可微性之间的关系,可以用多重线性算子为

例作一说明．算子 $f\in M(X,Y)$ 称作多重线性算子，是指 $X=\prod_{i=1}^{N}X_i$，且对任一元素 $x=(x_1,\cdots,x_N)$ 和每个整数 $k=1,2,\cdots,N$，当其余变元固定时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 是 x_k 的线性算子．

显然，一切多重线性映射都是 Gateaux 可微的．事实上，我们有

(2.1.22) 设 $X=\prod_{i=1}^{N}X_i$ 和 Y 是 Banach 空间，如果 $f\in M(X,Y)$ 是多重线性算子，则如下事实等价

(i) f 在每点 $x\in X$ 连续；

(ii) f 在 $x=0$ 点连续；

(iii) f 有界，存在绝对常数 $K\geqslant 0$，使

(2.1.23) $\|f(x_1,x_2,\cdots,x_N)\|\leqslant K\|x_1\|_{X_1}\|x_2\|_{X_2}\cdots\|x_N\|_{X_N}$.

(iv) f Fréchet 可微．

证明： 我们只证 (ii)$\Longrightarrow$(iii) 和 (iii)$\Longrightarrow$(iv)，因为其余是显然的．

(ii)$\Longrightarrow$(iii)：如 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，那么有某个球 $\sigma_\delta=\{x|\|x\|\leqslant\delta\}$，在球上 $\|f(x)\|\leqslant 1$．因为 $f(kx)=k^Nf(x)$，所以在以 $x=0$ 为心的每个球上 f 有界，故 f 是有界算子．令 $|||f|||=\sup\|f(x)\|$，这里上确界是在单位球 Σ_1 上取的，$|||f|||<\infty$．不失一般性，我们可假设 $\|x\|=\sup\limits_i\|x_i\|_{X_i}$，对 X 上这样选取的范数，我们来证明 (2.1.23)，其中 $K=|||f|||$．如果某个 $x_i=0$，则不等式是显然的，故我们可以设 $x_i\neq 0(i=1,2,\cdots,N)$．在这种情形，令 $y_i=x_i/\|x_i\|(i=1,2,\cdots,N)$，$\sup\|f(y_1,y_2,\cdots,y_N)\|\leqslant|||f|||$，于是 (2.1.23) 成立，其中 $K=|||f|||$．

(iii)$\Longrightarrow$(iv)：简单的计算指出，在 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 点的 Gateaux 导算子由公式

$$(\dagger)\qquad df(x,h)=\sum_j f(x_1,\cdots,x_{j-1},h_j,x_{j+1},\cdots,x_N)$$

给出，其中 $h=(h_1,h_2,\cdots,h_N)$．显然 $df(x,h)$ 对 h 线性．如能证得 (a) $\|df(x,h)\|\leqslant c\|h\|$ 和 (b) $f'(x)h=df(x,h)$，由 (2.1.23) 就可得到 (iv)，设 $\|x_i\|\leqslant M(i=1,2,\cdots,N)$，据 (iii)，直接从 $(\dagger)$ 推出 (a)，再规定 $f'(x)h=df(x,h)$，经过简短计算，由 (2.1.23) 求出

$$\|f(x+h)-f(x)-f'(x)h\|=o(\|h\|).$$

于是 f Fréchet 可微．

说明： 把 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_N\to Y$ 的连续多重线性算

子 f 的全体记作 $L(X_1, X_2, \cdots, X_N; Y)$. 如取范数 $|||f||| = \sup\{\|f(x_1, \cdots, x_N)\|/\|x_1\|\cdot\|x_2\|\cdots\|x_N\|\}$，由 (2.1.23)，$L(X_1, X_2, \cdots, X_N; Y)$ 是 Banach 空间. 如果 $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$，我们把这个空间记作 $L_N(X, Y)$.

这方面一个有用的结果是：

(2.1.24) 引理 Banach 空间 $L(X_1, X_2; Y)$ 和 $L(X_1, L(X_2, Y))$ 线性等距.

证明： 我们定义两个互逆的有界线性映射 ζ_1 和 ζ_2，其中 $\zeta_1: L(X_1, X_2; Y) \to L(X_1; L(X_2, Y))$. 为定义 ζ_1，对 $f(x_1, x_2) \in L(X_1, X_2; Y)$，把 x_1 看作参数，$f(x_1, x_2)$ 就是 $L(X_2, Y)$ 中的有界线性映射，记为 g. 再令 $\zeta_1(f) = g$. 显然，当把它看作 $L(X_1, X_2; Y) \to L(X_1; L(X_2, Y))$ 的映射时，ζ_1 线性，有界，其范数不超过 1. 为定义 ζ_2，设 $g \in L(X_1; L(X_2, Y))$，那么 $g(x_1)x_2 = f(x_1, x_2)$ 是 x_1, x_2 的双线性映射，且在 Y 中取值. 令 $\zeta_2(g) = f$，因为 $\zeta_2 = \zeta_1^{-1}$ 映 $L(X_1; L(X_2, Y)) \to L(X_1, X_2; Y)$，就得到所要证的结果.

一个多重线性型 $f(h_1, h_2, \cdots, h_N) \in L_N(X, Y)$ 称作对称的，如果在交换指标 $(1, 2, \cdots, N)$ 和 $\sigma(1, 2, \cdots, N)$ 时其值不变. 任一多重线性型 $f(h_1, h_2, \cdots, h_N) \in L_N(X, Y)$ 都对应着 $L_N(X, Y)$ 中一个对称多重线性型：

(2.1.25) $$\operatorname{Sym} f(h_1, \cdots, h_N) = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma(i_1, \cdots, i_N)} f(h_{i_1}, h_{i_2}, \cdots, h_{i_N}).$$

当且仅当 f 对称时，$\operatorname{Sym} f = f$. 此外，对任意对称型 $f(h_1, \cdots, h_N) \in L_N(X, Y)$，其极型 $f(h) = f(h, \cdots, h)$ 有如下性质：$f\left(\sum_{j=1}^{N} t_j h_j\right)$ 可按多项式定理展开. 于是，我们可以根据恒等式

(2.1.26) $$f(h_1, \cdots, h_N) = \frac{1}{N!} \frac{\partial^N}{\partial t_1 \cdots \partial t_N} f\left(\sum_{i=1}^{N} t_i h_i\right)\bigg|_{t_1 = t_2 = \cdots = t_N = 0}$$

的配极变换求出 $f(h_1, \cdots, h_N)$. 于是，如果两个对称多重线性型 $f(h_1, \cdots, h_N)$ 和 $g(h_1, \cdots, h_N)$ 的极型相等，那么这两个多重线性型必相等：$f(h_1, \cdots, h_N) = g(h_1, \cdots, h_N)$.

2.1E 高阶导数

设 $f \in M(U, Y)$ 是 Fréchet 可微算子，且 $f' \in \{U \to L(X, Y)\}$

又在 x 点 Fréchet 可微，则称 f 在 x 两次 Fréchet 可微．由 (2.1.24)，$f'(x)$ 的导算子 $f''(x)\in L(X, L(X, Y))=L_2(X, Y)$．而且，如果 (a) 对每点 $x\in U$，f 两次 Fréchet 可微，(b) $f''(x)$: $U\to L(X, X; Y)$ 连续，则称 $f\in C^2(U, Y)$．如 f 两次 Fréchet 可微，则二阶导算子 $f''(x)$ 唯一．下面还要证 $f''(x)$ 对称，即 $f''(x)\ (h_1, h_2)=f''(x)(h_2, h_1)$．我们可以归纳定义 N 阶导算子为如下 N 线性型：如果算子 $f^{(N-1)}(x)$ 在 x 可微（Fréchet 意义下），则称 $f(x)$ N 次可微，$f^{(N-1)}(x)$ 的导算子 $f^{(N)}(x)\in L(X, L(X^{N-1}, Y))=L_N(X, Y)$，并可看作一个 N 阶多重线性算子．此外，如果 (i) 对每点 $x\in U\subset X$，f 在上面的意义下是 N 次可微的；(ii) 作为 x 的函数，$f^{(N)}(x): U\to L_N(X, Y)$ 连续，则 $f\in C^N(X, Y)$．又如果 $f^{(N)}(x)$ 存在，则必唯一．我们还要证明 $f^{(N)}(x)$ 是对称 N 线性型．

显然，如果在上面的定义中换成 Gateaux 可微性，则可定义高阶 Gateaux 导算子 $d^N f(x, h)$．实际上

$$
\begin{aligned}
d^2 f(X, h_1, h_2) &= d(df(x, h_1), h_2)\\
&= \frac{d}{dt}\, df(x+th_1, h_2)|_{t=0}\\
&= \frac{\partial^2}{\partial t_2\partial t_1} f(x+t_1h_1+t_2h_2)|_{t_1=t_2=0}
\end{aligned}
$$

用同样的方法定义

$$
\begin{aligned}
& d^N f(x, h_1, h_2, \cdots, h_N)\\
&= d[d^{N-1} f(x, h_1, \cdots, h_{N-1}), h_N]\\
&= \frac{d}{dt_N}[d^{N-1} f(x+t_Nh_N, h_1, h_2, \cdots, h_{N-1})]|_{t_N=0}\\
&= D_N D_{N-1}\cdots D_1 f\left(x+\sum_{i=1}^{N} t_i h_i\right)\Big|_{t_1=t_2=\cdots=t_N=0}
\end{aligned}
$$

因为算子 $D_i=\partial/\partial t_i$ 和 $D_j=\partial/\partial t_j$ 可交换，所以如果 $d^N f(x, h_1, \cdots, h_N)$ 存在则必对称．

根据 (2.1.13) 的如下推广，可以找出这些高阶导算子之间的

关系。

(2.1.27) **定理** (i) 如在 x 的邻域 U 内，f N 次可微，并用 $f^N(x)(h_1,\cdots,h_N)$ 记 N 阶 Fréchet 导算子，那么，f N 次 Gateaux 可微，且

$$d^N f(x,h_1,h_2,\cdots,h_N)=f^N(x)(h_1,h_2,\cdots,h_N).$$

(ii) 反之，如在 x 的邻域 U 内，f 的 Gateaux 导算子 $d^N f(x,h_1,\cdots,h_N)$ 存在，$d^N f(x,h_1,\cdots,h_N)\in L_N(X,Y)$，作为 x 的函数，$d^N f(x,h_1,\cdots,h_N)$ 从 U 到 $L_N(X,Y)$ 连续，那么，f N 次 Fréchet 可微，并且两个导算子在 x 处相等.

证明：(i) 因为 $f(x)$ k 次 Fréchet 可微 ($k\leqslant N$)，于是有多重线性算子 $A(h_1,\cdots,h_k)\in L_k(X,Y)$，使

$$(*)\qquad \begin{aligned}\|f^{k-1}(x+h_k)&(h_1,\cdots,h_{k-1})\\ &-f^{k-1}(x)(h_1,h_2,\cdots,h_{k-1})\\ &-A(h_1,\cdots,h_k)\|=o(\|h_k\|)\end{aligned}$$

在 $(h_1,\cdots,h_{k-1})$ 的有界集上一致地成立. 我们用归纳法证明定理. 对 $k=1$，由 (2.1.13)，(i) 成立. 设在 $n=k-1$ 时 (i) 仍真，我们证明 (i) 对 $n=k$ 也成立. 事实上，我们证明 $d^k f(x,h_1,\cdots,h_k)=A(h_1,\cdots,h_k)$. 根据归纳假定

$$f^{k-1}(x+h_k)(h_1,\cdots,h_{k-1})=df(x+h_k,h_1,h_2,\cdots,h_{k-1}),$$
$$f^{k-1}(x)(h_1,\cdots,h_{k-1})=df(x,h_1,\cdots,h_{k-1}).$$

这样，由(*)推出，当 $t\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}\|t^{-1}\{d^{k-1}f(x+th_k,&h_1,h_2,\cdots,h_{k-1})\\ &-d^{k-1}f(x,h_1,\cdots,h_{k-1})\}\\ &-A(h_1,\cdots,h_k)\|=o(1)\end{aligned}$$

于是 $f(x)$ k 次 Gateaux 可微，且 $d^k f(x,h_1,\cdots,h_k)=A(h_1,\cdots,h_k)$. 这就对 $n=k$ 证明了 (i)，归纳论证完毕. 从而 $f(x)$ 有 N 阶 Gateaux 导算子，且 $d^N f(x,h_1,\cdots,h_N)=f^N(x)(h_1,\cdots,h_N)$.

(ii) 我们仍用归纳法证明. 对 $n=1$，由 (2.1.13)，(ii) 为真. 下设对 $n=k-1$，(ii) 仍真，要对 $n=k$ 证明 (ii). 下面

我们指出，对 $A(h_1,\cdots,h_k)=d^kf(x,h_1,\cdots,h_k)$，(*) 成立。根据归纳假设

$$
\begin{aligned}
&f^{k-1}(x+h_k)(h_1,\cdots,h_{k-1})\\
&\quad-f^{k-1}(x)(h_1,\cdots,h_{k-1})\\
&=\int_0^1\frac{d}{ds}d^{k-1}f(x+sh_k,h_1,\cdots,h_{k-1})ds.
\end{aligned}
$$

于是，(*) 的右端可以改写成

$$
\left|\int_0^1 d^kf(x+sh_k,h_1,\cdots,h_k)ds-d^kf(x,h_1,\cdots,h_k)\right|.
$$

由中值定理 (2.1.19)，根据定理假设，最后一个式子

$$
\begin{aligned}
&\leqslant\|d^kf(x+\xi h_k,h_1,\cdots,h_k)-d^kf(x,h_1,\cdots,h_k)\|\\
&=o(\|h_k\|).
\end{aligned}
$$

这就完成了归纳论证，对 $N=k$ 证明了 (ii)。

(2.1.28) **推论** 在定理 (2.1.27) 的假设下，对 $k=2,3,\cdots,N$，Fréchet 导算子对称。

(2.1.29) **推论** 设 $f\in M(U,Y)$，其中 U 是 X 的开子集，线段 $[x,x+h]\subset U$，还设

$$
(2.1.30)\quad \left\|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}a_i(x)h^i\right\|=o(\|h\|^n),
$$

其中 $a_i(x)h^i=a_i(x,h,\cdots,h)$ (h 出现 i 次) 是 $L_i(X,Y)$ ($i=1,\cdots,n$) 中对称多重线性算子，从 $U\to L_i(X,Y)$，关于 x 连续，那么 $f\in C^n(U,Y)$，$a_i(x,h_1,\cdots,h_i)=f^i(x)(h_1,\cdots,h_i)$。

证明：我们证明，如 (2.1.30) 成立，则

$$
a_j(x,h,\cdots,h)=(d^j/dt^j)f(x+th)|_{t=0}\quad(j=1,\cdots,n).
$$

事实上，让 $y^*\in Y^*$ 任意，那么 $g(t)=(y^*,f(x+th))\in C^n(0,1)$，由一维时的 Taylor 定理和 (2.1.30)，

$$
\begin{aligned}
g(t)=(y^*,f(x))+\sum_{k=1}^{n}\frac{t^k}{k!}\left(y^*,\frac{d^k}{dt^k}f(x+th)|_{t=0}\right)\\
+o(|t|^n).
\end{aligned}
$$

根据实函数的 Taylor 级数的唯一性，对一切 $y^*\in Y^*$，

$$(y^*, a_k(x)h^k) = \left(y^*, \frac{d^k}{dt^k} f(x+th)|_{t=0}\right),$$

于是 $a_k(x)h^k = \frac{d^k}{dt^k} f(x+th)|_{t=0}$.

这样，对 $k=2, 3, \cdots, n$, $a_k(x, h_1, \cdots, h_k)$ 对称，因而 $a_k(x, h_1, \cdots, h_k) = d^k f(x, h_1, \cdots, h_k)$，由 (2.1.27) 推出

$$a_k(x, h_1, \cdots, h_k) = f^k(x)(h_1, h_2, \cdots, h_k)$$
$$(k=1, 2, \cdots, n).$$

于是 $f \in C^n(U, Y)$.

(2.1.31) **Taylor 定理(弱形式)**

如在 x 的邻域 U 中，f $N-1$ 次 Fréchet 可微，$f^N(x)$ 存在，那么

(2.1.32)
$$\left\| f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - \frac{1}{n!} f^N(x)h^N \right\| = o(\|h\|^N).$$

证明 (Cartan)：对 $N=1$，这个结论就是 Fréchet 微分的定义. 用归纳法，假定 $k=n-1$ 时定理为真，要证明 $k=n$ 时它仍成立. 考察函数

$$g(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)h^n,$$

用多重线性算子导算子的公式 (2.1.27) 的 (i) 计算 $g'(h)$

$$g'(h) = f'(x+h) - f'(x) - \cdots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)h^{n-1},$$

由归纳假定，$\|g'(h)\| = o(\|h\|^{n-1})$，再用中值定理 (2.2.19)，$\|g(h) - g(0)\| = o(\|h\|^n)$. 因 $g(0)=0$，得 $\|g(h)\| = o(\|h\|^n)$. 归纳论证完毕，(2.1.32) 得证.

(2.1.33) **Taylor 定理** 设 $f \in C^{n+1}(U, Y)$，线段 $[x, x+h] \subset U$，那么

(2.1.34) $\quad f(x+h) = f(x) + f'(x)h$

$$+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^n(x)h^n+R_{n+1}(x,h),$$

其中 $R_{n+1}(x,h)=\int_0^1\frac{(1-s)^n}{n!}f^{(n+1)}(x+sh)h^{n+1}ds$.

证明: 令 $y^*\in Y^*$, 对 C^{n+1} 函数 $g(t)=(y^*, f(x+th))$ 用实值函数时的 Taylor 定理,对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 有

(2.1.35) $$g(t)=g(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)t^k+R_{n+1}(t),$$

其中 $R_{n+1}(t)=\int_0^1\frac{(1-s)^n}{n!}g^{(n+1)}(st)t^{n+1}ds$.

现在 $g^{(k)}(t)=(y^*, f^{(k)}(x+th)h^k)$, 故

$$g^{(k)}(0)=(y^*, f^{(k)}(x)h^k).$$

由 (2.1.35), 令 $t=1$ 得

$$(y^*, f(x+h))=\left(y^*, f(x)+\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(x)h^k+R_{n+1}(1)\right),$$

其中 $(y^*, R_{n+1}(1))=\int_0^1\frac{(1-s)^n}{n!}(y^*, f^{(n+1)}(x+sh)h^{n+1})ds$.

于是由 Hahn-Banach 定理(1.3.8)就推出本定理.

2.2 具体的非线性算子

在这一节,我们要指出一些今后要用到的具体的非线性算子,还要讨论如何用 Banach 空间间的映射来表示这些算子.

设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中有界区域, X, Y 记定义在 Ω 上的函数构成的 Banach 空间,我们从考察如下的算子类开始.

2.2A 复合算子

设 $f(x,y)$ 是定义在 $\Omega\times\mathbf{R}^1$ 上的实值函数, 其中 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中有界区域. 对几乎处处的 x, $f(x,y)$ 对 y 连续; 对一切 y, $f(x,y)$ 对 x 可测. 这时我们称 $f(x,y)$ 满足 Carathéodory **连续性条件**. 考虑非线性复合算子 $f(u(x))$, 它定义为

$$\tilde{f}(u(x)) = f(x, u(x)),$$

其中 $u(x)$ 为 Lebesgue 可测函数. 显然, $\tilde{f}(u(x))$ 是 Lebesgue 可测的. 事实上,不难证明,在测度收敛意义下 $\tilde{f}(u(x))$ 连续. 此外, 当把它看作 Banach 空间 $C(\bar{\Omega})$ 到自身的映射时, $\tilde{f}(u(x))$ 连续且有界*). 今后我们经常要用到 $\tilde{f}$ 一个更深刻的结果, 它与把 $\tilde{f}$ 看作 $L_{p_1}(\Omega) \to L_{p_2}(\Omega)$ 的映射时的性质有关. 特别, 我们有

(2.2.1) 在增长限制条件[1)]

(*) $|f(x, y)| \leqslant \alpha + \beta|y|^{p_1/p_2}$ 对常数 $\alpha, \beta \geqslant 0$ 的限制下, 与 $\tilde{f}(u(x))$ 有关的以下说法等价:

(i) $\tilde{f}(u(x))$ 映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$, $1 \leqslant p_1, p_2 < \infty$;

(ii) $\tilde{f}(u(x))$ 是映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$ 的连续映射;

(iii) $\tilde{f}(u(x))$ 是映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$ 的有界映射.

这些结果的证明可直接从有关的测度论理论推出, 在本章末注记 A 中将给出证明的梗概.

用简单的归纳论证可以证明, 在 Carathéodory 连续性条件下, 多重复合算子 $\tilde{f}(u_1, u_2, \cdots, u_k) = f(x, u_1(x), \cdots, u_k(x))$ 看作为从 $\prod_{i=1}^{k} L_{p_i}(\Omega) \to L_p(\Omega)$ 的映射时, 当且仅当满足增长限制条件

$$(2.2.2) \qquad |f(x, y_1, \cdots, y_k)| \leqslant \left\{c_0 + \sum_{i=1}^{k} c_i |y_i|^{p_i/p}\right\}$$

时(其中 c_i 是常数), $\tilde{f}$ 是连续和有界的映射.

作为 (2.2.1) 的一个简单应用,我们完成 (1.5.7) 的证明. 在已经证明了的特殊情况里,假定了 $f(x, u) = k(1+u^\sigma)$, 其中 $\sigma < (N+2m)/(N-2m)$. 现在,经过对该证明仔细检查可知,这个式子只是用于保证对各种 L_p 类的 u, $f(x, u)$ 的 L_p 有界性. 结果 (2.2.1) 指出,当 $f(x, u)$ Lipschitz 连续时,增长限制条件 $|f(x, u)| \leqslant k\{1 + |u|^\sigma\}$ 足以保证这些 L_p 有界性. 从而,对一般情形,重复 (1.5.7) 的叙述后面所给的证明就行了.

---

*) 应加上条件"若 f 在 $\Omega \times \mathbb{R}^1$ 上连续"——译注.

1) 事实上,限制条件(*)是 (i) 的推论(看本章末的注记 A)——原注.

2.2B 微分算子

定义在 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 上的一般的 m 阶微分算子 A 记作

(2.2.3) $$Au = f(x, u, Du, \cdots, D^m u).$$

通常，如 $N=1$，A 称作常微分算子，如 $N>1$，则称作偏微分算子. 如果当 u 固定时.

(2.2.4) $$A(u, v) = f(x, u, Du, \cdots, D^{m-1}u, D^m v)$$

是 v 的线性函数，则称算子 A 是拟线性的. 一个拟线性算子 A 称作半线性的，如果 $A(u, v) = A(u, 0) + A(0, v)$，其中 $A(0, v)$ 是 v 的线性函数，与 u 无关.

如果 (2.2.3) 可以写成

$$Au = \sum_{|\alpha|, |\beta|\leq m} D^\alpha\{A_\alpha(x, D^\beta u)\},$$

那么说 Au 可写成散度形式. 显然，这样的算子是拟线性的. 散度型算子的出现是很自然的，因为这种类型的算子一般是某个形若 $I(x, u, Du, \cdots, D^m u)$ 的能量泛函的 Euler-Lagrange 方程（参看 1.1C 节）.

一般线性微分算子的分类法可直接推广到一大类非线性微分算子. 作法是: (i) 如 $f\in C^1$ 和 $Au = f(x, u, \cdots, D^m u)$，把 A 和它在 u 的第一变分 $\left(\text{即 } A'(u)v = \sum_{|\alpha|\leq m} f_\alpha(x, u, \cdots, D^m u)D^\alpha u,\right.$ 其中 $\left. f_\alpha = \dfrac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}\right)$ 联系起来，根据线性算子 $A'(u)$ 的分型来定义 A 在 u 点的类型. (ii) 如果算子 A 是拟线性的，这个作法指出：当 $A(0, v)$ 的类型与低阶项的扰动无关时，就把线性算子 $A(0, v)$ 的类型规定为 A 的类型.

例如，非线性椭圆型微分算子可以类似于线性椭圆型微分算子来定义. 在第一章中，一个 m 阶线性微分算子 $L = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ 称作椭圆型的，如果它的特征型 $Q(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ 对一切 x

$\in \Omega$ 是正定的．为把这个概念推广到一般的算子 $f=f(x,u,D^\gamma u)$，$|\gamma|\leqslant m$，我们假设 f 是自变量的可微函数．那么，f 在 $u_0\in C^\infty(\Omega)$ 的一阶变分是线性微分算子

$$f'(u_0)v=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha}(x,u_0,D^\gamma u_0)D^\alpha v.$$

如果 $f'(u_0)$ 是椭圆算子，则称 f 在 u_0 是椭圆型的．如果 f 写成散度形式，$m=2M$，

$$(2.2.5)\qquad f(u)=\sum_{|\alpha|\leqslant M}(-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(x,u,\cdots,D^M u),$$

那么这个定义可以作一些推广：如果 $f(u)$ 的"最高阶部分"满足正性条件，即对 $\xi\neq\eta$，

$$(2.2.6)\qquad \sum_{\substack{|\alpha|=M\\|\beta|<M}}\{A_\alpha(x,\xi^\beta,\xi^\alpha)-A_\alpha(x,\eta^\beta,\eta^\alpha)\}\{\xi^\alpha-\eta^\alpha\}>0,$$

就说 f 是椭圆型的．

对定义在 Sobolev 空间上的微分算子，结果 (2.2.1) 和它的推广有如下有趣的推论．

(2.2.7) 设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的有界区域，它的边界 $\partial\Omega$ 是正则的，设 $f(x,y_1,\cdots,y_k)$ 满足 Carathéodory 条件和增长条件

$$|f(x,y_1,\cdots,y_m)|\leqslant c\left\{1+\sum_{\alpha=1}^{m}|y_\alpha|^{\sigma_\alpha}\right\},$$

其中 c 是绝对常数，y_m 是向量变元．当 $\{\sigma_\alpha\}$ 满足不等式组

$$(*)\qquad \sigma_\alpha<\frac{1}{s}\left\{\frac{1}{p}-\frac{m-|\alpha|}{N}\right\}^{-1}$$

时，$f(u)=f(x,u,Du,\cdots,D^m u)$ 定义一个从 $W_{m,p}(\Omega)$ 到 $L_s(\Omega)$ 的有界连续映射．当极限指数有限时，对于"$\leqslant$"，结果同样成立．

证明： 我们指出，根据 Sobolev 不等式，对 $u\in W_{m,p}(\Omega)$，当 $1/p(\alpha)\geqslant\frac{1}{p}-(m-|\alpha|)/N$ 时，$D^\alpha u\in L_p(\alpha)$．于是，当加

上条件 $\sigma_\alpha s \leqslant p(\alpha)$，即 $\sigma_\alpha \leqslant p(\alpha)/s$ 时，$|D^\alpha u|^{\sigma_\alpha} \in L_s(\Omega)$。因为 (2.2.1) 和 (2.2.2) 指出，只需分别考虑每项 $|D^\alpha u|^{\sigma_\alpha}$，所以从这些式子就推出所要的结果。

2.2C 积 分 算 子

今后，我们会遇到如下形式的积分算子

$$Au(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y, u(y)) dy, \tag{2.2.8}$$

其中 $K(x, y)$ 是定义在 $\Omega \times \Omega$ 上的某个核函数。这样的积分算子常和半线性偏微分方程的边值问题有关。看一个简单的例子：区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上 Dirichlet 问题

$$\Delta u = f(x, u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

的任一解 u 都可以写成

$$u(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y, u(y)) dy,$$

其中 $G(x, y)$ 是 (Δ, Ω) 对应于零 Dirichlet 边值条件的 Green 函数。于是，作为 x 的函数，对 $x \in \partial\Omega$，$G(x, y) = 0$，且

$$G(x, y) = \begin{cases} (2\pi)^{-1} \log|x - y| + \beta(x, y) & \text{对 } N = 2, \\ -((N-2)\omega_N)^{-1}|x - y|^{2-N} + \beta(x, y) & \text{对 } N > 2, \end{cases}$$

对于固定的 x，$\beta(x, y)$ 是 y 的调和函数。当看作 $L_p(\Omega) \to L_r(\Omega)$ 的映射时，由 (2.2.8) 所定义的算子 Au 常可分解成 $Au = L\tilde{f}(u)$ 的形式，其中 $\tilde{f}$ 是从 $L_p(\Omega) \to L_r(\Omega)$ 的复合映射（对某个 r），L 是线性积分算子

$$Lu(x) = \int_\Omega K(x, y) u(y) dy,$$

它是 $L_r(\Omega) \to L_s(\Omega)$ 的映射。显然，这样定义的 L 是有界线性算子的一个充分条件是

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x, y)|^t dx dy < \infty,$$

其中 $t = \max\left(s, \dfrac{r}{r-1}\right)$。

另一个有趣的例子是这样一个积分算子，它和区域 $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ 上 Neumann 问题

$$\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f(x,u)$$

的解有关。除一个任意常数外，这种方程的任一解都可以写成

$$u(x)=\int_{\partial\Omega}N(x,y)f(y,u(y))dy$$

的形式，其中 $N(x,y)$ 是Δ的 Neumann 问题的 Green 函数。类似于上面对 $G(x,y)$ 所给出的，$N(x,y)$ 也有类似的表达式。

2.2D 微分算子的表达式

在用 Banach 空间间的抽象非线性映射表示一般微分算子时，有一些不同的方法可供选择。今后常用的方法可以总结如下(更详尽的讨论稍后再给出)：

(i) 直接复合表示法

如果 $Gu=f(x,D^\beta u)$, $|\beta|\leqslant m$ 是定义在某个区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的m阶微分算子，$f=f(x,\xi)$是 (x,ξ) 的光滑函数，譬如说 $C^{s,\alpha}$ 类函数，那么我们可以考虑复合算子 $G(u)=f(x,D^\beta u)$, $|\beta|\leqslant m$，它对 Hölder 函数空间 $C^{s,\alpha}(\Omega)$ 的u有意义。

于是，对 $u\in C^{s,\alpha}(\Omega)$, $G(u)\in C^{s-m,\alpha}(\Omega)$，自然要求 $s\geqslant m$。这样一个映射显然从 $C^{s,\alpha}(\Omega)\to C^{s-m,\alpha}(\Omega)$ 连续、有界。事实上，不难算出 $G(u)$ 在 $u_0\in C^{s,\alpha}(\Omega)$ 的 Fréchet 导算子 $A(u_0)v$ 为

$$A'(u_0)v=\sum_{\alpha\leqslant m}f_\alpha(x,u_0,D^\beta u_0)D^\alpha v, \tag{2.2.9}$$

其中 $f_\alpha=\partial f/\partial\xi_\alpha$。(2.2.9)的右端正好是 $G(u)$ 在 u_0 的第一变分。用同样的方法，$G(u)$可以看作从$W_{s,p}(\Omega)\to W_{s-m,p}(\Omega)$的映射，只要加上条件：对 $u\in W_{s,p}(\Omega)$，形式的导算子 $D^\gamma f(x,\cdots,D^\beta u)\in L_p(\Omega)$, $|\gamma|\leqslant s-m$。可对 f 和它的导数加上类似于(2.2.7)的增长限制来检验最后这个要求。

下面的例子对研究A的有界性有用：

(2.2.10) 设 $f(x, \xi)$ 是定义在区域 $\Omega\times\mathbf{R}$ 上的 C^∞ 函数，它的各阶导数都有界，那么对于充分大的整数 m 和任意的 $u\in W_{m,p}(\Omega)$,

$$\|f(x, u)\|_{m,p}\leqslant \mathrm{const}\,\{1+\|u\|_{m,p}\}.$$

证明： 为简单起见，我们考虑 f 与 x 无关的情形. 由链锁法则，对 $u\in C_0^\infty(\Omega)$，可以形式地算出

$$D^k f(u)=\sum_{j=1}^{k} c_{jk} f^{(j)}(u)\Big\{\prod_{\Sigma\beta_j=k} D^{\beta_j}u\Big\}\ (k=1, 2, \cdots).$$

为估计 $\|f(u)\|_{m,p}$，只需估计 $\|D^m f(u)\|_{0,p}$. 因为根据假设 $f^{(j)}(u)$ 有界，

$$\|D^k f(u)\|_{0,p}^p\leqslant \mathrm{const}\Big\|\prod_{\Sigma\beta_j=k} D^{\beta_j}u\Big\|_{0,p}^p.$$

由 $p_i\beta_i=m$ 时的 Hölder 不等式，

$$\|D^k f(u)\|_{0,p}^p\leqslant \mathrm{const}\prod_{\Sigma\beta_j=k}\|D^{\beta_j}u\|_{0,pp_j}^p.$$

然后再由 (1.4.17)，因为

$$\|D^{\beta_j}u\|_{0,pp_j}\leqslant \mathrm{const}\,\|D^m u\|_{0,p}^{1/p_j}\|u\|_{L_\infty}^{1-1/p_j},$$

所以

$$\|D^k f(u)\|_{0,p}\leqslant \mathrm{const}\,\|D^m u\|_{0,p}^{k/m}\Big\{\prod_{\Sigma\beta_j=k}\|u\|_{L_\infty}^{1-1/p_j}\Big\}.$$

用同样的方法可以证明，当 m 充分大时，

(2.2.11) $\|f(x, u, Du, \cdots, D^\gamma u)\|_{m-\gamma,p}\leqslant \mathrm{const}\,\{1+\|u\|_{m,p}\}$.

(ii) 由 Schauder 反演定义的算子

从 J. Schauder 的基本研究工作以来，有一个方法发挥了巨大影响. 这个方法基于微分算子(可能加上适当的边界条件)的反演. 已知一个拟线性微分算子方程 $Au=g$ 的边值问题，要定义一个相应的抽象非线性映射，其基本思想在于用下面的方法写出 $A(u)=A(u,u)$.

(1) 对在适当选取的 Banach 空间 (X, Y) 中固定的元素 (v, g)，线性方程 $A(v, u)=g$ 在 X 中有且仅有一个解 $u=T_g(v)$;

(2) 对于固定的 $u\in X$，$A(v, u)$ 连续依赖于 v. 那么，算子 T_g 有定义，$T_g\in M(X, X)$，而且 T_g 的不动点和方程 $Au=g$ 的解重合.

为了断定 T_g 的这种不动点的存在性，建立 $T_g \in M(X, X)$ 的连续性和有界性是很重要的。一般通过建立方程 $A(v, u) = g$ 的解 u 如下形式的**先验估计**做到这一点，方程中 v 和 g 固定，$\|v\|_X \leqslant R$. 先验估计为

(2.2.12) $$\|u\|_X \leqslant c(R)\|g\|_Y,$$

式中 $c(R)$ 是一个有限的正常数，与 v, u 无关，但可能与 R 有关。例如，若 m 阶微分算子 $A(u)$ 是拟线性的，为建立估计式，可以假定算子 $A(v, u)$ 对 u 线性，其中 u 记第 m 阶导算子，v 记低阶导算子。那么，在很多情况下，T_g 的连续性和有界性可以从下面导出：

(2.2.13) 如果 $A(u)$ 拟线性，对固定的 v 和用 u 记 $A(u)$ 中的第 m 阶导算子来定义线性算子 $A(v, u)$，又有形若 (2.2.12) 的估计式，那么，作为从 X 到自身的映射，算子 T_g (前面所定义的)连续且有界。

证明： 一旦(2.2.12)成立，那么从在 $\|v\|_X \leqslant R$ 上 $\|T_g(v)\| < \infty$ 可直接推出 T_g 有界。下面证明 T_g 的连续性。设 $T_g v = u$ 和 $T_g \bar{v} = \bar{u}$，那么

$$A(v, u) = g,\ A(\bar{v}, \bar{u}) = g.$$

于是，因为 A 对第二个变元线性，我们得到

$$\begin{aligned} A(\bar{v}, u - \bar{u}) &= A(\bar{v}, u) - A(\bar{v}, \bar{u}) \\ &= A(\bar{v}, u) - A(v, u). \end{aligned}$$

根据估计式 (2.2.12) 和前面的式子，

$$\|T_g \bar{v} - T_g v\| = \|\bar{u} - u\| \leqslant c(R)\|A(\bar{v}, u) - A(v, u)\|,$$

其中 $R = \max(\|v\|, \|\bar{v}\|)$. 因为对于固定的 u, $A(v, u)$ 对 v 连续，于是随着 $\bar{v} \to v$，有 $T_g \bar{v} \to T_g v$. 此即需证者。

对于 $2m$ 阶椭圆型边值问题的研究来说，在 Schauder 反演程序中最常用到的空间对(X, Y)是 Hölder 空间 $(C^{2m, \alpha}(\Omega), C^{0, \alpha}(\Omega))$ $(0 < \alpha < 1)$ 和 Sobolev 空间 $(W_{2m, p}(\Omega), L_p(\Omega))$$(1 < p < \infty)$. 对于这样的空间对，可用估计式(1.4.25)—(1.4.28)来验证(2.2.12). 事实上，估计式(1.4.25)—(1.4.28)还证明了算子 T_g 紧(看 (2.4.7)). 这个事实在以后很重要。对于半线性

椭圆型方程，可以用 Green 函数把算子 T_k 完全清楚地表示出来．例如，设 $Lu = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u$ 是定义在 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上的线性微分算子，Dirichlet 边界条件为 $D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0$，$|\alpha| \leqslant m-1$．如果 $G(x, y)$ 是它的 Green 函数，那么，上面所提到的非线性方程组

$$Lu + f(x, u, Du, \cdots, D^\beta u) = 0, \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \ |\beta| < m-1$$
$$D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \text{ 对 } |\alpha| \leqslant m-1$$

和积分算子

$$Tu(x) = \int_\Omega G(x, y) f(y, u, \cdots, D^\beta u(y)) dy$$

等价．

(iii) 利用对偶性定义的算子

设 A 是定义在区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上的微分算子，它的散度形式为

$$Au = \sum_{|\alpha|\leqslant m} (-1)^\alpha D^\alpha A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u).$$

由 Sobolev 空间的自反性，常常可以找出 A 的特别有用的积分表达式．对 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 和 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$，令

$$F(u, \phi) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) D^\alpha \phi.$$

根据 1.4 节的不等式，我们可以证明，存在一个有界函数 $g(r)$，使得对正整数 m 和 $1 < p < \infty$，有

$$|F(u, \phi)| \leqslant g(\|u\|_{m,p}) \|\phi\|_{m,p}. \tag{2.2.14}$$

那么，根据 (2.2.14)，$F(u, \phi)$ 定义 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 上一个 ϕ 的有界线性泛函（因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中稠密）．于是存在唯一的元素 $\mathfrak{A}(u) \in W_{-m,q}(\Omega)$（其中 q 是 p 的共轭数），使

$$F(u, \phi) = (\mathfrak{A}(u), \phi)_{m,p}. \tag{2.2.15}$$

从而 $\mathfrak{A}(u) \in M(\mathring{W}_{m,p}(\Omega), W_{-m,q}(\Omega))$ 可以看作是具体微分算子 A 的一个抽象表达式．

为了确定使 (2.2.14) 成立并保证 $\mathfrak{A}$ 有界的条件，定义 (2.2.15) 特别有用．我们还指出，为了对有界区域 Ω 建立 (2.2.14)，结论 (2.2.7) 非常有效．事实上，由 Hölder 不等式，

$$|F(u,\phi)|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)\|_{L_{q(\alpha)}}\|D^\alpha\phi\|_{L_{p(\alpha)}},$$

其中 $1/p(\alpha)+1/q(\alpha)=1$，$L_{p(\alpha)}$ 选得尽可能地大以保证下面的 Sobolev 不等式成立

$$\|D^\alpha u\|_{L_{p(\alpha)}}\leqslant c\|u\|_{m,p}.$$

特别，可取 $1/p(\alpha)=1/(p-(m-|\alpha|)/N)$；从而 $1/q$ 确定。于是为建立(2.2.14)，只需证明微分算子 $A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)$ 是从 $\overset{0}{W}_{m,p}(\Omega)$ 到 $L_{q(\alpha)}(\Omega)$ 的有界映射，亦即证明对某个有界函数 $g_\alpha(r)$，有

(2.2.16) $$\|A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)\|_{L_{q(\alpha)}}\leqslant g_\alpha(\|u\|_{m,p}),$$

对一切 $|\alpha|\leqslant m$.

我们可以仿照(2.2.7)，对函数 $A_\alpha(x,\xi_1,\cdots,\xi_m)$ 的增长加以限制以得到最后这个不等式。类似地，为找出保证 $\mathfrak{A}$ 有界的条件，我们指出，对 $u\in\overset{0}{W}_{m,p}(\Omega)$，

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{A}u\|_{-m,q}&=\sup_{\|\phi\|=1}(\mathfrak{A}(u),\phi)\qquad\qquad \phi\in C_0^\infty(\Omega)\\&=\sup_{\|\phi\|=1}(F(u),\phi)\\&\leqslant c\left\{\sum_{|\alpha|\leqslant m}\|A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)\|_{L_{q(\alpha)}(\Omega)}\right\},\end{aligned}$$

其中 c 是某个绝对常数，$q(\alpha)$ 则选取如上。一旦有了不等式(2.2.2)，那么有界性也就得到了，而在证明了这些不等式以后，$\mathfrak{A}$ 的连续性就是(2.2.7)的直接推论。

2.3 解析算子

有限维空间之间的映射的解析性这一重要概念已被卓有成效地推广到无穷维空间。我们在这里对 Banach 空间间的映射给出解析性的一个适当定义，并且研究与解析性等价的各种性质。

2.3A 等价定义

(2.3.1)**定义** 设 X 和 Y 是复数域上的 Banach 空间，U 是 X 中连通开集，$f\in M(U,Y)$。如果对每个 $x\in U$，$h\in X$，$y^*\in Y^*$，$f(x)$

是单值映射，而且对充分小的 $|t|$，$(y^*, f(x+th))$ 是复变数 t 的解析函数，那么称 f 是复解析的。

这个定义的一个直接推论是：对于充分小的 $|t|$ 和 $x\in U$，

$$(y^*, f(x+th)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x, h)\frac{t^n}{n!},$$

其中

(2.3.2)
$$a_n = \frac{d^n}{dt^n}(y^*, f(x+th))_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{|t|=\rho}\frac{(y^*, f(x+th))}{t^{n+1}}\,dt.$$

经典的 Cauchy 估计式可推出

$$|a_n(x, h)| \leqslant (\sup_{x\in U}|(y^*, f(x))|)n!\rho^{-n}.$$

我们将证明

$$(y^*, a_n(x, h)) = (y^*, f^n(x)h^n) \qquad n=1, 2, \cdots,$$

其中 $f^n(x)$ 记 f 在 x 的 n 阶 Fréchet 导算子。既然这样，由 Hahn-Banach 定理推出，对于充分小的 $\|h\|$，

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^n(x)h^n.$$

事实上，下面的结论成立。

(2.3.3) **定理** 设 U 是 X 的开子集，f 是 $M(U, Y)$ 中的局部有界算子，那么下面的性质等价：

(i) f 在 U 中复解析；

(ii) f 在 U 中 Gateaux 可微；

(iii) f 在 U 中 Fréchet 可微且 $f'(x)h = df(x, h)$；

(iv) f 有直到无穷阶的 Gateaux 导算子 $d^N f(x, h_1, \cdots, h_N)$，且

$$d^N f(x, h_1, \cdots, h_N) = D_N\cdots D_1 f\left(x+\sum_{i=1}^{N} t_i h_i\right)\Big|_{t_i=0};$$

(v) f 有直到无穷阶的 Fréchet 导算子 $f^N(x)h^N$，且对 $N=1, 2, \cdots$，

$$f^N(x)(h_N, h_{N-1}, \cdots, h_1) = d^N f(x, h_1, \cdots, h_N);$$

(vi) $f(x+h)=\sum_{n=0}^{\infty}(n!)^{-1}f^{n}(x)h^{n}$,

即对每个 $y\in U$，存在一个正数 $r_y>0$，使得对 $\|x-y\|\leqslant r_y$ 和 $\|h\|\leqslant r_y$，这个级数一致收敛。

证明：(i)$\Longleftrightarrow$(ii)：从 Gateaux 可微立即推出复解析。现假定 f 复解析，为证 f Gateaux 可微，只需证明当 t，s 独立地趋于 0 时，

$$g(s,t)=\frac{1}{t}\{f(x+th)-f(x)\}$$

$$-\frac{1}{s}\{f(x+sh)-f(x)\}\to 0$$

(亦即证明当 $t_N\to 0$ 时，$t_N^{-1}\{f(x+t_Nh)-f(x)\}$ 是 Y 中 Cauchy 序列)。根据 Cauchy 积分公式，对 $y^*\in Y^*$，

$$(y^*,f(x+th))=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{(y^*,f(x+\xi h))}{\xi-t}d\xi,$$

其中 C 是 $\mathbb{C}^1$ 中圆心在 0，半径为 r 的小圆周。因而

$$(y^*,g(s,t))=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(y^*,f(x+\xi h))\frac{t-s}{\xi(\xi-s)(\xi-t)}d\xi.$$

因为 $(y^*,f(x+\xi h))$ 连续，故在 C 上有界，于是据一致有界性原则(1.3.25)，在 C 上有 $\|f(x+\xi h)\|\leqslant A$。因而，对于充分小的(譬如说)不超过 $\frac{1}{2}r$ 的 s，t

$$\|(y^*,g(s,t))\|\leqslant 4Ar^{-2}|t-s|\,\|y^*\|.$$

因此，当 $s,t\to 0$ 时，$\|g(s,t)\|\to 0$。

(i)，(ii)$\Rightarrow$(iii)：因为 $f(x)$ Gateaux 可微，导算子为 $df(x,h)$，由(2.1.13)，只需证明

(a) 对固定的 x，$df(x,h)\in L(X,Y)$；

(b) 作为 x 的函数，$df(x,h)$ 从 U 到 $L(X,Y)$ 连续。为证明这两点，我们用 Hartog 定理[1]。首先，显然 $df(x,h)$ 是 h 的

---

1) 这个定理说(参看 L. Hormander, 1966, p.28)，定义在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}^N$ 上的复值函数，如果对每个变元分别解析，那么对所有的复变元总体解析——原注.

一次齐次式，于是只需证明 $df(x, h_1+h_2)=df(x, h_1)+df(x, h_2)$. 为此我们指出，因为 $\partial g/\partial t_1$, $\partial g/\partial t_2$ 存在，$(y^*, f(x+t_1h_1+t_2h_2))=g(t_1, t_2)$ 对两个复变元 (t_1, t_2) 分别解析. 由 Hartog 定理推出

$$g(t_1, t_2)=(y^*, f(x))+t_1g_{t_1}(0, 0)$$
$$+t_2g_{t_2}(0,0)+o(|t|).$$

于是

$$(y^*, df(x, h_1+h_2))$$
$$=\left(y^*, \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}[f(x+t[h_1+h_2])-f(x)]\right\}\right)$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{t}[g(t, t)-g(0, 0)]\right\}$$
$$=g_{t_1}(0, 0)+g_{t_2}(0, 0)$$
$$=(y^*, df(x, h_1)+df(x, h_2)).$$

由 Cauchy 估计式推出，对于 $\|h'\|=\beta$，譬如说有

$$\|df(x, h')\|=\sup_{\|y^*\|=1}\left|\frac{d}{dt}(y^*, f(x+th'))_{t=0}\right|\leqslant M.$$

因为 $df(x, h)$ 是一次齐次式，对任意 h

$$\|df(x, h)\|=\left|df\left(x, \frac{\|h\|}{\beta}h'\right)\right|\leqslant\frac{\|h\|}{\beta}M, \tag{2.3.4}$$

其中 $\|h'\|=\beta$. 这就证明了 (a).

为证 (b) 我们首先证明，作为 x 的函数，$df(x, h)$ 复解析. 对 $y^*\in Y^*$,

$$(y^*, df(x+t_2h_2, h_1))=\frac{d}{dt_1}(y^*, f(x+t_2h_2+t_1h_1))|_{t_1=0}.$$

因为 $f(x)$ Gateaux 可微，$g(t_1, t_2)=(y^*, f(x+t_2h_2+t_1h_1))$ 是复变元 t_1, t_2 的解析函数. 又用 Hartog 定理，$g_{t_1}(0, t_2)$ 对 t_2 解析，于是 $df(x, h)$ 对 x 解析，由上面论证也得到 $df(x, h)$ 对 x Gateaux 可微. 于是对 $y^*\in Y^*$,

$$(y^*, df(x+z,h)-df(x,h))$$
$$=\left(y^*, \int_0^1\frac{d}{ds}df(x+sz, h)ds\right)$$

$$= \int_0^{1} \frac{d}{ds}(y^*, df(x+sz, h)ds)$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(y^*, f(x+sz+th))}{t^2}\, dt\right] ds$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(y^*, f'(x+sz+th)z)}{t^2}\, dt ds.$$

应用 Cauchy 估计和 (2.3.4)，我们就求得

$$\|df(x+z, h) - df(x, h)\|$$

$$= \sup_{\|y^*\|=1} |(y^*, df(x+z, h) - df(x, h))|$$

$$= o(1).$$

（当 $\|z\|\to 0$ 时，它对 $\|h\|=1$ 一致）

(i), (ii) ⇒ (iv)：用归纳法证．$k=1$ 即 (ii)．现假设结论对 $k=n-1$ 成立，要证定理对 $k=n$ 为真．根据 Hartog 定理，对任 $y^*\in Y^*$，函数

$$g(t_1, \cdots, t_n) = \left(y^*, f(x + t_n h_n + \sum_{i=1}^{n-1} t_i h_i)\right)$$

是复变元 $t_1, \cdots, t_n$ 的解析函数．于是

$$\tilde{g}(t_n) = D_{n-1}D_{n-2}\cdots D_1 g(t_1, \cdots, t_n)|_{t_1=t_2=\cdots=t_{n-1}=0}$$

是 t_n 的解析函数．据归纳假设

$$\tilde{g}(t_n) = (y^*, df^{n-1}(x + t_n h_n, h_{n-1}, h_{n-1}, \cdots, h_1)).$$

于是 $df^{n-1}(x, h_{n-1}, \cdots, h_1)$ 对 x 解析，从而 Gateaux 可微．

这个证明也表明

$$d^n f(x, h_n, h_{n-1}, \cdots, h_1)$$

$$= D_n D_{n-1}\cdots D_1 f\left(x + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i\right)\Big|_{t_i=0}.$$

这就完成了归纳论证．至于这个论断的逆，那是显然的．

(iv) ⇒ (v)：为证明这个事实，我们用定理 (2.1.27)．于是我们只需证

(a) $d^n f(x, h_1, \cdots, h_n)\in L^n(X, Y)$ 和 (b) 作为 x 的函数，$d^n f(x, h_1, \cdots, h_n)$ 从 $U\to L^n(X, Y)$ 连续．由

$$d^n f(x, h_n, h_{n-1}, \cdots, h_1) = D_n D_{n-1} \cdots D_1 f\left(x + \sum_{i=1}^{n} t_i h_i\right)\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0}$$

可知 $d^n f(x, h_n, \cdots, h_1)$ 对 h_n 线性，对 h_i 对称 $(i = 1, 2, \cdots, n)$。于是 $d^n f(x, h_n, \cdots, h_1)$ 对每个 h_i 线性。根据(2.1.22)，$d^n f(x,h)$ 是 n 次齐次多项式，对 x Gateaux 可微。事实上，因为 Cauchy 估计指出 $d^n f(x, h)$ 对 x 局部有界，所以 $d^n f(x, h)$ 对 x 解析。于是由配极变换，$d^n f(x, h_1, \cdots, h_n)$ 解析依赖于 x，因而对 x 连续。余下只需证明对固定的 x，$d^n f(x, h) \in L^n(X, Y)$。恰好同(2.3.4)中一样，这可从 $d^n f(x, h)$ 对 h 的齐次性推出。逆命题是显然的。

(v) ⇒ (vi)：可从(2.3.2)和后面的说明推出。

(vi) ⇒ (i)：如果 $f(x+h) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} f^{(N)}(x) h^N$，

令

$$g(x, h) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} N f^{(N)}(x) h^{N-1}.$$

那么，和一维时一样，对固定的 $y^* \in Y^*$，当 $|t| \to 0$ 时，$|(y^*, f(x+th) - f(x) - g(x, th))| = o(t)$。

2.3B 基本性质

这里叙述上述等价性的一些直接推论，它们将来很有用。

(2.3.5) 定理 设 $f(x)$ 是 $M(U, Y)$ 中局部有界复变解析算子，那么

(i)（极大值原则） 除非 $\|f(x)\|$ 在 U 上是常数，否则它不可能在 U 内达到 $\sup_{x \in U} \|f(x)\|$。

(ii)（Cauchy 估计） 如果球 $\{\|y - x_0\| \leqslant r_0\}$ 在 U 内，$\|x - x_0\| \leqslant r_0/2$，那么对一切 h，

$$\|f^{(n)}(x) h^n\| \leqslant n! M(x_0, r_0) \left(\frac{2}{r_0}\right)^n \|h\|^n, \tag{2.3.6}$$

其中 $M(x_0, r_0) = \sup \|f(x)\|$，上确界是在球面$\{x \mid \|x - x_0\| = r_0\}$

上取的。

证明：(i) 假设有 $x_0\in U$，使 $\|f(x)\|\leqslant\|f(x_0)\|=M$，那么，对充分小的 $|t|$ 和 $y^*\in Y^*$，$(y^*, f(x_0+th))$ 是 t 的解析函数。对充分小的 ρ 用 (2.3.2)，

$$\|f(x)\|\leqslant(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}\|f(x+\rho e^{i\theta}h)\|d\theta,$$

从而当 $|t|$ 足够小时，$\|f(x_0+th)\|$ 是次调和的。于是对充分小的 $|t|$，$\|f(x_0+th)\|=M$。因为 h 任意，故对一切 $x\in U$，只要能用 U 中的一条折线将 x 与 x_0 连结起来，就有 $\|f(x)\|=M$。从而对一切 $x\in U$，$\|f(x)\|=M$。

(ii)：根据定理 (2.3.3) 的结论，对 $\|h\|\leqslant r_0/2$，$f^{(n)}(x)h^n$ 是 h 的 n 次齐式，且 $\|f^{(n)}(x)h^n\|\leqslant n!M(x_0, r_0)$，其中 $M(x_0, r_0)=\sup\|f(x)\|$，上确界是对球面 $\{x|\|x-x_0\|=r_0\}$ 取的。于是，和 (2.3.4) 一样，对一切 h，我们得到 (2.3.6)。

2.4 紧 算 子

当对有限维 Banach 空间 $\mathbf{B}^N$ 之间的映射得到某些结果时，很自然会想，令 $N=\dim\mathbf{B}^N\to\infty$，对任意维数的 Banach 空间，这些结论是否仍真？对如下一类映射来说，这些结果常常是不难建立的。

(2.4.1) **定义** 设 X 和 Y 是 Banach 空间，U 是 X 的子集，$f\in M(U, Y)$。如果 f 连续，并映 U 中有界子集成 Y 中相对紧子集，那么称 f 为紧算子，记作 $f\in K(U, Y)$（这里我们用了和 1.3 节相同的记号）。

2.4A 等 价 定 义

有一个有趣而又很重要的事实，只要所考察的 Banach 空间选择得当，在数学物理和微分几何中出现的很多非线性算子都是上面意义下的紧算子。

显然，$M(U, Y)$ 中的紧算子在加法和减法运算下封闭，在

有界的连续算子复合作用下封闭。而且，所有映 Banach 空间 X 的子集 U 到有限维 Banach 空间 Y 的连续有界映射都是紧的（我们用 $K_0(U, Y)$ 记这一类映射）。事实上，紧算子的集合正是由那些可以用 K_0 中的算子在下面意义下逼近的映射组成。

(2.4.2) 定理 设 U 是 X 中有界子集，$f \in M(U, Y)$，那么下面的事实等价：

(i) f 紧；

(ii) 任给 $\varepsilon > 0$，存在一个连续、有界映射 $f_\varepsilon \in M(U, Z_\varepsilon)$，其中 Z_ε 是 Y 的有限维子集，使得 $\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$，而且 f_ε 的值域包含在 $f(U)$ 的凸包 $\overline{\mathrm{co}} f(U)$ 中。

(iii) f 可以表成一致收敛级数 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$，其中 g_n 有有限维值域，且对一切 $x \in U$，$\|g_n(x)\| \leqslant \varepsilon/2^n$。

证明：(i) ⇒ (ii)：如 f 紧，则 $\overline{f(U)}$ 是 Y 中紧集。于是对任给 $\varepsilon > 0$，可用有限多个球覆盖 $\overline{f(U)}$。这些球的球心为 $y_i (i = 1, 2, \cdots, k)$，半径为 ε。用 Y_k 记 Y 中由 $(y_1, y_2, \cdots, y_k)$ 张成的有限维子空间。我们构造 U 的一个单位分解如下：对每个 $i = 1, 2, \cdots, k$，令 $\mu_i(x) = \max(0, \varepsilon - \|f(x) - y_i\|)$ 和 $\lambda_i = \mu_i(x) \left\{\sum_{i=1}^{k} \mu_i(x)\right\}^{-1}$。那么 $\mu_i(x)$ 是定义在 U 上的连续实值函数，因为对每个 $x \in U$，总有某个 $\mu_i(x) > 0$，所以 $\sum_{i=1}^{k} \mu_i(x) \neq 0$。每个 $\lambda_i(x)$ 也是定义在 U 上的连续实值函数，$0 \leqslant \lambda_i(x) \leqslant 1$，对 $x \in U$，$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) = 1$。现在对 $x \in U$ 定义一个函数 $f_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) y_i$。因为 $f(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x) f(x)$，我们有

$$\|f(x) - f_\varepsilon(x)\| = \left|\sum_i \lambda_i(x)\{f(x) - y_i\}\right|$$

$$\leqslant \sum_i \lambda_i(x) \|f(x) - y_i\| \leqslant \varepsilon,$$

于是 f_ε 是所求的连续函数，它的定义域是 U，值域包含于点 $y_1, y_2, \cdots, y_k$ 的凸包之中，因而在 Y_ε 之中。

(ii) ⇒ (iii)：对 $\varepsilon_n = \varepsilon/2^{n+2}$，由 (ii) 存在一个有限维值域的映射 h_n，使 $\|h_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon/2^{n+2}$。归纳定义序列 $\{g_n\}$ 如下：$g_0(x) = h_0(x)$，$g_n(x) = h_n(x) - h_{n-1}(x)$。那么，因为 $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) = h_n(x)$ 和 $h_n(x) \to f(x)$，所以 $\sum_{i=1}^{n} g_i(x) \to f(x)$。还有

$$
\begin{aligned}
\|g_n(x)\| &= \|h_n(x) - h_{n-1}(x)\| \\
&\leqslant \|h_n(x) - f(x)\| + \|h_{n-1}(x) - f(x)\| \\
&\leqslant \varepsilon/2^{n+2} + \varepsilon/2^{n+1} < \varepsilon/2^n.
\end{aligned}
$$

因而，由 $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n(x)\|$ 一致收敛得出 $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ 一致收敛。

(iii) ⇒ (i)：因映射列 $\sum_{k=1}^{n} g_k(x)$ 一致收敛，于是从下述事实直接导出 (i)。如果紧算子列 $f_n \in M(U, Y)$ 在 U 上一致收敛到 f，那么 f 紧。显然，因为每个 f_n 连续，所以 f 连续。$\overline{f(U)}$ 也紧。事实上，任给 $\varepsilon > 0$，我们可以找到一个整数 k，使 $\|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon/2$，因而 $\overline{f_k(U)}$ 的任何有限 $\varepsilon/2$ 网将是 $\overline{f(U)}$ 的有限 ε 网，于是 $\overline{f(U)}$ 紧，从而 f 紧。

2.4B 基本性质

为了说明怎样应用定理 (2.4.2) 把对有限维映射证明了的定理推广到无穷维的情形，我们证明 Brouwer 不动点定理 (1.6.4) 的一个推广，它属于 Schauder。

(2.4.3) **Schauder 不动点定理** 映 Banach 空间 X 中有界闭凸集 K 到自身的紧连续映射必有不动点。

证明：用定理 (2.4.2)，我们用连续有界映射序列 $\{f_n\}$ 逼近 f。f_n 有有限维值域 $Y_{\varepsilon,n} \subset K$，且对一切 $x \in K$，$\|f(x) - f_n(x)\| \leqslant 1/n$。将 f_n 限制在 $Y_{\varepsilon,n}$ 上，那么所得的映射 $\tilde{f}_n$ 有不动点 $x_n \in K$，

使 $\|f(x_n)-x_n\|\leqslant 1/n$。因为 f 紧，所以 $\{f(x_n)\}$ 有收敛子序列 $\{f(x_{n_j})\}$，其极限记为 y。因为 $\|f(x_{n_j})-x_{n_j}\|\leqslant 1/n_j$，且当 $n_j\to\infty$ 时，$x_{n_j}\to y$，所以由 f 的连续性可得 $f(y)=y$，即 y 是所期望的不动点。

定理 (2.4.2) 另一个有用的推论是

(2.4.4) **紧映射的延拓定理** 设 U 是 Banach 空间 X 的开子集，$f\in K(U,Y)$。那么，对任给 $\delta>0$，f 可以延拓成紧算子 $\tilde{f}\in K(X,Y)$，并且对一切 $x\in X$，$d(\tilde{f}(x),\overline{\mathrm{co}}f(U))\leqslant\delta$。

证明：由定理 (2.4.2)，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x)$。又据 Tietze 延拓定理，每个 $f_n(x)$ 可以保范延拓成 $\tilde{f}_n: X\to Y_{\delta,n}$，因而 $\tilde{f}_n$ 是紧映射。现在考虑映射 $\tilde{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{f}_n(x)$。对 $x\in X$，

$$d(f_0(x);\overline{\mathrm{co}}f(U))\leqslant\|f_0-f\|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon/2^n=\varepsilon.$$

因为对 $x\in\overline{\mathrm{co}}f(U)$，

$$x=\sum_{i=1}^{p}t_if_0(x_i),\qquad\sum_{i=1}^{p}t_i=1,\qquad x_i\in U.$$

所以

$$\|x-\sum t_if(x_i)\|\leqslant\sum t_i\|f_0(x_i)-f(x_i)\|\leqslant\varepsilon.$$

故也有 $d(\overline{\mathrm{co}}f_0(U),\overline{\mathrm{co}}f(U))<\varepsilon$。取 $2\varepsilon=\delta$，则 $\tilde{f}$ 就是所求的延拓。这是因为

$$\begin{aligned}d(\tilde{f}(x),\overline{\mathrm{co}}f(U))&\leqslant\|\tilde{f}(x)-f_0(x)\|+d(f_0(x),\overline{\mathrm{co}}f(U))\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}+\varepsilon=2\varepsilon<\delta.\end{aligned}$$

下面给出一些附注，说明算子紧性与已经介绍过的其它基本概念之间的关系。

(2.4.5) 设 $f\in M(U,Y)$ 全连续，其中 U 是自反 Banach 空间 X 的子集，那么 f 紧。

证明：设 $\{x_n\}$ 是 U 的有界序列，那么，根据 X 的自反性，

$\{x_n\}$ 有弱收敛子列 $\{x_{n_j}\}$，由 f 的全连续性推出 $\{f(x_{n_j})\}$ 在 Y 的范数拓扑意义下收敛，所以 f 紧.

(2.4.6) 设 U 是 X 的开子集，$f\in K(U, Y)$ 在 U 中 Fréchet 可微. 那么，对于固定的 $x_0\in U$，Fréchet 导算子 $f'(x_0)\in L(X, Y)$ 是紧线性算子.

证明：设 $f'(x_0)$ 不紧. 如用 σ_1 记 X 中单位球，那么 $f'(x_0)(\sigma_1)$ 在 Y 中没有紧闭包. 因而存在序列 $\{h_i\}$，$\|h_i\|=1$，以及实数 $\varepsilon>0$，使得 $\|f'(x_0)\{h_i-h_j\}\|\geqslant\varepsilon(i\neq j)$. 另一方面，对充分小的 $\beta>0$，由 f 在 x_0 点 Fréchet 可微推出

$$
\begin{aligned}
&\|f(x_0+\beta h_i)-f(x_0+\beta h_j)\|\\
\geqslant&\ \beta\|f'(x_0)h_i-f'(x_0)h_j\|\\
&-\|f(x_0+\beta h_i)-f(x_0)-\beta f'(x_0)h_i\|\\
&-\|f(x_0+\beta h_j)-f(x_0)-\beta f'(x_0)h_j\|\\
\geqslant&\ \beta\varepsilon-o(|\beta|).
\end{aligned}
$$

因为 ε 与 β 无关，从最后的不等式推出 $\{f(x_0+\beta h_i)\}$ 没有收敛子序列，这就导出矛盾.

2.4C 紧微分算子

富有启发的是，具有某种确定"光滑性"的算子一般是紧算子. 作为一个很简单的例子，我们考察定义在 $C[0,1]$ 上的算子 $Tf(x)=\int_0^x f(s)ds$. 显然，Tf 在 $(0,1)$ 上可微，于是 T 具有下述意义下的光滑性：T 映连续函数成可微函数. 另一方面，根据 Arzela-Ascoli 定理 (1.3.13)，T 紧. 仔细考察 1.4 节中的估计式，这个论证可以推广到 2.2D 中所定义的更一般的抽象算子.

(i) 作为例子，考查一类抽象算子，它是用 2.2 节 Schauder 反演方法对拟线性椭圆型微分算子定义的. 在这方面，我们证明如下结果：

(2.4.7) 引理 设算子 $A(v,u)$ 映 $X\times Z\to Y$，其中 Z 是 X 的子空间，Z 被紧嵌入 X. $A(v,u)$ 对 u 线性，对固定的 $u\in Z$，对

v 连续．那么，如果对 $\|v\|_X \leqslant R$，线性方程 $A(v, u) = g$ 有且仅有一个解 $u = T_g v$，且满足先验估计

(2.4.8) $$\|u\|_Z \leqslant c(R)\|g\|_Y,$$

其中 $c(R)$ 是与 v 无关的正常数，那么 $T_g: X \to X$ 是紧映射．

证明： 因为 $Z \subset X$，由 (2.2.13) 就推出 T_g 的连续性．对 X 中任意有界集 σ，为证明 $\overline{T_g(\sigma)}$ 紧，假定 $\{v_n\}$ 是 σ 的任意序列，如果 $u_n = T_g(v_n)$，那么估计式 (2.4.8) 给出

$$\|T_g(v_n)\|_Z \leqslant c(\sigma)\|g\|_Y,$$

其中 $c(\sigma)$ 是仅与 σ 有关的常数．因为 Z 被紧嵌入 X，所以 Z 中任何有界集在 X 中紧．于是 $T_g(v_n)$ 在 X 中有收敛子序列，从而 T_g 是紧映射．

对于定义在有界域 Ω 上的，具有法向齐次边界条件的椭圆型微分算子，由估计式 (1.4.26) 和 (1.4.28) 可导出 (2.4.8) 以及紧性，这对于把引理 (2.4.7) 用于

$$(Z, X) = (C^{2m,\alpha}(\Omega),\ C^{\alpha}(\Omega)) \qquad 0<\alpha<1$$

或

$$(Z, X) = (W_{2m,p}(\Omega),\ L_p(\Omega)) \qquad 1<p<\infty.$$

时是必需的．

(ii) 其次，我们考察另一类算子的紧性，这类算子是由共轭方法隐式定义的．设 A 是从 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega) \to W_{-m,q}(\Omega)$ 的有界算子，它定义如下：

$$(Au, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_\Omega A_\alpha(x, u, Du, \cdots, D^{m-1}u) D^\alpha \varphi.$$

(2.4.9) **定理** 设连续函数 $A_\alpha(x, u, \cdots, D^{m-1}u)$ 满足 (2.2.7) 的增长条件(＊)，那么 A 是从 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega) \to W_{-m,q}(\Omega)$ 的紧算子．事实上，它还映 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛序列成强收敛序列．

证明： 设 u_n 在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛于 u，那么

$$\|Au_n - Au\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |(Au_n - Au, \varphi)|,$$

$$(Au_n - Au, \varphi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_\Omega [A_\alpha(x, u_n, \cdots) - A_\alpha(x, u, \cdots)] D^\alpha \varphi$$

$$\leqslant \sum k_\alpha \|A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^{m-1}u_n) - A_\alpha(x, u, \cdots, D^{m-1}u)\|_{L_{q_\alpha}}.$$

其中 q_α 的选取使 $A_\alpha(u, u, \cdots, D^{m-1}u) \in K(\mathring{W}_{m-1,p^*}, L_{q_\alpha})$，$p^* < Np/(N-p)$．如果在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中 u_n 弱收敛于 u，由 (1.3.35)，在 $\mathring{W}_{m-1,p^*}$ 中

u_n 强收敛于 u. 另一方面,根据增长限制条件的假设和引理(2.2.7),$A_\alpha(x, u, \cdots, D^{m-1}u)$ 是从 $\mathring{W}_{m-1,p} \to L_{q\alpha}$ 的连续函数. 于是当 $n \to \infty$ 时, $\|Au_n - Au\| \to 0$, 所以 A 是紧映射.

2.5 梯度映射

作用于 Banach 空间的各类线性算子不难推广到更一般的(非线性)情形.下面考虑作用于 Hilbert 空间的自共轭算子的推广.

(2.5.1) 定义 设 $f \in C(U, X^*)$, 其中 U 是 X 的开子集, X^* 是 X 的共轭空间, 如果存在一个实值泛函 $F(x) \in C^1(U, \mathbb{R}^1)$, 使得对一切 $x \in U$, 它的 Fréchet 导算子 $F'(x) = f(x)$, 就称 f 是梯度算子, F 称作 f 的原函数,有时我们也记 $f(x) = \text{grad}\, F(x)$.

2.5A 等价定义

为说明梯度算子是自共轭算子的推广,我们证明

(2.5.2) 定理 设 X 是 Banach 空间, U 是 X 中包含原点的凸集, $f \in C^1(U, X^*)$, 那么下面的命题等价:

(i) f 是梯度算子;

(ii) $\int_C f(x(t))dx(t)$ 与道路 C 无关, 只要 C 是 U 中简单可求长曲线;

(iii) $\int_0^1 (f(sx), x)ds - \int_0^1 (f(sy), y)ds = \int_0^1 (f(z(s)), x - y)ds$, 其中 $z(s) = sx + (1-s)y$, $x, y \in U$;

(iv) 对 $x \in U$, $f'(x) \in L(X, X^*)$ 是自共轭算子,

证明 (i) ⇒ (ii). 如果 $f(x)$ 是梯度算子,令 $f(x) = F'(x)$, 并设 C 取参数形式 $C = \{x(t) | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, 那么

$$\int_C f(x(t))dx(t) = \int_C F'(x(t))dx(t) \tag{2.5.3}$$
$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x(t))dt = F(x(1)) - F(x(0)).$$

(ii) ⇒ (iii): 因为 x, y 和原点 0 都属于 U, 从而 x 和 y 之间

在U中有两条道路：（1）C_1：连接原点到x，原点到y的直线段；（2）C_2：连接x和y的直线段．据(2.5.3)，对$x(t)=tx$和$y(t)=ty$，

$$\int_{C_1} f(x(t))dx(t)=\int_0^1 \frac{d}{dt}F(tx)dt-\int_0^1 \frac{d}{dt}F(ty)dt$$

$$=\int_0^1 (f(tx),x)dt-\int_0^1 (f(ty),y)dt.$$

用同样的方法，令$z(t)=tx+(1-t)y$，

$$\int_{C_2} f(z(t))dz(t)=\int_0^1 \frac{d}{dt}F(z(t))dt$$

$$=\int_0^1 (f(z(t)),x-y)dt.$$

另一方面，据(ii)，$\int_{C_1} f(x(t))dx(t)=\int_{C_2} f(z(t))dz(t)$．这就证明了(iii)．

(iii)$\Rightarrow$(iv)：我们证明，从(iii)可推出$f(x)$是梯度算子，且$F(x)=\int_0^1 (f(sx),x)ds$．事实上，从(iii)推出，对这样定义的$F(x)$，

$$F(x+\varepsilon h)-F(x)=\varepsilon\int_0^1 (f(x+s\varepsilon h),h)ds.$$

令$\varepsilon\to 0$，我们求出$F(x)$的Gateaux导算子是$dF(x,h)=(f(x),h)$．因为$f(x)\in C^1(U,X^*)$，$F(x)\in C^2(U,R^1)$，由(2.1.28)，$F''(x)(h_1,h_2)=f'(x)(h_1,h_2)$对$h_1$，$h_2$对称．

(iv)$\Rightarrow$(i)：定义$F(x)=\int_0^1 (f(tx),x)dt$，我们证明，可从(iv)推出$F(x)$可微且$F'(x)=f(x)$．实际上

$$(\dagger)\qquad F(x+h)-F(x)=\int_0^1 (f(tx+th),h)dt$$

$$+\int_0^1 (f(tx+th)-f(tx),x)dt.$$

现在

$$\int_0^1 (f(tx+th)-f(tx),x)dt$$

$$=\int_0^1 \left\{\int_0^t \frac{d}{ds}(f(tx+sh),x)ds\right\}dt$$

$$=\int_0^1\int_0^t (f'(tx+sh)h,x)dsdt$$

$$\overset{\text{用(iv)}}{=} \int_0^1 dt\int_0^t (f'(tx+sh)x,h)ds$$

$$\overset{\text{交换积分次序}}{=} \int_0^1 ds\int_s^1 (f'(tx+sh)x,h)dt$$

$$=\int_0^1 (f(x+sh)-f(sx+sh),h)ds.$$

由(†)，$F(x+h)-F(x)=\int_0^1 (f(x+sh),h)\,ds$，因而经过简单的计算可得

$$|F(x+h)-F(x)-(f(x),h)|=o(\|h\|),$$

于是 $F'(x)=f(x)$.

附注:

如果假设 f 连续但不必属于 C^1，不难证明 (i)—(iii) 等价.

2.5B 基 本 性 质

一件重要的事情是：确定那些算子，在它们的作用下梯度算子仍是梯度算子．一些重要的情形如下：

(2.5.4) 设 U 是 Hilbert 空间的开子集，$f(x)$ 是定义在 U 上，在 H 中取值的梯度算子．若 A 是自共轭线性算子，那么 AfA 是梯度算子．它的原函数是 $F(A(x))$，其中 $F'(x)=f(x)$.

证明：令 $\bar{F}(x)=F(A(x))$ 再计算 $(d/dt)\bar{F}(x+th)|_{t=0}$.

梯度算子 $f\in M(U,H)$ 在投影运算下仍是梯度算子．于是，如果 $H=X_1\oplus X_2$ 是 H 的直和分解，π 是 $H\to X_1$ 的射影，那么 $\pi f(x)$ 是 X_1 到自身的梯度算子．更一般地，

(2.5.5) 如果 $H=Y_1\oplus Y_2$ 是 Hilbert 空间 H 的直和分解，且存在一个可微映射 $g\in C(Y_2,Y_1)$，$Y_1=g(Y_2)$．$\pi:H\to Y_2$ 记投影

算子，假定 $(I-\pi)f(y_1+y_2)=0$. 那么，如果 $f(x)$ 是梯度算子，则 $f_1(y_2)=\pi f(y_2+g(y_2))$ 也是梯度算子.

证明：令 $F'(x)=f(x)$，我们证明 $G(y_2)=F(y_2+g(y_2))$ 是 $f_1(y_2)$ 的原函数. 事实上，对 $h\in Y_2$ 应用所述假设得

$$(G'(y_2),h)=(f(y_2+g(y_2)),\ h+g'(y_2)h)$$
$$=(\pi f(y_2+g(y_2)),\ h+g'(y_2)h).$$

但是因为 $g'\in L(Y_2,Y_1)$，Y_1 和 Y_2 是互补的子空间，所以 $(\pi f(y_2+g(y_2)),\ g'(y_2)h)=0$. 于是

$$(G'(y_2),h)=(\pi f(y_2+g(y_2)),h)=(f_1(y_2),h),$$

这就是所要证明的.

在梯度算子 $f(x)$ 和它的原函数 $F(x)$ 之间有重要的联系. 例如，使 $f(x)=0$ 的点称作 $F(x)$ 的临界点，可以通过研究实值函数 $F(x)$ 的"图象"来求得关于 $f(x)$ 的零点的信息. 但是，由于 $F(x)$ 可以定义在无穷维 Banach 空间上，关于临界点就出现某些困难. 特别，定义在 X 上的 C^1 泛函 $F(x)$ 不一定能达到极小，甚至当 $F(x)$ 有下界，对 $-\infty<a,b<\infty$，$F^{-1}[a,b]$ 有界时亦是如此. 在第六章要详尽地讨论这个课题. 现在，对梯度算子 $f\in M(X,X^*)$ 指出如下有用的结果:

(2.5.6)设 $F(x)$ 是梯度算子 $f\in M(X,X^*)$ 的原函数，$F(0)=0$，那么

(i) $F(x)=\int_0^1(f(sx),x)ds$.

(ii) 如 $f(x)$ 全连续，那么对 X 中的弱收敛而言 $F(x)$ 连续.

(iii) 设 f 是多重线性算子 $f\in L_N(X,X^*)$ 的配极变换，使 $l(x_1,\cdots,x_{n+1})=(\tilde{f}(x_1,\cdots,x_n),x_{n+1})$ 作为 $L_{N+1}(X,\mathbf{R}^1)$ 中的多重线性映射是对称的. 那么 $f(x,x,\cdots,x)$ 是梯度映射，它的原函数 $F(x)=(1/(n+1))(f(x),x)$.

(iv) $F(x)$ 是凸映射的必要充分条件是单调性条件成立：对一切 $x,y\in X$，$(f(x)-f(y),x-y)\geqslant 0$.

证明：(i). 根据 (2.5.2(iii))，如令 $\Phi(x)=\int_0^1(f(sx),x)ds$，那么 $(d/d\varepsilon)\Phi(x+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0}=(f(x),h)$. 因为这等式对一切 $h\in X$ 成立，故

$\Phi'(x)=f(x)$;又因$\Phi(0)=0$,从 Gateaux 微分的唯一性推出 $F(x)\equiv\Phi(x)$.

(ii). 如果 f 是梯度映射, 在 X 中 x_n 弱收敛于 x, 那么由 (2.5.2(iii)), $F(x_n)-F(x)=\int_0^1(x_n-x,\ f(x_n(s)))ds$,其中 $x_n(s)=x+s(x_n-x)$. 记

$$(x_n-x,f_n(s))=(x_n-x,f(x_n(s))-f(x))+(x_n-x,f(x)),$$

我们指出,因 $\{\|x_n\|\}$ 一致有界,所以

$$\lim_{n\to\infty}\{F(x_n)-F(x)\}=\lim_{n\to\infty}\int_0^1(x_n-x,f_n(s))ds=0.$$

事实上,因 f 全连续, 所以对每个 $s\in[0,1]$, $f(x_n(s))$ 强收敛到 $f(x)$, 由此推出等式右端的极限是 0 (当右端的积分一致有界时).

(iii) 令 $\Phi(x)=(1/(n+1))\ (f(x),x)$, 那么由

$$\Phi(x_1,\cdots,x_{n+1})=(f(x_1,\cdots,x_n),x_{n+1})$$

对称的假设, 我们得到, 对任 $h\in X$, $(d/d\varepsilon)\ \Phi(x+\varepsilon h)|_{\varepsilon=0}=(f(x),h)$. 因而 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数.

(iv) 首先我们假定对一切 $x,y\in X$, $(f(x)-f(y),x-y)\geqslant 0$ (亦即 f 是单调算子), 下面导出 $F(x)$ 的凸性. 事实上, 不失一般性, 我们可以设 $F(0)=0$. 于是由上面的 (i), 对任何 $t\in[0,1]$,

$$F(tx+(1-t)y)=F(y)+t\int_0^1(x-y,f(y+st(x-y)))ds$$

$$\leqslant F(y)+\int_0^1(x-y,f(y+s(x-y)))ds.$$

最后一个不等式可从 f 的单调性推出. 根据 (2.5.2(iii)),上述不等式的右端可以写成 $t\{F(x)-F(y)\}$,于是

$$F(tx+(1-t)y)\leqslant tF(x)+(1-t)F(y).$$

现在来证明逆命题, 即如 $F(x)$ 凸, 那么对一切 $x,y\in X$, $(f(x)-f(y),x-y)\geqslant 0$. 为此,我们首先证明从 $F(x)$ 的凸性可以推出

(*) $\qquad F(x)+(f(x),y-x)\leqslant F(y)\qquad$ 对一切 $x,y\in X$.

盖因从 $F(x)$ 的凸性可推出,对一切 $x,y\in X$ 和 $s\in[0,1]$,

$$sF(x)+F(x+s(y-x))-F(x)\leqslant sF(y).$$

用 s 同除两端并令 $s\to 0$, 证得(*). 其次, 我们在(*)中交换 x, y, 又证得

(**) $\qquad F(y)+(f(y),x-y)\leqslant F(x).$

将(*)和(**)相加,就得 $(f(x)-f(y),x-y)\geqslant 0$, 此即需证者.

2.5C 特殊的梯度映射

一般说来, 如果一个微分算子 A 是某个泛函的 Euler-Lagra-

nge 导算子（在 1.1C 一节的意义下），那么可以把 A 抽象地表成一个梯度映射 $\mathfrak{A}$. 为使 $\mathfrak{A}$ 定义在一个 Sobolev 空间内，A 的项应满足一定的增长限制条件. 作为一个有趣的、非平凡的例子，我们考虑一个偏微分方程，即在 1.3B 一节中给出的 von Kármán 方程. 众所周知，弹性形变方程是作为 Euler-Lagrange 方程导出的，所以似乎可以期望相应的算子方程也仅与梯度算子有关. 现在证明，我们的计算指出事实上的确如此.

(2.5.7) 方程 (1.1.12) 的弱解和 Sobolev 空间 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中的算子方程 $u+Cu=\lambda Lu$ 的解一一对应，其中 L 是映 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的自共轭算子. Cu 是映 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的梯度映射. 此外，还存在一个映 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的双线性映射 $C(u,v)$，它由下面的(2.5.9′)定义，使对某个固定的 $F_0\in\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$，有 $Lu=C(F_0,u)$ 和 $C(u,C(u,u))=Cu$.

证明：首先指出，不失一般性，可以在方程 (1.1.12) 中令 $\varepsilon=1$. 如用 F_0 记方程 $\Delta^2F=0$, $D^\alpha F|_{\partial\Omega}=\lambda\psi_0$ 的解，我们可以把 (1.1.12) 的解 (u,F) 写成 $(u,f+\lambda F_0)$ 的形式，于是 (u,f) 满足方程组

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2 f=-\frac{1}{2}[u,u],\\
(2.5.8)\qquad &\Delta^2 u=\lambda[F_0,u]+[f,u],\\
&D^\alpha u=D^\alpha f=0,\quad |\alpha|\leqslant 1,
\end{aligned}
$$

其中 $[f,g]=(f_{yy}g_x-f_{xy}g_y)_x+(f_{xx}g_y-f_{xy}g_x)_y$. 于是，根据 1.5 节中给出的弱解的定义和在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中选择内积为

$$(u,v)_{2,2}=\int_\Omega(u_{xx}v_{xx}+2u_{xy}v_{xy}+u_{yy}v_{yy}),$$

再因为 $\frac{1}{2}[u,u]=(u_xu_{yy})_x-(u_{xy}u_x)_y$，那么方程组 (2.5.8) 的弱解 (u,f) 就可以写成点对 (u,f)，对一切 $\varphi,\eta\in C_0^\infty(\Omega)$，它满足下面两个积分方程:

$$
\begin{aligned}
(2.5.9)\qquad &(u,\eta)_{2,2}=\int_\Omega\{(\bar f_{xy}u_y-\bar f_{yy}u_x)\eta_x+(\bar f_{xy}u_x-\bar f_{xx}u_y)\eta_y\},\\
&(f,\varphi)_{2,2}=2\int_\Omega\{u_xu_{yy}\varphi_x-u_xu_{xy}\varphi_y\},
\end{aligned}
$$

其中 $\bar f=\lambda F_0+f$. 现在用**对偶方法**(参看 2.2D 节 (iii)) 定义双线性算子 $C(\omega,g)$ 如下:

对 $g,\omega,\varphi\in H$, (2.5.9′) $(C(\omega,g),\varphi)=\int_\Omega\{(g_{xy}\omega_y-g_{yy}\omega_x)\varphi_x$

$+(g_y\omega_x - g_{xx}\omega_y)\varphi_y\}$. 不难看出,算子 C 有如下性质:

(i) $(C(\omega, g), \varphi)$ 是关于 g, ω, φ 对称的泛函(由分部积分推出).

(ii) $(C(\omega, g), \varphi) \leqslant K\|g\|_{2,2}\|\omega\|_{1,4}\|\varphi\|_{1,4}$, 其中 K 是绝对常数, 这可由 Sobolev 嵌入定理和 Hölder 不等式导出. 于是方程组 (2.5.9) 可以写成如下形式(按 H 的内积),

$$(u, \eta) = (C(u, f), \eta), \quad (f, \varphi) = -(C(u, u), \varphi).$$

因为 η, φ 任意,我们又有

$$u = C(u, f) + \lambda C(u, F_0), \quad f = -C(u, u).$$

令 $C(u) = C(u, C(u, u))$ 和 $Lu = C(u, F_0)$, 它们又可改写为

(2.5.10) $\qquad$ (a) $u + Cu = \lambda Lu$, (b) $f = -C(u, u)$.

这里理解为: (a) 的任何解 u 通过(b)唯一确定 f.

因为 $(C(\omega, g), \varphi)$ 关于 ω, g 和 φ 对称,不难得知, 上面定义的 $C(u)$ 是梯度映射. 实际上,根据(2.5.2)式(2.5.6), 经过简短的计算可知,如果取 $I(u) = \frac{1}{4}(C(u), u)$, 那么对一切 $u, v \in H$, $d(I(u + \varepsilon v))/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = (Cu, v)$. 基于同样的理由,算子 $Lu = C(u, F)$ 自共轭.

下面是一个简单但很有意思的例子, 它涉及到定义在区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上的半线性算子 $Au = \Delta u + f(x, u)$. 只要函数 $f(x, u)$ 满足光滑性的要求和一定的增长限制条件, 这样的算子总可以表作映 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 到自身的一个梯度映射. 事实上, 用 2.2 节中的对偶方法,设 $\tilde{f}(u) = f(x, u)$ 定义一个从 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 到 L_p 的有界算子, $p < (N+2)/(N-2)$. 那么由公式

$$(\mathfrak{A}u, v) = \int_\Omega \{\nabla u \cdot \nabla v - f(x, u)v\}, \text{ 对 } v \in C^\infty_0(\Omega)$$

隐含地定义出抽象算子 $\mathfrak{A}u$. 不难验证, $\mathfrak{A}u$ 是梯度映射, 它的原函数是

$$I(u) = \int_\Omega \left\{\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(x, u)\right\} dv,$$

其中 $Fu(x, u) = f(x, u)$.

2.6 非线性 Fredholm 算子

设 f 是 Banach 空间 X, Y 之间的光滑映射, 我们可以根据它的导算子 $f'(x)$ 的性质来研究 f. 在 2.3 节对复解析映射, 在 2.5

节对梯度映射就采用了这个办法．在这方面，基于 1.3F 一节的结果，我们考虑如下的等价定义．

2.6A 等价定义

(2.6.1) **定义** 设 X，Y 是 Banach 空间，U 是 X 的连通开子集，映射 $f\in C^1(U, Y)$ 称为非线性 Fredholm 算子．如果对每个 $x\in U$，f 的 Fréchet 导算子 $f'(x)\in L(X, Y)$ 是线性 Fredholm 映射(参看 1.3F 节)．这时，f 的指标 ind f 定义为

$$\text{ind } f(x) = \text{ind } f'(x) = \dim \text{Ker } f'(x) - \dim \text{coker } f'(x),$$

$$\text{对 } x\in U.$$

(2.6.2) $\text{ind} f(x)$ 与 $x\in U$ 无关．事实上，因为 $f'(x)$ 对 x 连续，$\text{ind } f: U\to \mathbf{Z}$ 连续；又因 U 是连通集，由此推出当 $x\in U$ 时 $\text{ind} f(x)$ 是常数，于是 $\text{ind } f(x)$ 与 $x\in U$ 无关．

(2.6.3) 不难举出 Fredholm 映射的例子和计算它们的指标．

(a) 有限维 Banach 空间间的任意光滑映射都是 Fredholm 映射．

(b) Banach 空间间的任何微分同胚是零指标的 Fredholm 映射．

(c) 如果 $f(x)$ 是 Fredholm 映射，$C(x)\in C^1(U, Y)$ 是紧算子，那么 $f+C$ 是 Fredholm 算子，且

$$\text{ind } (f+C) = \text{ind } f.$$

这个结果可从 (2.4.6) 导出．事实上，因为 C' 紧和 $\text{ind}(f') = \text{ind} f$，所以

$$\text{ind } (f+C) = \text{ind } (f'+C') = \text{ind } (f').$$

(2.6.4) **定理** 设 $f\in C^1(U, Y)$，那么，对 Banach 空间 Y 的任一开子集 U，下面的命题等价：

(i) f 是 Fredholm 算子．

(ii) 对每个固定的 $x\in U$，对任意 $y\in Y$，下面的不等式成立：

$$(2.6.5) \qquad \|y\| \leqslant C_1\|f'(x)y\| + |y|_0,$$

$$\|y\| \leqslant C_2\|f'^*(x)y\| + |y|_1, \tag{2.6.6}$$

其中常数 C_1 和 C_2 与 y 无关，$|y|_0$ 和 $|y|_1$ 是 Y 上定义的紧半范.

证明: 根据 (1.3.37)，不等式 (2.6.5) 和 (2.6.6) 推出，对每个 $x \in U$，$f'(x)$ 值域闭，且 $\dim \ker f'$ 和 $\dim \operatorname{Ker} f'^*$ 有限. 反之，从 (1.3.37) 还推出，对每个 $x \in U$，任何线性 Fredholm 映射 $f'(x) \in L(X, Y)$ 满足不等式 (2.6.5) 和 (2.6.6)，于是 (i) 和 (ii) 等价.

2.6B 基本性质

可以把 (1.6.1) 中讲的 Morse 定理和 Sard 定理推广到非线性 Fredholm 映射，这个推广将在第三章作出. 作为这个方向上的第一步，我们定义微分算子的正则点和奇异点的概念.

(2.6.7) 定义 设 $f \in C^1(U, Y)$，$x \in U$，如果 $f'(x)$ 是 $L(X, Y)$ 中满值线性映射，那么 x 称作 f 的正则点. 如果 $x \in U$ 不是正则点，就称作奇异点. 类似地，由考察集 $f^{-1}(y)$ 来定义 f 的正则值和奇异值 y：如果 $f^{-1}(y)$ 有奇异点，那么 y 称作奇异值，不是奇异值的其它值称作正则值.

和有限维情形一样，我们证明

(2.6.8) 定理 Fredholm 算子 $f \in C^1(X, Y)$ 的奇异点的集合是闭集.

证明: 设 $S = \{x \mid f'(x)$ 不满值$\}$，$x_n \in S$ 且 $x_n \to \bar{x}$. 根据在小扰动下 f 的指标的连续性，对充分大的 n，$\operatorname{ind} f'(x_n) = \operatorname{ind} f'(\bar{x})$. 又由第一章定理 (1.3.38)，如果 $\|B\|$ 充分小，A 是 Fredholm 算子，那么

$$\dim \operatorname{coker}(A + B) \leqslant \dim \operatorname{coker} A, \tag{2.6.9}$$

因而对充分大的 n，

$$\dim \operatorname{coker} f'(\bar{x}) \geqslant \dim \operatorname{coker} [f'(\bar{x}) + (f'(x_n) - f'(\bar{x}))] \geqslant \dim \operatorname{coker} f'(x_n) \geqslant 1. \tag{2.6.10}$$

于是 $f'(\bar{x})$ 不是满值线性映射，故 $\bar{x} \in S$.

2.6C Fredholm 微分算子

在微分方程组的研究中出现 Fredholm 算子类是很自然的.

因为很多微分算子(可能补充上附加的边界条件)和它们的共轭算子只有有限维解子空间。

假定给出非线性椭圆型算子

(2.6.11) $$N(u) = F(x, u, \cdots, D^{2m}u),$$

定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上,Dirichlet 边界条件为 $D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0$, $|\alpha| \leqslant m-1$. 那么,我们可以把 N 看作 $C^{2m,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ 的映射,只要函数 $F = F(x, \xi^1, \cdots, \xi^{2m})$ 是 $(\xi^1, \cdots, \xi^{2m})$的 C^1 函数. 不难算出,$N(u)$ 在 u_0 的 Fréchet 导算子是

(2.6.12) $$N'(u_0)v = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} F_\alpha(x, u_0, \cdots, D^{2m}u_0)D^\alpha v.$$

根据 Schauder 估计式(1.4.27)和(1.4.28),存在可能与 u_0 有关的常数 c,使

(2.6.13) $$\|v\|_{C^{2m,\alpha}} \leqslant c\{\|N'(u_0)v\|_{C^{0,\alpha}} + \|v\|_{C^{0,\alpha}}\}.$$

于是,$\|v\|_{C^{0,\alpha}}$ 是定义在 $C^{2m,\alpha}(\Omega)$ 上的紧半范. $N'(u)$ 在 $C^{0,\alpha}$ 中有闭的值域且有有限维的核. 为证 N 是非线性 Fredholm 算子,还应验证,除 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 的一个有限维子空间外,方程组

(2.6.14) $$N'(u_0)v = f, D^\alpha v|_{\partial\Omega} = 0, f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$$

可解. 为此,我们注意到算子 $L_1(v) = \sum_{|\alpha|=2m} F_\alpha(x, u_0, \cdots, D^{2m}u_0)D^\alpha v$ 映 $C^{2m,\alpha}(\Omega)$ 到 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 上,并且一对一. 另一方面,看作从 $C^{2m,\alpha}(\Omega)$ 到 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 的映射,$L_2(v) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m-1} F_\alpha(x, u_0, \cdots, D^{2m}u_0)D^\alpha v$ 紧. 从而 $N'(u_0) = L_1 + L_2 = L_1\{I + L_1^{-1}L_2\}$ 可以分解为一个恒等算子的紧扰动与一个同胚映射的乘积. 把紧算子理论用于 $I + L_1^{-1}L_2$,我们看到,只要 f 和 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ 中一个有限维子空间正交,那么方程组(2.6.14)可解. 于是 N 是零指标的非线 Fredholm 算子.

2.7 正常映射

2.7A 等价定义

算子 $f \in C(X, Y)$ 称作为正常算子,如果 Y 中任一紧集 C 的原象 $f^{-1}(C)$ 是 X 中紧集. 这个概念的重要性在于:对任何固定的 $p \in Y$,算子 f 的"正常性"限制了解集 $S_p = \{x | x \in X, f(x) = p\}$ 的"大小". 于是直接得出,在 $L(X, Y)$ 中只有正常线性算子既一对一又有闭的值域. 更一般地,我们证明

(2.7.1) 定理 设 $f\in C(X,Y)$，那么如下命题等价：

(i) f是正常算子.

(ii) f是闭映射，而且对任何固定的 $p\in Y$，解集 $S_p=\{x\mid x\in X,\ f(x)=p\}$ 是紧集.

(iii) 如果 X 和 Y 有限维，那么 f 强制(即当 $\|x\|\to\infty$ 时，$\|f(x)\|\to\infty$).

证明: (i) ⇒ (ii): 因为任何单点集 $p\in Y$ 是紧集，所以由 f 的正常性推出 S_p 是紧集. 为证 f 闭，设K是 X 的闭子集，$x_n\in K$，$y_n=f(x_n)\to y$. 那么，因为 $\{y_n\}$ 的闭包 $\{\bar{y}_n\}$ 是紧集，由 f 的正常性得出 $\sigma=f^{-1}(\overline{\{y_n\}})$ 是紧集. 于是(必要时取子序列)，由 $x_n\in\sigma$ 可得 x_n 收敛到某点 $\bar{x}$. 因为K是闭集，所以 $\bar{x}\in K$. 从 f 的连续性得出 $f(\bar{x})=y$.

(ii) ⇒ (i): 现设 f 是闭映射，而且对任意的 $p\in Y$，S_p 紧. 那么，为证 f 是正常算子，我们令C是Y中紧子集，记 $f^{-1}(C)=D$. 设D由闭集族 D_α 所覆盖，D_α 有有限交性质. 我们证明 $\bigcap\limits_{\alpha} D_\alpha\neq\phi$，由此$D$是紧集. 为此，令 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_k)=\beta$ 是 $\{\alpha\}$ 的任意子集，那么 $E_\beta=\bigcap\limits_{i=1}^{k} D_{\alpha_i}$ 是非空闭集，从而 $f(E_\beta)$ 是闭集，$C=\bigcup\limits_{\beta} f(E_\beta)$. 因为对任何有限子集 $\gamma\in 2^\alpha$，

$$\bigcap_{\gamma} f(E_\beta)\supset f\left(\bigcap_{\gamma} E_\beta\right)\neq\phi,$$

闭集族 $f(E_\beta)$ 有有限交性质. 于是从C的紧性推出 $\delta=\bigcap\limits_{\beta} f(E_\beta)\neq\phi$.现在令 $y\in\delta$ 和 $D_y=D\cap f^{-1}(y)$，使 $D_y\neq\phi$. 根据假设条件，$f^{-1}(y)$ 紧，集合 $D_y=\bigcup\limits_{\alpha}(D_\alpha\cap f^{-1}(y))$ 也紧. 于是只需证明 $\{D_\alpha\cap f^{-1}(y)\}$ 有有限交性质，因为这样一来就有

$$\bigcap_{\alpha} D_\alpha\supset\bigcap_{\alpha}\{D_\alpha\cap f^{-1}(y)\}\neq\phi.$$

最后，对$\{\alpha\}$的任意有限子集 $\gamma=\{\alpha_1\cdots,\alpha_j\}$，因 $y\in\bigcap\limits_{\beta\in 2^\alpha} f(E_\beta)$，

所以

$$\bigcap_{i=1}^{j} D_{\gamma_i} \cap f^{-1}(y) = E_j \cap f^{-1}(y) \neq \phi.$$

(iii)$\Longleftrightarrow$(ii)：设 X，Y 有限维，那么由 f 的正常性推出，Y 中有界子集的原象为 X 中有界集，这正是 f 强制的换一种说法．反之，如果 f 强制，C 是 Y 的任一紧子集，那么 $f^{-1}(C)$ 有界且在 X 中相对紧．

对于作用于无穷维 Banach 空间之间的某些类型的算子 $f \in C(X, Y)$ 来说，由强制性可以推出正常性．更明确些，我们证明正常性的如下判别法：

(2.7.2) 设 $f \in C(X, Y)$ 当 $\|x\| \to \infty$ 时，$\|f(x)\| \to \infty$．如果

(i) f 是一个正常映射的紧扰动；或者

(ii) X 是自反空间，从 x_n 在 X 中弱收敛于 x 和 $\{f(x_n)\}$ 强收敛，必能推出 x_n 强收敛于 x．那么 f 是正常映射．

证明： (i) 令 $f(x_n) = y_n$，在 Y 中 $y_n \to y$．如果 $f(x) = g(x) + C(x)$，其中 g 是正常映射，C 是紧算子，由 f 的强制性推出 $\{x_n\}$ 有界，从而(可能在选子序列后)$\{C(x_n)\}$ 收敛．于是，因为序列 $g(x_n) = y_n - Cx_n$ 收敛，同时 g 又是正常映射，所以 $\{x_n\}$ 有收敛子序列 $\{x_{n_j}\}$，其极限记为 $\bar{x}$．从 f 的连续性推出 $f(\bar{x}) = y$；于是 f 正常．

(ii) 如果 X 自反，且在 Y 中 $f(x_n) \to y$，那么由 f 的强制性推出 $\{x_n\}$ 有界．因而(可能再次取子序列)可以假定在 X 中 x_n 弱收敛于 $\bar{x}$．再根据假设，我们有 x_n 强收敛于 $\bar{x}$，且 $f(\bar{x}) = y$，于是 f 是正常算子．

2.7B 基本性质

正常映射 $f \in C(X, Y)$ 的一个简单的定量性质是：在 p 或 f 的小扰动下，解集 $S_p(f) = \{x \mid x \in X, f(x) = p\}$ 有如下的稳定性：

(2.7.3) **定理** 设 $f\in C(X, Y)$ 是正常映射，那么:

(i) 对一切 $p\in Y$ 和任意 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使

(2.7.4) 由 $\|f(x)-p\|\leqslant\delta$ 可推出 $\|x-f^{-1}(p)\|\leqslant\varepsilon$*);

(ii) 设 $g\in C(X, Y)$，那么，如对一切 $x\in X$ 有 $\|f(x)-g(x)\|\leqslant\delta$，则 $d(S_p(f), S_p(g))\leqslant\varepsilon$.

证明: 只需证 (i)，因为 (ii) 是 (i) 的直接推论.

设 (i) 不真，那么存在 $\varepsilon>0$，$p\in Y$，以及序列 $\{x_n\}\in X$，使对一切 n，有

(2.7.5) $\|f(x_n)-p\|\leqslant 1/n$ 和 $\|x_n-f^{-1}(p)\|\geqslant\varepsilon$**).

因为 f 是正常算子和 $f(x_n)\to p$，如果必需，我们通过取子序列，总之可以假定 $x_n\to x$. 那么，因为 $f\in C(X, Y)$，所以 $f(x)=p$，于是 $x\in f^{-1}(p)$，但这与 (2.7.5) 矛盾.

在这方面，我们还证明

(2.7.6) 设 X, Y 是 Banach 空间，$f\in C(X, Y)$. U 和 V 分别是 X 和 Y 的开子集，f 映 U 到 V 上，有局部逆，f 在 U 上是正常算子. 如用 c_p 记 $S_p(U)=\{x|x\in U, f(x)=p\}$ 中点的个数，那么在 $f(U)$ 的每一分支中 c_p 是有限常数(图 2.1).

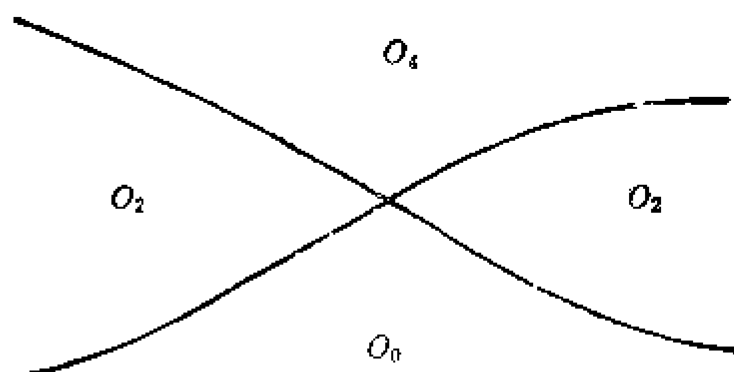


图 2.1 一个正常 Fredholm 映射 f 的值域的典型分解，由它的奇异值划分成连通分支 O_i. 对 $p\in O_i$，方程 $f(x)=p$ 恰有 i 个解.

---

*) 似应改为 $\text{dis}(x, f^{-1}(p))\leqslant\varepsilon$，因 $f^{-1}(p)$ 不一定是单点集，或理解为"集值不等式"——译者注.

**) 类似地，应改为 $\text{dis}(x, f^{-1}(p))\geqslant\varepsilon$——译者注.

证明：显然，从 f 局部有逆和 f 的正常性可推出 $f^{-1}(p)$ 是离散的紧集，于是 c_p 有限。

用同样的方法，从刚才得到的定理 (2.7.3) 推出 c_p 是局部常数。

更一般些，我们考察不是局部有逆的正常映射。和 (2.6.7) 一样，如果 $f\in C^1(X,Y)$，当 $f'(x)$ 在点 x 没有局部逆时我们称 x 是奇异点，f 的奇异点的集合称作奇异集 S。用 (2.6.7) 中的记号和术语，我们证明

(2.7.7) 如果 $f\in C^1(X,Y)$ 是零指标的正常 Fredholm 算子，用 S 记 f 的奇异集。那么，在 $Y-f(S)$ 的每个(连通)分支上 c_y 是常数(更一般地，对较高指标的正常 Fredholm 算子，集 $f^{-1}(y)$ 同胚)。

证明：由 (2.6.8)，显然 S 是闭集；因为 f 正常，从 (2.7.1) 推出 $f(S)$ 闭，从而 $U=X-f^{-1}(f(S))$ 和 $V=Y-f(S)$ 分别是 X 和 Y 的开子集。现在可以把 (2.7.6) 用于 U，V。f 映 U 到 V 显然是正常映射，它在 U 上局部有逆。于是由 V 的分支弧连通就得到所要求的结果。

2.7C 作为正常映射的微分算子

最后，我们讨论一些准则，它们可以用于判断某些和微分算子有关的抽象映射的正常性。

首先考察具体的算子

$$\mathfrak{A}u=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha\{A_\alpha(x,u,\cdots,D^\alpha u)\},$$

它定义在有界区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ 上，和 $\mathfrak{A}$ 相应的抽象算子 A: $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)\to W_{-m,q}(\Omega)$ 通过下面的式子确定(用 2.2D 一节的对偶原则)。

$$(2.7.8)\qquad (Au,\varphi)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}\int_\Omega A_\alpha(x,u,\cdots,D^\alpha u)D^\alpha\varphi.$$

我们证明和 (2.7.2) 类似的如下结论：

(2.7.9) **定理** 设 A 满足条件 (2.2.7)，它保证 A 是从 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 到

$W_{-m,q}(\Omega)$ 的有界、连续映射。再设 (i) 当 $\|u\|\to\infty$ 时 $(Au,u)/\|u\|\to\infty$，(ii)$\mathfrak{A}$ 是在下述意义下的强椭圆型算子，即对 $p\in(1,\infty)$，

$$\sum_{|\alpha|=m}\{A_\alpha(x,y,z)-A_\alpha(x,y,z')\}\{z-z'\}\geqslant c\|z-z'\|^p,$$

其中 c 是与 y,z,z' 无关的常数，而较低阶项满足(2.2.7)中的(*)式，那么，A 是映 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 到 $W_{-m,q}(\Omega)$ 内的正常映射。

证明: 首先我们注意到，由 (i)，当 $\|u\|\to\infty$ 时，$\|Au\|\geqslant(Au,u)/\|u\|\to\infty$，所以 A 在(2.7.1)意义下强制。其次，考察由(2.7.8)定义的算子 A，验证正常性的充分条件(2.7.2)。为此，记 $A=A_1+A_2$，其中

$$(A_1u,\varphi)=\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega A_\alpha(x,u,\cdots,D^mu)D^\alpha\varphi,$$

$$(A_2u,\varphi)=\sum_{|\alpha|<m}\int_\Omega A_\alpha(x,u,\cdots,D^mu)D^\alpha\varphi.$$

从假设条件推出(据(2.4.9)) A_2 全连续，A_1 满足不等式

(2.7.10) $$(A_1u-A_1v,u-v)\geqslant k\|u-v\|^p_{m,p},$$

其中 $k>0$ 与 u,v 无关。于是只需证明 A_1 正常。因为空间 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 自反，又只需证当 u_n 弱收敛于 u 和 $\{A_1u_n\}$ 强收敛时能推出 u_n 强收敛于 u。而这是不等式(2.7.10)的直接推论。

最后，我们证明当把(2.5.7)中定义的 von. Kárman 算子看作映 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的映射时，它是正常算子。

(2.7.11) 在(2.5.7)中定义的 von. Kárman 算子

$$\mathfrak{A}_\lambda(u)=u+Cu-\lambda Lu\qquad(\text{对固定的 }\lambda)$$

是映 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的正常映射。

证明 暂时先假定 C 和 L 全连续。由(2.7.2(ii))，只需证明 $\mathfrak{A}_\lambda(u)$ 的强制性。为此，令 $\|u_n\|\to\infty$，那么对固定的 λ，

$$(\mathfrak{A}_\lambda(u_n),u_n)=\|u_n\|^2+(Cu_n,u_n)-\lambda(Lu_n,u_n).$$

根据(2.5.7)，

$$(Lu_n,u_n)=(C(F_0,u_n),u_n)=(C(u_n,u_n),F_0),$$

其中 $(Cu_n,u_n)=\|C(u_n,u_n)\|^2$。于是对任何 $\varepsilon>0$，

$$(\mathfrak{A}_\lambda(u_n),u_n)\geqslant\|u_n\|^2+\|C(u_n,u_n)\|^2-\varepsilon^{-1}\|F_0\|^2-\varepsilon\|C(u_n,u_n)\|^2.$$

在最后的不等式中令 $\varepsilon=1$，求出

$$\|\mathfrak{A}_\lambda(u_n)\|\geqslant(\mathfrak{A}_\lambda(u_n),u_n)/\|u_n\|\geqslant\|u_n\|-\|u_n\|^{-1}\|f_0\|^2.$$

于是，作为 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的算子，$\mathfrak{A}_\lambda(u)$ 强制。

最后，为确定算子 L 和 C 的全连续性，我们用(2.5.7)的证明中引用过的不等式(ii)(见(2.5.9′)后面)．事实上，如果在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中 u_n 弱收敛于 u，由 Sobolev 不等式(1.4.18)推出，在 $W_{1,4}(\Omega)$ 中 u_n 强收敛于 u．从而当 $n\to\infty$ 时，对某个绝对常数 $K_1>0$，

$$\|Lu_n - Lu\| = \sup_{\|\varphi\|=1}(Lu_n - Lu, \varphi) = \sup_{\|\varphi\|=1}(C(F, u_n - u), \varphi)$$
$$\leqslant K_1\|F\|_{2,2}\|u_n - u\|_{1,4}\to 0.$$

类似地可证 $C(u, u)$ 全连续．对任意 $\varphi\in\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$，用(2.5.7)，我们得到

$$(C(u_n) - C(u), \varphi) = (C(u_n, u_n), C(u_n, \varphi)) - (C(u, u), C(u, \varphi))$$
$$= (C(u_n, u_n) - C(u, u), C(u, \varphi))$$
$$+ (C(u_n, u_n), C(u_n, \varphi) - C(u, \varphi)).$$

因而对 $\|\varphi\|_{2,2}\leqslant 1$，有绝对常数 M，使

$$\|C(u_n) - C(u)\|$$
$$\leqslant M\{\|C(u_n, u_n) - C(u, u)\| + \|C(u_n, \varphi) - C(u, \varphi)\|\}.$$

从而 $C(u_n)\to C(u)$，C 全连续．

于是我们断定 $\mathfrak{A}_\lambda(u)$ 是正常映射．

在第六章，我们结合大范围变分学研究和应用 A_λ 的正常性的推论(即(2.7.6)和(2.7.7))，以估计当 g 变动时方程 $A_\lambda(u)=g$ 的解的个数．

注　　记

A. L_p 空间间的算子 $f=f(x, u)$ 的性质

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域，$f(x, u)$ 定义在 $\Omega\times\mathbb{R}^1$ 上，f 有如下的连续性：对几乎所有的 x，f 对 u 连续，对所有的 u，f 对 x 可测(指 Lebesgue 测度)．那么，为证明(2.2.1)可顺序证明如下结论：

(i) f 保持测度收敛　这不难证明．首先对简单函数进行证明，然后作线性组合取极限．

(ii) f 连续　如果 $f(x, u)$ 满足如下增长条件

(*)　$|f(x, u)|\leqslant\alpha+\beta|u|^{p_1/p_2}$　对常数 $\alpha, \beta>0$

问题就归结为证明可在积分号下取极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f(x, u_n) - f(x, u)|^{p_2}dx,$$

其中 $\|u_n - u\|_{L_{p_1}}\to 0$．而根据绝对等度连续积分的 Vitali 定理以及所给的增长条件，在积分号下取极限是可以的．

(iii) f 有界　这个结果从 f 在原点的连续性以及 Lebesgue 测度的连

续性得出.

虽然在本书中未曾用到，但是可以指出，增长条件(＊)是下面事实的推论，即 f 映 $L_{p_1}(\Omega)$ 入 $L_{p_2}(\Omega)$. 为证此，读者可以看 Krasnoselski (1964).

B. 实解析算子

我们关于复解析算子的讨论基于 Hartog 关于分离解析性的定理. 实 Banach 空间的类似情形并没有很多进展. 设 f 是定义在实 Banach 空间 X 的开集 D 上，在另一实 Banach 空间 Y 中取值的光滑映射 如果在 D 中的每一点 f 都有任意阶的 Fréchet 导数. 而且 $f(x)$ 可以用它的导数展成收敛的幂级数(2.3.3(vi))，那么称 f 在 D 中解析. 实解析算子的某些结果可由复解析算子的类似结果导出. 事实上，对每个实 Banach 空间 X，都可通过一个标准的方法把它等距地嵌入到一个复 Banach 空间 $X+iX$; X 到 Y 的有界多重线性对称映射可以唯一延拓成 $X+iX$ 到 $Y+iY$ 的有界多重线性对称映射. 于是可以证明，一个实解析映射可以标准地延拓成复解析映射. 关于这些结果，读者可以参看 Alexiewicz 和 Orlicz (1954).

C. 抽象 Navier-Stocks 算子

用 2.2 D 中介绍的对偶方法，可以把 Navier-Stocks 方程 (1.1.18)—(1.1.19) 改写成 Hilbert 空间 $\mathring{H}$ 中算子方程. 条件 $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$ 允许我们可以只考虑 N 维螺线向量 w，以及把 n 维螺线向量 w 的空间选作 Hilbert 空间 $\mathring{H}$，w 是在 Sobolev 空间 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 中把 $\mathbf{u}\in C_0^\infty(\Omega)$ 的每个分量完备化得到的. 如果我们考虑一个 Navier-Stocks 方程，它定义在 $\mathbb{R}^N$ 中 $(N=2,3)$ 一个无界区域 Ω 上，并满足齐次的 Dirichlet 型边界条件，那么该方程可以写成

$$f_\lambda(w)\equiv w+\lambda Nw=\tilde{g},\quad \lambda\equiv\text{Reynolds 数}.$$

注意在这些方程中，不出现作为梯度的压力项，$\tilde{g}$ 表示广义力向量. 当 N 由公式

$$(**)\qquad (Nw,\varphi)_H=-\int_\Omega\{w\cdot\operatorname{grad}w\}\varphi\equiv\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega w_k w_{x_k}\cdot\varphi$$

隐含地定义时，可以用对偶方法检验这件事. 不难证明

(i) 这样定义的算子 N 是从 $\mathring{H}$ 到自身的紧映射.

(ii) 对每个 γ，相应的算子 f_γ 是正常映射(注意，在这里，对每个 $w\in\mathring{H}$ 有 $(Nw,w)=0$，于是由(2.7.2)得出正常性).

(iii) $f_\gamma(w)$ Fréchet 可微，于是 $f_\gamma(w)$ 是零指标的非线性 Fredholm 算子.

(iv) 对充分小的 r，$f(w)=g$ 的解唯一.

在第五章中将看到，对于很大一类非齐次边界条件来说，(＊＊)保持有效. 此外，不难证明，结果 (i)—(iv) 在这时仍然成立. 可看 Ladyzhenskaya (1969).

D. 文献介绍

2.1节：无穷维线性空间间映射的微积分学有一个有趣的历史. 早期的文献包括 Volterra (1930)，Hadamard (1903) 和 Fréchet (1906). 下面的较现代的书是很有趣的：Dieudonné(1960)，Nevanlinna(1957)，Hille 和 Phillips (1957)，Michal (1958) 和 Cartan (1970, 1971). 在 Gateaux (1906) 和 Fréchet (1925) 中有对导算子的早期讨论. 由 Ljusternik 和 Sobolev (1961) 写的书包含了更现代的处理. 关于这个课题，当把算子看作微分形式时，Goldring (1977) 已经把 Hodge 关于非线性算子分解定理前面几个步骤完善化了.

2.2节：Krasnoselski (1964) 和 Vainberg (1964) 的书包含了 2.2A 的组合算子的详尽讨论. 结果(2.2.10) 取自 Littman (1967). Schauder 反演法是 Schauder 的文章中一再使用的技巧的形式化，这些文章在文献中已提到. 在许多不同的情形，都证明了定义抽象非线性算子的对偶方法是十分有效的，这在 Brezis (1973)，Browder (1976) 以及 Lions (1969) 中都有所叙述.

2.3 节：我们对解析算子的讨论是仿照 Hille (1948) 的. Taylor (1937) 的文章是很有意思的，同时 Douady 近来的工作 (1965) 则具有综合的价值.

2.4 节：对紧算子的系统研究以及它们和代数拓扑的联系属于 Schauder (参看文献中所列举的他的文章).

2.5节：在 Rothe (1933) 和 Krasnoselski (1964) 中有对梯度算子基本结果的很有用的综述. 这个工作的很大一部分是把变分学的内容推广到更形式的情形. 在 Berger (1967) 中可找到(2.5.7). 通过证明 Frobenius 可积性定理在无穷维时的各种变形，Goldring (1977) 推广了梯度映射的概念.

2.6 节：非线性 Fredholm 算子是 Smale (1965)引进的. 在 Palais(1967)的书中有一个有意思的工作，即试图把 Atiyah 和 Singer 的指标定理推广到非线性的情形. 毋庸置疑，在这门学科的进一步发展中，非线性 Fredholm 算子的内容将日益显示出其重要性.

2.7节：在 Bourbaki (1949) 中可以找到对正常映射完整的讨论. 在 Ambrosetti 和 Prodi 的文章(1972)中证明了(2.7.7)并加以应用. 在 Berger (1974) 中可找到结果(2.7.11).

第二部分 局部分析

第二部份的目的 在这一部分我们讨论非线性算子 f 的局部性质，即把 f 限制在它定义域内一个点的小邻域内来考察。然后，再说明这些性质与在理论与实践上都很重要的更具体的概念的关系。

准备讨论的基本问题 为符号统一起见，用 x_0 表示 Banach 空间 X 中的一个点，$U(x_0)$ 记 x_0 的邻域，Y 记另一个 Banach 空间。用 f 表示定义在 $U(x_0)$ 上而在 Y 中取值的算子。我们试图通过如下问题尽可能清晰地弄清 $f(x)$ 在 $f(x_0)$ 附近的性状。

(i) 线性化问题 如果 $f(x)$ 在 x_0 点可微，在什么意义下可以用算子 $f'(x_0)$ 来反映 $f(x)$ 在 $f(x_0)$ 附近的性质？

(ii) 局部可解性问题 如果 $\|f(x_0)-y\|$ 很"小"，在什么情况下，对于 x_0"附近"的 x，$f(x)=y$ 有解？

(iii) 局部共轭性问题 如果 g 是另一个映射，其定义域为 $U(x_0)$，值域 $V\subset Y$，在某种意义下 $f-g$ 很小。要问：在哪种情形 f 和 g 只相差一个局部坐标变换。也就是说，存在局部同胚映射（"坐标变换"）$h_X:U(x_0)\to U(x_0)$ 和 $h_Y:V\to V$ 使得 $f=h_Y^{-1}gh_X$。特别，如果在 $x=0$ 附近

$$f(x)=L_x+O(\|x\|^2),$$

其中 L 是线性算子，那么，L 和 f 的哪些性质可以保证这些算子在 $x=0$ 附近是共轭的？

(iv) 稳定性问题 在何种意义下，f 在 $U(x_0)$ 附近的性质不受小扰动（可以任意）εg 的影响（ε 是小的实数）？如果"任意的"扰动会破坏所给定的性质，那么，通过限制允许扰动类可以保持这些性质吗？

(v) 解的局部结构问题 如果 $f(x_0)=y_0$，对解集 $\{x|f(x)=y_0,\ x\in U(x_0)\}$ 可以给出一个完整的描述吗？特别，解孤立吗？

(vi) 非线性的影响问题 研究 f 在 $f(x_0)$ 附近的局部性质时，算子 f

的较高阶部分，也就是 $f(x)-f'(x_0)(x-x_0)-f(x_0)$ 的哪些特征具有重要意义?

(vii) 参数相依性问题 如果映射 $f(x)=f(x,\lambda)$ 连续(或光滑)依赖于参数 λ，当 λ 变化时，f 的局部性质怎样变化?特别，描述 $f(x,\lambda)=0$ 的解在"歧点"集合 $\Sigma=\{(x,\lambda)|\operatorname{coker} f_x(x,\lambda)\neq\{0\}, f(x,\lambda)=0\}$ 附近的性状.

(viii) 和某种意义下的解的结构有关的问题 如果当 $f(x_0)-y$ 相当小时，在 x_0 附近 $f(x)=y$ 有一个解，可以构造 x_0 的一个显式的近似 x，使 $\|x-x_0\|$ 任意小吗?

(ix) 叠代格式问题 如果序列 x_n 由 $x_n=g(x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_{n-k})$ 定义(其中 k 是某个有限整数，与 n 无关，g 是定义在 $X\times X\times\cdots\times X$ (共 k 个)上的连续映射)，在什么条件下，这个序列(或其某个子序列)收敛到

$$x=g(x, x, \cdots, x)$$

的解 x? 进一步，在上面问题 (viii) 的条件下，可以由某个收敛的叠代格式来定义一个近似解吗?

在仔细研究显式非线性方程组时，自然会出现刚才提到的问题. 对给定的局部问题 π，获得近似解的方法是熟知的，一般说来也是不难构造的. 例如，可以用问题 π' 来"近似"问题 π，而 π' 的全部解都是已知的，且假定 (作为首次逼近) π 的解和 π' 的解很"靠近". 事实上，已知的线性化方法、逐次逼近法、平均法、待定系数法和奇异扰动法都是为了形式地构造这样的近似解. 但是，对于这些形式的方案来说，这种近似解的合法性问题常常没有得到解决. 实际上，尽管有很多与此相反的证据，仍是想当然的这样做了. 今后会看到，局部分析的研究对这种问题大有帮助. 例如，对算子方程 $f_\varepsilon(x)=0$ 的解常常可以构造出一个高阶近似 (对任意的阶数 N)，即

$$x_N(\varepsilon)=x_0+\sum_{n=0}^{N} a_n\varepsilon^n,$$

使 $f_\varepsilon(x_N(\varepsilon))=O(\varepsilon^{N+1})$. 但是，如在 1.2B 中提到过的，因为无穷级数 $\sum a_n\varepsilon^n$ 发散，可能对任何 $\varepsilon\neq 0$，极限 $\lim_{N\to\infty} x_N(\varepsilon)$ 根本不存在. 于是就需要进一步研究用 $x_N(\varepsilon)$ 逼近方程 $f_\varepsilon(x)=0$ 的真解 $x(\varepsilon)$ 的合法性.

第三章 单个映射的局部分析

在这一章，我们集中考察固定的算子 f，f 是作用于两个 Banach 空间之间，或(如 3.4 节)作用于两个 Banach 空间链之间的算子．还要讨论基本的逼近以及叠代格式，这些格式与反函数定理、隐函数定理有关．本章的第一节讨论基于初等的压缩映射原理得出的结果，以及它们对 Banach 空间中常微分方程、映射的奇异性、等周变分问题极值曲线的局部性质等等的应用．随后的两节讲古典的最速下降法和逐次逼近的强级数法．最后(3.4 节)，我们介绍与反函数定理有关的叠代格式的最新进展．这些结果属于 Nash, Moser, Kolomogorov 和 Arnold．

3.1 逐次逼近法

为回答刚才提出的局部分析的那些问题，最简单的系统的方法是解算子方程 $f(x)=0$ 的逐次逼近法．事实上，本节的所有结果都基于这个主题．给定 $f\in C(\bar{U}, Y)$，这个方法的基本思想是(显式地)定义一个 Cauchy 序列 $x_n\in\bar{U}$，使得 $f(x_n)\to 0$，然后由 $\bar{U}$ (Banach 空间 X 的一个开子集的闭包) 的完备性，x_n 收敛到某个元素 $\bar{x}\in\bar{U}$，再由 f 的连续性，$f(\bar{x})=0$．这种方法最简单的情形可介绍如下：

3.1A 压缩映射原理

设 A 是给定的从集 S 到自身的连续映射．我们打算用定义一个序列的办法找出 A 的不动点．设序列取作 x_0，Ax_0，A^2x_0，$\cdots$，A^nx_0，$\cdots$，$x_0\in S$，要找出关于 S 和 A 的条件以保证这个序列收敛．一个简单的回答是：

(3.1.1) 压缩映射原理 用 $S(\bar{x}, \rho)$ 记 Banach 空间 X 中的球，

其球心在 $\bar{x}$，半径为 ρ. 设 A 映 $S(\bar{x},\rho)$ 到自身，对任意 $x, y\in S(\bar{x},\rho)$，A 满足条件

$$(3.1.2)\qquad \|Ax-Ay\|\leqslant K\|x-y\|,$$

其中 K 是小于 1 的正数. 那么，A 在 $S(\bar{x},\rho)$ 中有且仅有一个不动点 x_∞，并且 x_∞ 是序列 $x_n=A^n x_0(n=0,1,2,\cdots)$ 的极限，其中 x_0 是 $S(\bar{x},\rho)$ 中任意一点.

证明: 首先证明，对任意 $x_0\in S(\bar{x},\rho)$，$x_n=A^n x_0$ 是 Cauchy 序列. 事实上，对任意正整数 n 和 p，和几何级数 $K^n+K^{n+1}+\cdots$ 相比较，可得

$$\begin{aligned}\|x_{n+p}-x_n\|&=\|A^{n+p}x_0-A^n x_0\|\\&\leqslant\sum_{j=n}^{n+p-1}\|A^{j+1}x_0-A^j x_0\|\\&\leqslant\sum_{j=n}^{n+p-1}K^j\|Ax_0-x_0\|\\&\leqslant\frac{K^n}{1-K}\|Ax_0-x_0\|.\end{aligned}$$

因而，对任意 p，当 $n\to\infty$ 时 $\|x_{n+p}-x_n\|\to 0$. 故 $\{x_n\}$ 的确是 $S(\bar{x},\rho)$ 中 Cauchy 序列. 因为 $S(\bar{x},\rho)$ 完备，故 x_n 收敛到某 $x_\infty\in S(\bar{x},\rho)$. 由 A 的连续性，

$$(3.1.3)\qquad Ax_\infty=\lim_{n\to\infty}Ax_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x_\infty,$$

即 x_∞ 是不动点. 它还是唯一的. 否则，如设 y_∞ 是另一个不动点，那么从 (3.1.2) 推出

$$\|x_\infty-y_\infty\|=\|Ax_\infty-Ay_\infty\|\leqslant K\|x_\infty-y_\infty\|,$$

这只有当 $x_\infty=y_\infty$ 时才可能.

(3.1.1) 有很多有意义的推广，当映射 A 与参数有关时，下面的推广很有用.

(3.1.4) 推论 设 $A(x,\beta)$ 是从 $S(\bar{x},\rho)\times B\to S(\bar{x},\rho)$ 的连续映射，B 是距离空间，对每个 $\beta\in B$，A 满足 (3.1.2)，那么映射 $g:\beta\to x_\beta(x=A(x,\beta)$ 的唯一不动点$)$是从 B 到 X 的连续映射.

证明：设在 B 中 $\beta_n\to\beta_\infty$，那么 $g(\beta_n)=x_{\beta_n}=A(x_{\beta_n},\beta_n)$，对 $\beta=\beta_\infty$ 也有类似的式子。因而

$$\begin{aligned}\|g(\beta_n)-g(\beta_\infty)\| &= \|A(x_{\beta_n},\beta_n)-A(x_{\beta_\infty},\beta_\infty)\| \\ &\leqslant \|A(x_{\beta_n},\beta_n)-A(x_{\beta_\infty},\beta_n)\| \\ &\quad+\|A(x_{\beta_\infty},\beta_n)-A(x_{\beta_\infty},\beta_\infty)\| \\ &\leqslant K\|x_{\beta_n}-x_{\beta_\infty}\|+\|A(x_{\beta_\infty},\beta_n) \\ &\quad-A(x_{\beta_\infty},\beta_\infty)\|,\end{aligned}$$

使

$$\|g(\beta_n)-g(\beta_\infty)\|\leqslant\frac{1}{1-K}\|A(x_{\beta_\infty},\beta_n)-A(x_{\beta_\infty},\beta_\infty)\|.$$

因为 A 对 β 连续，上式右端趋于 0，结论得证。

3.1B 反函数定理和隐函数定理

现在证明 Banach 空间中著名的反函数定理和隐函数定理。这两个结果都是由构造叠代格式得到的。对第二部分一开始时所提出的线性化问题，反函数定理首次给出了回答。同时，隐函数定理回答了和参数相依性有关的类似问题。

(3.1.5) **反函数定理** 设 x_0 是 Banach 空间 X 中的一个点，f 是定义在 x_0 的邻域上在另一个 Banach 空间 Y 中取值的 C^1 映射。那么，如果 $f'(x_0)$ 是一个从 X 到 Y 的线性同构，则 f 是从 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 到 $f(x_0)$ 的邻域的局部同胚。而且，如果 $\|y-f(x_0)\|$ 足够小，那么序列

(3.1.6) $$x_{n+1}=x_n+[f'(x_0)]^{-1}[y-f(x_n)]$$

收敛到 $f(x)=y$ 在 $U(x_0)$ 中的唯一解。

证明：令 $f(x_0)=y_0$，假如 $\|y-y_0\|$ 充分小，我们首先确定 ρ 使得 $f(x_0+\rho)=y$。或者等价地，

(3.1.7) $$f(x_0+\rho)-f(x_0)=y-y_0.$$

因为 f 在 x_0 点是 C^1 映射且 $f'(x_0)$ 有逆，由 (3.1.7)

推出 $$f'(x_0)\rho+R(x_0,\rho)=y-y_0,$$

即 $$\rho=[f'(x_0)]^{-1}[(y-y_0)-R(x_0,\rho)],$$

其中余项

$$R(x_0,\ \rho)=f(x_0+\rho)-f(x_0)-f'(x_0)\rho=o(\|\rho\|).$$

我们指出，当 $\|\rho\|$ 充分小时，(3.1.7) 有且仅有一个解．为此只需证明，对某个充分小的 ε，算子

$$A\rho=[f'(x_0)]^{-1}\{y-y_0-R(x_0,\ \rho)\}$$

是从 $S(0,\ \varepsilon)$ 到自身的压缩映射，其中 $S(0,\ \varepsilon)$ 是 X 中的球．事实上，对 ρ 和 $\rho_1\in S(0,\ \varepsilon)$，

$$\begin{aligned}f'(x_0)\{A\rho-A\rho_1\}&=R(x_0,\ \rho_1)-R(x_0,\ \rho)\\&=f(x_0+\rho_1)-f(x_0+\rho)-f'(x_0)(\rho_1-\rho)\\&=\int_0^1\{f'(x_0+t\rho_1+(1-t)\rho)-f'(x_0)\}(\rho_1-\rho)dt.\end{aligned}$$

因而

$$(3.1.8)\quad \|A\rho-A\rho_1\|\leqslant\int_0^1\|[f'(x_0)]^{-1}\|\|f'(x_0+t\rho_1+(1-t)\rho)-f'(x_0)\|\|\rho_1-\rho\|dt.$$

因为 f 是 C^1 映射，可由把 $\|\rho\|,\|\rho_1\|$ 取得充分小以使最后一个积分的中间项任意小。因而对某个常数 $K<1$ (与 $y-y_0$ 无关) 和充分小的 $\varepsilon>0$，$\|A\rho-A\rho_1\|\leqslant K\|\rho-\rho_1\|$ 对 $S(0,\varepsilon)$ 中的一切 ρ,ρ_1 成立．而且 A 映 $S(0,\ \varepsilon)$ 到自身．事实上，

$$\|A\rho\|\leqslant\|A\rho-A(0)\|+\|A(0)\|\leqslant K\|\rho\|+\|A(0)\|,$$

并且，只要 $\|y-y_0\|<(1-K)\varepsilon\|[f'(x_0)]^{-1}\|^{-1}$，就有

$$\|A(0)\|=\|[f'(x_0)]^{-1}(y-y_0)\|<(1-K)\varepsilon.$$

因而在上面的附加条件下，A 是由 $S(0,\ \varepsilon)$ 到自身的压缩映射．根据压缩映射原理 (3.1.1)，A 在 $S(0,\delta)$ 中有唯一不动点，其中 $\delta\leqslant\varepsilon$ 选得那样小，使得

$$f(S(0,\ \delta))\subset S(y_0,\ (1-K)\varepsilon\|[f'(x_0)]^{-1}\|^{-1}).$$

把这个证明步骤倒过来就可得知，当 $\|y-y_0\|$ 和 $\|\rho\|$ 充分小时，$f(x_0+\rho)=y$ 有且仅有一个解．从推论 (3.1.4) 和

$$A\rho=[f'(x_0)]^{-1}\{y-y_0-R(x_0,\ \rho)\}$$

显然连续依赖于 y 这个事实直接推出 ρ 连续依赖于 y，因而

$$x=x_0+\rho$$

连续依赖于 y．于是 $f^{-1}(y)=x$ 有定义并是从 Y 中一个球

$S(y_0,\eta)$ 到 X 的连续映射．最后，对充分小的 $\|f(x_0)-y\|$，$f(x)=y$ 有唯一解 $x=x_0+\rho$，其中 ρ 是序列 $\rho_0=0$，$\rho_n=A\rho_{n-1}$ 的极限．那么

$$
\begin{aligned}
x_n &= x_0+\rho_n \\
&= x_0+A\rho_{n-1} \\
&= x_0+[f'(x_0)]^{-1}[y-f(x_0)-R(x_0,\ \rho_{n-1})] \\
&= x_0+[f'(x_0)]^{-1}[y+f'(x_0)\rho_{n-1}-f(x_0+\rho_{n-1})] \\
&= x_{n-1}+[f'(x_0)]^{-1}[y-f(x_{n-1})].
\end{aligned}
$$

因而

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n,$$

其中 x_n 由叠代序列

$$x_n=x_{n-1}+[f'(x_0)]^{-1}[y-f(x_{n-1})]$$

定义．

(3.1.9) **推论** 在定理 (3.1.5) 的条件下，f^{-1} 在 y_0 点可微且

$$(f^{-1}(y_0))'=(f'(x_0))^{-1}.$$

证明：如果 $f(x_0)=y_0$ 和 $f(x_0+x)=y_0+h$，那么

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)-f'(x_0)^{-1}h \\
&\quad= f'(x_0)^{-1}\{f'(x_0)x-h\} \\
&\quad= -f'(x_0)^{-1}\{f(x_0+x)-f(x_0)-f'(x_0)x\} \\
&\quad= o(\|x\|)=o(\|h\|).
\end{aligned}
$$

于是 f^{-1} 在 y_0 点可微，且 $(f^{-1}(y_0))'=(f'(x_0))^{-1}$.

下面，我们寻找使方程 $f(x,\ y)=0$ 局部唯一可解，并且

$$y=g(x)$$

和 f 同等光滑的条件．

(3.1.10) **隐函数定理** 设 X，Y 和 Z 是 Banach 空间，U 是 $X\times Y$ 中点 $(x_0,\ y_0)$ 的邻域，$f(x,\ y)$ 是从 U 到 Z 的连续映射，

$$f(x_0,\ y_0)=0,$$

$f_y'(x_0,y_0)$ 存在且对 x 连续，是 Y 和 Z 之间的线性同构．那么必存在定义在 x_0 的邻域 U_1 上的唯一连续映射 $g:U_1\to Y$，使

$$g(x_0)=y_0,$$

以及对一切 $x\in U_1$，$f(x,g(x))=0$。

证明： 对在 x_0 附近固定的 x，改写

$$f(x,\ y)=f_y(x_0,\ y_0)(y-y_0)+R(x,\ y),$$

对 $(x_0,\ y_0)$ 附近的 $(x,\ y)$ 和 $(x',\ y')$，

$$R(x,\ y)-R(x,\ y')=o(\|y-y'\|).$$

为在 $(x_0,\ y_0)$ 附近解 $f(x,\ y)=0$，考虑映射

$$\begin{aligned}A_x y&=y-[f_y(x_0,\ y_0)]^{-1}f(x,\ y)\\&=y_0-f_y^{-1}(x_0,\ y_0)R(x,\ y).\end{aligned}$$

对 x_0 附近固定的 x，定理（3.1.5）的证明保证了 A_x 是一个从中心在 y_0 的小球到自身的压缩映射。由（3.1.1），$A_x(y)$ 有唯一不动点 $y(x)$，由（3.1.4），$y(x)$ 连续依赖于 x。而且 $y(x_0)=y_0$ 和 $f(x,\ y(x))=0$。进一步，$y(x)$ 是具有这些性质的唯一连续函数，因为任何这样的函数必然是 $A_x y$ 的不动点。于是我们只需令 $g(x)=y(x)$ 就得到要证的结果。

(3.1.11) **推论** 如果在隐函数定理（3.1.10）的条件中再加上 $f_x(x,\ y)$ 存在，且对 $(x_0,\ y_0)$ 附近的 $(x,\ y)$ 连续，那么函数 $g(x)$ 对 $x\in U_1$ 连续可微，而且

(3.1.12) $$g'(x)=-[f_y(x,\ g(x))]^{-1}f_x(x,\ g(x)).$$

证明： 我们首先证明 $g(x)$ 具 Lipschitz 连续性. 在推论的假设条件下，$f(x,\ y)$ 在 $(x_0,\ y_0)$ 附近是 C^1 映射，对充分小的 $\|h\|$ 和 $(x_0,\ y_0)$ 附近的 (x,y)，$f(x,g(x))=f(x+h,g(x+h))=0$。因而将 $f(x+h,g(x+h))$ 在 $(x,\ g(x))$ 展开就得到

$$\begin{aligned}&\|f_x(x,\ g(x))h+f_y(x,\ g(x))[g(x+h)-g(x)]\|\\&\quad=o(\|h\|+\|g(x+h)-g(x)\|).\end{aligned}$$

因为 $f_y(x,\ g(x))$ 有逆且在点 x 处连续，所以

(3.1.13) $$\begin{aligned}&\|[f_y(x,\ g(x))]^{-1}f_x(x,\ g(x))h+[g(x+h)-g(x)]\|\\&\quad=o(\|h\|+\|g(x+h)-g(x)\|).\end{aligned}$$

于是有一个与 h 无关的常数 M，使

$$\|g(x+h)-g(x)\|\leqslant M\|h\|.$$

从而可由（3.1.13）推出 $g(x)$ 可微和（3.1.12）成立。

附注：

如在 (x_0, y_0) 附近 $f(x, y)\in C^n$，那么函数 $g(x)$ 也属于 C^n. $n=2$ 时可直接从 (3.1.12) 推出，对一般的 n，用归纳法基于同样的公式得出。

3.1C Newton 法

现在我们来看叠代格式 (3.1.5) 的一个改进，即 Newton 法，这个方法使 (3.1.5) 的收敛速率有了实质性的提高。Newton 法可以叙述如下：对 $f(x)=0$ 的解给出了一个初始近似 x_0，设法找出更好的近似 $x_1=x_0+\rho_1$，其中 ρ_1 选择得使当略去高阶项不计时有 $f(x_1)=0$. 设 $[f'(x_0)]^{-1}$ 存在，由

$$f(x_1)=f(x_0+\rho_1)=f(x_0)+f'(x_0)\rho_1+o(\|\rho_1\|),$$

可得 $\rho_1=-[f'(x_0)]^{-1}f(x_0)$. 继续这个过程，在第 n 步，由令

$$\rho_{n+1}=-[f'(x_n)]^{-1}f(x_n),$$

求出一个近似解 $x_{n+1}=x_n+\rho_{n+1}$. 于是，只要 $[f'(x_n)]^{-1}$ 总存在，我们就可求出 $f(x)=0$ 的一个形式解

$$x_\infty=x_0+\sum_{n=}^{\infty}\rho_n.$$

Newton 法的价值在于 x_n 以相当高的速率收敛到 x_∞. 这就是说，原来由估计式 $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant K\|x_n-x_{n-1}\|$ 产生敛速

$$\|x_\infty-x_N\|=O(K^N),$$

现在得到一个幂次收敛的速率：$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant K\|x_n-x_{n-1}\|^2$，从而 $\|x_\infty-x_N\|=O[(\varepsilon_0K)^{2^N}]$，其中 ε_0, K 是确定的常数；

$$\varepsilon_0=\|f'^{-1}(x_0)\|\|f(x_0)\|.$$

事实上，设序列 $\{x_n\}$ 包含于 X 的某个球 S 内，f 属于 C^1 类，且对于任意的 $x, y\in S$，$\|f'(x)-f'(y)\|\leqslant M\|x-y\|$，那么由 Taylor 公式给出

$$\text{(3.1.14)}\qquad \|f(x_n)-f(x_{n-1})-f'(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})\| \leqslant M\|x_n-x_{n-1}\|^2.$$

由定义，对任意 k，$f(x_k)=-f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)$，于是从(3.1.14)推出

$$\frac{1}{\|f'^{-1}(x_n)\|}\|x_{n-1}-x_n\| \leqslant \|f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\| \leqslant M\|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

从而有

(3.1.15) $$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant M\|f'^{-1}(x_n)\|\|x_n - x_{n-1}\|^2.$$

我们可以取 $K = M\sup\limits_n\|[f'(x_n)]^{-1}\|$.

(3.1.16) **定理** 设 $S(\bar{x}, \delta)$ 是 Banach 空间 X 中的球，f 是定义在 $S(\bar{x}, \delta)$ 上，在另一 Banach 空间 Y 中取值的 C^1 映射，x_0 是 $S(\bar{x}, \delta)$ 中任一点，再设对任 $x, y \in S(\bar{x}, \delta)$，$f$ 满足

(i) $\|f'(x) - f'(y)\| \leqslant M_1\|x - y\|$,

(ii) $f'(x_0)$ 是 $X \to Y$ 的线性同胚.

那么，只要 $\|f(x_0)\|$ 充分小，序列 $x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}f(x_n)$ 就有定义，且收敛到 $f(x) = 0$ 的唯一解 x_∞. 并且，对某个正数 $\varepsilon < 1$，当 $N \to \infty$ 时 $\|x_N - x_\infty\| = O(\varepsilon^{2^N})$，$\varepsilon$ 由下面的 (3.1.18′) 确定.

证明：仿照反函数定理证明中的做法，令 $f(x_0) = y_0$，寻找元素 ρ 使 $f(x_0 + \rho) - f(x_0) = -y_0$. 设 $(x_0 + \rho) \in S(\bar{x}, \delta)$，将 $f(x_0)$ 在 $x_0 + \rho$ 展开，得

$$f(x_0) = f(x_0 + \rho) - f'(x_0 + \rho)\rho + R(x_0 + \rho, \rho).$$

我们得出 ρ 的如下方程

(3.1.17) $$-y_0 = f'(x_0 + \rho)\rho + R(x_0 + \rho, \rho),$$

其中 $\|R(x_0 + \rho, \rho)\| = o(\|\rho\|)$. 因为 $f'(x_0)$ 是线性同胚，故对充分小的 $\|\rho\|$，$f'(x_0 + \rho)$ 也是线性同胚. 因此，对充分小的 $\|\rho\|$，算子

$$B\rho = -[f'(x_0 + \rho)]^{-1}\{y_0 + R(x_0 + \rho, \rho)\}$$

有定义. 下面证明：(i) 对充分小的 $\delta' > 0$，B 定义一个映 $S(x_0, \delta')$ 到自身的压缩映射，从而方程 (3.1.17) 有唯一解. (ii) 所得到的收敛叠代格式和 (3.1.16) 中所定义的一致.

为证 B 是压缩映射，我们先对 $[f'(x_0 + \rho)]^{-1}$ 对 ρ 的相依性作出某些估计. 采用记号 $g(\rho) = [f'(x_0 + \rho)]^{-1}$，由条件 (ii) 和恒等式 $L_1^{-1} - L_2^{-1} = L_1^{-1}(L_2 - L_1)L_2^{-1}$,

$$\|g(\rho)-g(\rho')\| \leqslant M_1\|\rho-\rho'\|\|g(\rho)\|\|g(\rho')\|.$$

令 $\|g(0)\| = C$，我们有

$$\begin{aligned}\|g(\rho)\| &\leqslant \|g(\rho)-g(0)\| + C\\ &\leqslant CM_1\|\rho\|\|g(\rho)\| + C,\end{aligned}$$

所以 $$\|g(\rho)\| \leqslant C(1-CM_1\|\rho\|)^{-1}.$$

因而对于 $\|\rho\| \leqslant \delta' < \min\{(2M_1C)^{-1},\delta\}$，$g(\rho)$ 存在且

$$\|g(\rho)\| \leqslant 2C.$$

而且，对 ρ，$\rho' \in S(x_0, \delta')$，

$$\begin{aligned}\|B\rho - B\rho'\| \leqslant \|g(\rho)\|\|R(x_0+\rho,\rho) - R(x_0+\rho',\rho')\|\\ + \|g(\rho)-g(\rho')\|\|y_0 + R(x_0+\rho',\rho')\|.\end{aligned}$$

现在，

$$\begin{aligned}&R(x_0+\rho,\rho) - R(x_0+\rho',\rho')\\ &= f(x_0+\rho') - f(x_0+\rho) + f'(x_0+\rho)\rho - f'(x_0+\rho')\rho'\\ &= \int_0^1 \{f'(x_0+\rho+s(\rho'-\rho)) - f'(x_0+\rho)\}(\rho'-\rho)ds\\ &\quad + [f'(x_0+\rho') - f'(x_0+\rho)]\rho.\end{aligned}$$

综合上面的结果，再用定理的假设，我们求出

$$\begin{aligned}\|B\rho - B\rho'\| &\leqslant 2CM_1\{\|\rho'-\rho\|^2 + \|\rho\|\|\rho'-\rho\|\}\\ &\leqslant 4C^2M_1\left(\|y_0\| + \frac{1}{2}M_1\|\rho\|'\right)\|\rho'-\rho\|\\ &\leqslant \bar{K}\|\rho'-\rho\|,\end{aligned}$$

其中 $\bar{K}<1$ 是与 ρ 和 ρ' 无关的正常数，上式当 δ' 和 $\|y_0\|$ 充分小时成立。再加上

$$\|B\rho\| \leqslant \|B\rho - B(0)\| + \|B(0)\| \leqslant \bar{K}\|\rho\| + C\|y_0\|$$

就推出，当 $C\|y_0\| \leqslant (1-K)\delta'$ 时，$\|B\rho\| \leqslant \delta'$。所以，只要选取 $\|y_0\|$ 和 δ' 充分小，B 就是映 $S(x_0, \delta')$ 到自身的压缩映射.

于是 B 有唯一不动点 $\bar{\rho} \in S(x_0, \delta)$，它是下面序列的极限：

(3.1.18) $$\rho_0 = 0,$$

$$\begin{aligned}\rho_{n+1} = B\rho_n &= -[f'(x_0+\rho_n)]^{-1}\{y_0 + R(x_0+\rho_n, \rho_n)\}\\ &= -[f'(x_0+\rho_n)]^{-1}\{f(x_0+\rho_n) - f'(x_0+\rho_n)\rho_n\}\end{aligned}$$

$$= \rho_n - [f'(x_0 + \rho_n)]^{-1} f(x_0 + \rho_n).$$

令 $x_n = x_0 + \rho_n$，(3.1.18) 就成为定理中提到的经典的 Newton 叠代格式 $x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1} f(x_n)$. 令 $x_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\|x_\infty - x_N\|$ 的估计式可以得出，因为由不等式 (3.1.15)，有

$$\|x_{N+1} - x_N\| = O(\bar{K}^{2^N}).$$

事实上，

$$\begin{aligned}\|x_{N+1} - x_N\| &\leqslant \bar{K}\|x_N - x_{N-1}\|^2 \leqslant \cdots \leqslant \\ &\leqslant \bar{K}^{1+2+\cdots+2^{N-1}}\|x_1 - x_0\|^{2^N} \\ &= O(\bar{K}^{2^N}\|x_1 - x_0\|^{2^N}).\end{aligned}$$

于是，如令

(3.1.18′) $\qquad \varepsilon = \bar{K}\|x_1 - x_0\| = \bar{K}\|[f'(x_0)]^{-1}\|\|f(x_0)\|$，

就由 (3.1.15) 得到

$$\|x_\infty - x_N\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|x_{N+i+1} - x_{N+i}\|,$$

$$\|x_\infty - x_N\| = O(\|x_{N+1} - x_N\|) = O(\varepsilon^{2^N}).$$

3.1D 局部满射性的判别法

当 $f'(x_0)$ 没有逆时，对 $f(x)$ 在 $f(x_0)$ 附近的性状可以说些什么呢？在下一章我们将讨论这个重要的问题。但是，刚才发展的方法已使我们能够研究那种情形，即 $f'(x_0)$ 是满射，但不必是单射(在无穷维 Banach 空间中常常出现这种情形)。

(3.1.19) **定理** 设 X 和 Y 是 Banach 空间，f 是定义在 X 中点 x_0 的某邻域内，在 Y 中取值的 C^1 映射，$f'(x_0)$ 映 X 成 Y. 那么，对 x_0 附近的 x，f 是一个开映射.

证明： 只需证明，对 $y_0 = f(x_0)$ 附近的 y，当 $\|\rho\|$ 充分小时，方程

$$f(x_0 + \rho) - f(x_0) = y - y_0$$

有解. 因为 f 在 x_0 附近 C^1，最后一个方程可以改写成

$$f'(x_0)\rho + R(x_0, \rho) = y - y_0.$$

其中 $\|R(x_0, \rho)\| = o(\|\rho\|)$. 为证最后这个方程有解，对给定的 $\rho \in X$，考虑如下的线性方程

$$f'(x_0)\xi = (y - y_0) - R(x_0, \rho).$$

因为 $f'(x_0)$ 是满射，(1.3.24) 保证这个方程有解 $\xi(\rho)$，使得

$$\|\xi(\rho)\| \leqslant M\|(y - y_0) - R(x_0, \rho)\|, \tag{3.1.20}$$

其中 M 是与 ρ 无关的常数．我们可以定义一个序列 $\{\rho_N\}$，它满足：

(i) $f'(x_0)\rho_N = y - y_0 - R(x_0, \rho_{N-1})$;

(ii) $\|\rho_N\| \leqslant M\|y - y_0 - R(x_0, \rho_{N-1})\|$.

显然，由 $\{\rho_N\}$ 在 x_0 的某小球内的极限的存在性（对 y_0 附近的任何 y）就可证明定理．我们由验证压缩映射原理的不等式

$$\|\rho_{N+1} - \rho_N\| \leqslant K\|\rho_N - \rho_{N-1}\|$$

来证明这个极限存在．

事实上，对 $\rho_N \in S(0, \delta_1)$ 和 $y \in S(y_0, c\delta_1)$，根据 (3.1.20)，对 $\delta_1 < 1$，当 $c > 0$ 充分小时

$$\|\rho_{N+1}\| \leqslant M\{c\delta_1 + o(\delta_1)\} \leqslant \delta_1.$$

于是对一切 N，$\{\rho_N\} \in S(0, \delta_1)$．另一方面，对 $\rho_{N+1}, \rho_N \in S(0, \delta_1)$，

$$\begin{aligned}
f'(x_0)(\rho_{N+1} - \rho_N) &= R(x_0, \rho_N) - R(x_0, \rho_{N-1}) \\
&= f(x_0 + \rho_N) - f(x_0 + \rho_{N-1}) - f'(x_0)(\rho_N - \rho_{N-1}) \\
&= \int_0^1 [f'(x_0 + \rho_{N-1} + s(\rho_N - \rho_{N-1})) - f'(x_0)](\rho_N - \rho_{N-1})ds.
\end{aligned}$$

由中值定理，对某个 $s_0 \in [0, 1]$，

$$\|\rho_{N+1} - \rho_N\| \leqslant \|M\|f'(x_0 + \rho_{N-1} + s_0(\rho_N - \rho_{N-1})) - f'(x_0)\|\|\rho_N - \rho_{N-1}\|.$$

因为 f 是 C^1 映射，当 δ_1 充分小时，

$$\|\rho_{N+1} - \rho_N\| \leqslant \frac{1}{2}\|\rho_N - \rho_{N-1}\|.$$

于是由 (3.1.1) 的证明，序列 $\{\rho_N\}$ 收敛，$\rho_N \to \rho_\infty \in S(0, \delta_1)$，

且
$$f(x_0 + \rho_\infty) = y,$$

所以对 x_0 附近的 x 来说，f 是开映射．

3.1E 对常微分方程的应用

上面结果的一个重要应用是讨论初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{3.1.21}$$

解的性质．其中我们假定，对固定的 x，函数 $f(t, x)$ 对 $t \in [0, \alpha]$

连续、对固定的 t，f 对 x 局部 Lipschitz 连续. 也就是说，对 Banach 空间 X 中的开集 U，$x_1, x_2 \in U$，$\|x_i - x_0\| \leqslant R(i=1, 2)$，存在一个仅与 R 有关的正常数 $K(R)$，使

(3.1.22) $$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant K(R)\|x_1 - x_2\|.$$

我们证明

(3.1.23) **定理** 如 $K(R)\alpha < 1$，上面关于 $f(t, x)$ 的条件均满足，那么

(i) 初值问题 (3.1.21) 在区间 $[0, \alpha]$ 上有且只有一个解 $x(t, x_0)$.

(ii) 在 $x(t, x_0)$ 有定义的任何有界闭区间上，$x(t, x_0)$ 是 x_0 的一致连续函数. 更确切些，如果

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant K\|x - y\|,$$

那么

(3.1.24) $$\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\| \leqslant \|x_0 - y_0\|e^{Kt}.$$

证明: (i) 显然，(3.1.21) 等价于积分方程

(3.1.25) $$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

即是说，(3.1.21) 在 $[0, \alpha]$ 有解 $x(t)$ 当且仅当 $x(t)$ 满足 (3.1.25). 令

$$Ax(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds.$$

我们证明，对于充分小的 $\alpha > 0$，A 是映 $C\{[0, \alpha], X\}$ 中某球到自身的压缩映射. 于是，据压缩映射原理，(3.1.25)，从而 (3.1.21) 有且仅有一个解 $x(t, x_0)$. 为此回想起

$$|\!|\!| x |\!|\!| = \sup_{[0,\alpha]}\|x(t)\|_X$$

是定义在 $C\{[0, \alpha], X\}$ 上的完备范数，用 $\Sigma(x_0, R)$ 记 $C\{[0, \alpha], X\}$ 中球心在 x_0，半径为 R 的球，则

$$|\!|\!| Ax - x_0 |\!|\!| \leqslant \int_0^t |\!|\!| f(s, x(s)) |\!|\!| ds \leqslant \{KR + |\!|\!| f(s, x_0) |\!|\!|\}\alpha;$$

同时，对 $x, y \in \Sigma(x_0, R)$，$|\!|\!| Ax - Ay |\!|\!| \leqslant K\alpha |\!|\!| x - y |\!|\!|$. 于是只要 $K\alpha < 1$，$K\alpha R + |\!|\!| f(s, x_0) |\!|\!| \alpha \leqslant R$，$A$ 就是映 $\Sigma(x_0, R)$ 到自身的压缩映射. 显然，当 $0 < \alpha < 1/K$ 和 α 选得足够小时上二不等式同时成立.

(ii) 显然，(i) 中所定义的映射 A 关于 x_0 连续. 于是由 (3.1.4)，在 $C\{[0, \alpha], X\}$ 中拓扑意义下，A 的不动点 $x(t, x_0)$ 连续依赖于 x_0. 为证更精确的结果，我们指出，如果用 $x(t, x_0)$ 和 $x(t, y_0)$ 分别记 (3.1.21) 对初始条件 x_0 和 y_0 的解，那么

$$\begin{aligned}&\|x(t, x_0) - x(t, y_0)\|\\ &\leqslant \|x_0 - y_0\| + \int_0^t \|f(s, x(s,x_0)) - f(s, x(s, y_0))\|ds\\ &\leqslant \|x_0 - y_0\| + K\int_0^t \|x(s, x_0) - x(s, y_0)\|ds.\end{aligned}$$

用 $w(t)$ 记上不等式的左端，我们有 $w(t)\geqslant 0$ 且满足不等式

$$w(t)\leqslant\|x_0 - y_0\| + K\int_0^t w(s)ds. \tag{3.1.26}$$

下面证明，对使 $x(t)$ 存在的任意区间 $[0, T]$，都有

$$w(t)\leqslant\|x_0 - y_0\|e^{Kt}.$$

事实上，在 (3.1.26) 中移项，再用 e^{-Kt} 乘其两端就得到

$$\frac{d}{dt}\left\{e^{-Kt}\int_0^t w(s)ds\right\} = e^{-Kt}\left\{w(t) - K\int_0^t w(s)ds\right\}\leqslant\|x_0 - y_0\|e^{-Kt}.$$

从 0 到 T 积分上不等式，得到

$$e^{-KT}\int_0^T w(s)ds\leqslant\|x_0 - y_0\|\left\{\frac{1}{K} - \frac{e^{-KT}}{K}\right\}.$$

由此就不难从 (3.1.26) 得出 (3.1.24).

我们再证明一些和 (3.1.21) 的解 $x(t, x_0)$ 的连续性有关的结果.

(3.1.27) **定理** 设 $f(t, x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^1\times X$ 上的连续函数，对固定的 t，对 x 局部 Lipschitz 连续. 那么 (3.1.21) 的解 $x(t, x_0)$ 可以唯一延拓到极大区间 $[0, A)$，在 $[0, A)$ 上仍是 (3.1.21) 的解. 如果 $x(t, x_0)$ 在区间 $[0, \beta)$ 上存在，$\lim\limits_{t\to\beta}x(t, x_0)$ 存在且有限，那么必有 $A > \beta$.

证明：首先证明 (3.1.21) 定义在区间 $[0, \gamma)$ 上的解 $x(t, x_0)$ 唯一. 设 $x(t, x_0)$ 和 $y(t, x_0)$ 是 (3.1.21) 在 $[0, \gamma)$ 上的两个解，记

$$J = \{t|t\in[0, \gamma) \text{ 使 } x(t, x_0) = y(t, x_0)\}.$$

由 (3.1.23) J 必然不空. 下面证明 J 是 $[0, \gamma)$ 中既开又闭集，从而由 $[0, \gamma)$ 连通可得 $J = [0, \gamma)$. 因为 $x(t, x_0)$ 和 $y(t, x_0)$ 二者连续，所

以 J 必然闭。为证 J 是开集，设 $\gamma_0 \in J$，那么，由局部唯一性结论 (3.1.23)，存在 $\delta > 0$，使得对 $|t| < \delta$，

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \qquad x(0) = x(\gamma_0, x_0)$$

有唯一解 $x(t, x(\gamma_0, x_0)) = x(t + \gamma_0, x_0)$。于是区间 $(\gamma_0 - \delta, \gamma_0 + \delta) \subset J$，$J$ 是开集.

现在证明前面提到的极大区间的存在性，在这种区间上有满足(3.1.21)的解 $x(t, x_0)$ 存在. 设 $\mathscr{E}$ 是 $\{[0, \delta_x), x(t, x_0)\}$ 的集合，其中 $x(t, x_0)$ 在 $[0, \delta_x)$ 上满足 (3.1.23). 显然，由上节的唯一性结果，对于任何两个这样的对 $\{[0, \delta_{x_1}), x_1(t, x_0)\}$ 和 $\{[0, \delta_{x_2}), x_2(t, x_0)\}$，对于 $t \in [0, \min(\delta_{x_1}, \delta_{x_2})]$，总有 $x_1(t, x_0) = x_2(t, x_0)$. 令 $\alpha = \sup\limits_{x \in \mathscr{E}} \delta_x$，那么在 $[0, \alpha)$ 上正好有一个函数 $x(t, x_0)$ 满足初值问题 (3.1.21)，而区间 $[0, \alpha)$ 正是所求的极大区间.

最后，如果在 $[0, \beta)$ 上 $x(t, x_0)$ 存在，$\lim\limits_{t \to \beta} x(t, x_0) = \bar{x}$ 也存在且有有限范数，我们可以把局部存在定理 (3.1.23) 用到初值问题

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \qquad x(0) = \bar{x},$$

并断定在 $t = 0$ 的某个开区间$(-\delta, \delta)$上，它的解 $\bar{x}(t, \bar{x})$ 存在且唯一. 又由 (3.1.23) 以及 $x(\beta, x_0) = \bar{x}$，对 $t \in (-\delta, \delta)$，

$$\bar{x}(t, \bar{x}) = x(t, x(\beta, x_0)) = x(t + \beta, x_0).$$

于是 $x(t, x_0)$ 可唯一延拓到区间 $[0, \beta + \delta)$，并且仍是(3.1.21)的解.

在有限维 Banach 空间的情形，定理 (3.1.23) 可以被改进，把 $f(t, x)$ Lipschitz 连续的假定减弱为仅要求其连续. 应用 Schauder 不动点定理 (2.4.3) 可证明这个结果. 考虑初值问题 (3.1.21)，设 $x(t)$ 是一个N维向量，$f(t, x)$ 是 t 和 x 的连续N维向量函数. 我们证明

(3.1.28) **Peano 定理** 在刚才陈述的条件下，当 $|T|$ 充分小时，初值问题 (3.1.21) 在区间 $[-T, T]$ 上至少有一个解 $x(t, x_0)$.

证明：不失一般性，可设 $x_0 = 0$. 那么 (3.1.21) 的解可由解积分方程

(3.1.29) $$y(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds, \qquad x(t) \in \mathbf{R}^N$$

得出. 记方程 (3.1.29) 右端的积分为 $Ax(t)$，令

$$\sup_{[0,T]\times[-M,M]} |f(s, S)| = K_M.$$

对定义在 $[0, T]$ 上的任何连续 N 维向量 $x(t)$, 如果在 $[0, T]$ 上 $|x(t)| \leqslant M$, 就得到

(3.1.30) $$|Ax(t)| \leqslant \int_0^t |f(s, x(s))| ds \leqslant K_M t \leqslant K_M T.$$

如用 $C_N[0, T]$ 记定义在 $(0, T]$ 上的连续 N 维向量函数的 Banach 空间, 其范数定义为上确界, 那么 A 是从 $C_N[0,T]$ 到自身的有界映射. 和前面一样, (1.3.21) 的解正是 A 在 $C_N[0, T]$ 中的不动点. 由要求 $|T|$ 充分小和应用 Schauder 不动点定理 (2.4.3) 可得 A 有不动点. 为此, 由 (3.1.30), 只要 $|T| \leqslant M/K_M$, A 就映球 $\Sigma_M = \{x | \|x\| \leqslant M, x \in C_N[0,T]\}$ 到自身. 于是为引用 Schauder 定理, 只需证明 A 是 $\Sigma_M \subset C_N[0, M/K_M]$ 上的连续的紧映射. 从 $f(s, x(s))$ 的连续性直接推出 A 的连续性. 为证 A 紧, 根据 (3.1.30) 和 (1.3.13), 又只需证明, 对 $x(t) \in \Sigma_M$, 向量 $Ax(t)$ 等度连续即可. 而我们有

$$|Ax(t_1) - Ax(t)| = \left|\int_t^{t_1} f(s, x(s)) ds\right| \leqslant K_M |t_1 - t|,$$

这就证明了所需的等度连续性. 于是所要的不动点存在, 定理证毕.

3.1F 对等周问题的应用

很多与梯度映射 $G'(x) \in M(H, H)$ (H 是一个 Hilbert 空间) 有关的问题可以表述如下: 在限制集 C 上求 $G'(x)$ 的原函数 $G(x)$ 的极值点 x. 我们把这种问题称作抽象的等周问题. 现应用本章已得到的结果来研究这种极值点应满足的算子方程.

作为 Peano 定理 (3.1.28) 的一个应用, 对抽象等周变分问题可建立如下结果.

(3.1.31) 设 H 是 Hilbert 空间, u_0 是 C^1 泛函 $G_0(x)$ 的条件极值点, 限制集 $C = \{u | G_i(u) = c_i, i = 1, 2, \cdots, N$, 其中 c_i 为常数$\}$.

那么存在(不全为 0 的)数 λ_i, 使

(3.1.32) $$\sum_{i=0}^{N} \lambda_i G_i'(u_0) = 0,$$

其中 $G_i'(u_0)$ 记 $G_i(u)$ 在 u_0 点的 Fréchet 导算子.

证明: 用反证法. 设向量 $G_i'(u_0)$ ($i = 0, 1, \ldots, N$) 线性无关, 最后导

出矛盾. 记 $G_0(u)$ 在 C 上的极值为 c_0. 下面证明,如 (3.1.32) 不成立,那么当 $|t|$ 充分小时,可以找到一条曲线 $u(t)\in C$, $u(0)=u_0$, 使

$$G_0(u(t)) = c_0 + t.$$

因为 t 可正可负,这就与 c_0 是 G_0 在 C 上的极值相矛盾. 为证此,令

$$u(t) = u_0 + \sum_{j=0}^{N} a_j(t) w_j,$$

其中实值函数 $a_j(t)$ 和向量 w_j 应满足

(3.1.33) $a_j(0)=0$, $G_0(u(t)) = c_0 + t$, $G_i(u(t)) = c_i\ (i=1,\dots,N)$.

设 w_j 已给定,只要我们能解如下初值问题

(3.1.34)
$$\frac{d}{dt}G_i\left(u_0 + \sum_{j=0}^{N} a_j(t) w_j\right) = r_i,$$
$$i=0,1,\dots,N;\ a_j(0)=0,$$

其中 $r_0=1$, 对 $i>0$, $r_i=0$, 我们就能找出满足(3.1.33)的函数 $a_j(t)$. 化简 (3.1.34), 我们可以把这个初值问题改写成向量形式

(3.1.35)
$$\Omega(a(t))\frac{da}{dt} = r,\quad a(0)=0,$$

其中 $a(t)=(a_0(t),\dots,a_N(t))$, $r=(1,0,\dots,0)$, $\Omega(a(t))=(a_{ij})$ 是 $(N+1)\times(N+1)$ 阶矩阵,元素 $a_{ij}=(G_i'(u_0+a(t)\cdot w), w_j)$,

$$w=(w_0,w_1,\dots,w_N).$$

根据 Peano 定理(3.1.28),只要对充分小的 $|t|$,矩阵 $\Omega(a(t))$ 有逆且连续依赖于 $a(t)$, 那么(3.1.35),从而(3.1.33)就有解. 显然, $|\Omega(a(0))|\neq 0$ 就正是这种情形. 于是我们只需利用向量 $G_i'(u_0)$ $(i=0,\dots,N)$ 线性无关的假定,选取 w_i 使这个行列式不等于0.

事实上,对 $w_j=G_j'(u_0)$ 就有

$$\det|\Omega(a(0))| = \det|(G_i'(u_0),\ G_j'(u_0))|\neq 0.$$

设若不然,那么线性方程组

$$\sum_i \beta_i(G_i'(u_0),\ G_j'(u_0)) = 0,\quad j=0,1,\dots,N$$

就有非平凡解(譬如说 $\bar{\beta}_i$). 用 β_j 乘上面的方程再求和、对 $\beta_i=\bar{\beta}_i$ 就得到

$$\left\|\sum_{i=0}^{N}\beta_i G_i'(u_0)\right\| = 0.$$

由此推出

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{\beta}_i G_i'(u_0) = 0.$$

因为向量 $G_i'(u_0)$ 线性无关,所以 $\bar{\beta}_i = 0$ $(i = 0, \cdots, N)$。这个矛盾就证明了 $\det|\Omega(a(0))| \neq 0$. 于是,对充分小的 $|t|$, 有曲线 $u(t) \in C$ 使

$$G_0(u(t)) = c_0 + t,$$

这正是前面谈到的我们所要的矛盾.

附注:

当 X 是 Banach 空间时,因为 $\{w_i\}$ 可使 $\det|\Omega(a(0))| \neq 0$, 所以结果 (3.1.31) 仍成立.

一个有关的但更一般的结果可以叙述如下(对可能有无穷多个限制方程的情形):

(3.1.36) **定理** 设 G 是从 Hilbert 空间 H 到 Hilbert 空间 H_1 的 C^1 映射, 对某个 x_0, $G'(x_0)$ 映 H 成 H_1. 如果 x_0 是 C^1 泛函 $F(x)$ 限制在集 $M = \{x \mid G(x) = 0\}$ 上的极值点, 那么必存在元素 $h_1 \in H_1$, 使 x_0 是无约束泛函 $F(x) - (G(x), h_1)$ 的临界点.

证明: 令 $T = \{x \mid G'(x_0)x = 0\}$, 我们首先证明,对任意 $x \in T$, 可以把元素 $y \in M$ 写成 $y = x_0 + x + g$ 的形式,其中 $g \in [T]^\perp$, 当 $\|x\| \to 0$ 时,

$$\|g\| = o(\|x\|).$$

为此,对算子方程

$$\mathscr{G}(x, g) \equiv G(x_0 + x + g) = 0$$

用隐函数定理(看作线性算子),偏导数 $\mathscr{G}_g(0, 0) = G'(x_0)$ 一对一地映 $T^\perp$ 成 H_1. 根据 Banach 定理 (1.3.20), $G'(x_0)$ (当限制在 $T^\perp$ 上时)有逆. 于是从隐函数定理推出,对充分小的 $\|x\|$, 方程 $\mathscr{G}(x,y) = 0$ 有唯一 C^1 解

$$g = g(x) \in T^\perp.$$

为证当 $\|x\| \to 0$ 时 $g(x) = o(\|x\|)$, 我们注意到, 对充分小的 t 和固定的 $x \in T$,

$$G(x_0 + tx + \bar{g}(t)) = 0,$$

其中 $\bar{g}(t) \in T^\perp$ 是 t 的 C^1 函数. 对 t 微分这个方程并令 $t = 0$, 就得到

$$G'(x_0)x + G'(x_0)\bar{g}'(0) = 0. \tag{3.1.37}$$

因为 $x \in T$, $G'(x_0)x = 0$, 故从 (3.1.37) 推出 $\bar{g}'(0) = 0$ (因为 $G'(x_0)$ 限制在 $T^\perp$ 上时有逆). 于是 $\|g(x)\| = \|\bar{g}(1)\| = o(\|x\|)$.

其次注意到,对 $h \in T^\perp$, $l(h) = (F'(x_0), h)$ 是定义在 $T^\perp$ 上的有界线

性泛函．因 $G'(x_0)$ 是 $T^\perp$ 到 H_1 的线性同胚，故 f 也是 H_1 上的有界线性泛函．从而存在一个确定的元素 $h_1\in H_1$，使得对一切 $y\in H_1$，

$$(F'(x_0),\ h)=(y,h_1).$$

于是，对每个 $h\in T^\perp$，$y=G'(x_0)h$，有

$$(F'(x_0),\ h)=(G'(x_0)h,\ h_1). \tag{3.1.38}$$

最后，对任意 $h\in H$ 有 $h=n+m$，其中 $n\in T^\perp$，$m\in T$．显然

$$G'(x_0)m=0.$$

另一方面，根据第一段中的结果，$h(t)=x_0+tm+g(t)$，其中

$$\|g(t)\|=o(|t|),$$

于是对任意的 $m\in T$，

$$\frac{d}{dt}F(h(t))|_{t=0}=(F'(x_0),\ m)=0.$$

因而不仅对 $h\in T^\perp$，而且对所有 $h\in H$，(3.1.38) 都成立． 于是 x_0 是无约束泛函 $F(x)-(G(x),\ h_1)$ 在 H 上的临界点．

作为最后一个例子，考察 C^2 泛函 $F(x)$ 的临界点，其中 F 限制在 Hilbert 空间 H 中超曲面 $\mathfrak{M}=\{x|G(x)=\text{常数}\}$上． 如果在 $\mathfrak{M}$ 上 $G'(x)\neq 0$，那么 F 的临界点 x_0 满足方程

$$F'(x_0)-\lambda G'(x_0)=0, \tag{3.1.39}$$

其中

$$\lambda=\frac{(F'(x_0),\ G'(x_0))}{\|G'(x_0)\|^2}.$$

第二变分 $\delta^2F(x_0,\ v)$ 是一个二次型，定义在超曲面 $\mathfrak{M}$ 的切向量场上，由公式

$$\delta^2F(x_0,\ v)=\frac{d^2}{dt^2}\ F(v(t))|_{t=0}$$

确定，这里 $v(t)$ 是 $\mathfrak{M}$ 上过 x_0 的一条 C^1 曲线，且

$$\frac{d}{dt}v(t)|_{t=0}=v,\qquad \text{其中}\ (v,\ G'(x_0))=0.$$

现在来计算 F 在 x_0 点关于 $\mathfrak{M}$ 的这个第二变分．我们有如下简单公式

(3.1.40) F 限于 Hilbert 空间 H 的超曲面 $\mathfrak{M}$ 上的第二变分可以写成

$$(3.1.41)\qquad \delta^2 F(x_0, v) = ([F''(x_0) - \lambda G''(x_0)]v, v),$$
其中 $(v, G'(x_0)) = 0$，λ 由 (3.1.39) 给出.

证明：根据类似于 (3.1.31) 中的证明，如果 x 位于 $\mathfrak{M}$ 上，则弧
$$x(t) = x + tv + a(t)G'(x)$$
也位于 $\mathfrak{M}$ 上. 其中 $a(t)$ 是初值问题
$$(3.1.42)\qquad a'(t) = -(G'(x(t)), v)/(G'(x(t)), G'(x)),\ a(0) = 0$$
的解. 此外，在导出 (3.1.41) 时，只需考虑形若 $x(t)$ 的弧就够了. 现在
$$(d/dt)F(x(t)) = (F'(x(t)), x'(t)),$$
以及
$$(3.1.43)\ \frac{d^2}{dt^2}F(x(t)) = (F''(x(t))x'(t), x'(t)) + (F'(x(t)), x''(t)).$$
选取 $(v, G'(x_0)) = 0$，$a'(0) = 0$，从而 $x'(0) = v$. 于是
$$\frac{d^2}{dt^2}F(x(t))|_{t=0} = (F''(x)v, v) + (F'(x), a''(0)G'(x)).$$
在临界点 x_0，$F'(x_0) = \lambda G'(x_0)$，由此推出
$$(3.1.44)\qquad \delta^2 F(x_0, v) = (F''(x_0)v, v) + \lambda a''(0)\|G'(x_0)\|^2.$$
另一方面，为计算 $a''(0)$，我们注意到
$$(G'(x(t)) - G'(x), v) = t(G''(x)v, v) + o(t).$$
因为
$$a''(0) = \lim_{t\to 0}(a'(t)/t),$$
于是从 (3.1.42) 可得
$$a''(0) = -(G''(x_0)v, v)/\|G'(x_0)\|^2.$$
最后，从 (3.1.44) 得到
$$\delta^2 F(x_0, v) = ((F''(x_0) - \lambda G''(x_0))v, v),$$
其中 $(v, G'(x_0)) = 0$，λ 由(3.1.39)给出.

3.1G 对映射奇异性的应用

设 f 是 Banach 空间间的 C^1 映射，在 2.6 节引进了 f 的奇异点和奇异值的概念. 这个概念是 1.6 节中所描述的有穷维时想法的直接推广. 于是，自然想把 (1.6.1) 中总结的主要结果推广到无穷维的情形. 下面我们从证明 Smale 定理 (1965) 开始. 这个定理是 Sard 定理的推广.

(3.1.45) 设 X 和 Y 是可分 Banach 空间，f 是映 X 到 Y 的 C^q Fredholm 映射．如果 $q > \max(\operatorname{index} f, 0)$，那么 f 的临界值在 Y 中无处稠密．

证明： 因为 X 有可数基，无处稠密集在可数求和运算下又封闭，所以只需局部地证明本定理．为此，我们首先证明 Fredholm 映射局部闭．换言之，对任意 $x_0 \in X$，存在 x_0 的一个邻域 $N(x_0)$，使 $f|_N$ 闭．事实上，因为 $f'(x_0)$ 是线性 Fredholm 映射，我们可以把 X 写成直接和 $X = \ker f'(x_0) \oplus X_1$；从而 X 的任一元素 $x = (z, v)$，其中 $z \in \ker f'(x_0)$，$v \in X_1$．对 x_0 附近的一切 $x = (z, v)$，偏导算子 $f_v'(z, v)$ 映 X_1 到 Y 的一个闭子空间上．根据隐函数定理，可以找到 x_0 在 $\ker F'(x_0) \oplus X_1$ 中的一个开邻域 $D_1 \oplus D_2$，使 $\bar{D}_1$ 紧，并且当限制 f 到 $z \oplus D_2$ 上时，f 是从 $z \oplus D_2$ 到它的值域上的微分同胚．现设 $f(x_j) = y_j \to y$，其中 $x_j = (z_j, v_j) \in D_1 \oplus D_2$．为证 f 局部闭，我们先证 x_j 有收敛子列．因为 $\bar{D}_1$ 紧，故可假定 $z_j \to \bar{z}$；又因 $f(\bar{z}, v_j) \to y$，甚至可设 $z_j = \bar{z}$．上面已提到，当 f 局限于 $\bar{z} \times D_2$ 上时是同胚映射，于是 $v_j \to \bar{v}$，从而 $\{x_j\}$ 有收敛子序列．

根据 (2.6.8)，f 的临界点集是闭集，又因为 f 局部闭，于是只需证明，对任何 $x_0 \in X$，以及 $f(x_0)$ 在 Y 中的任何邻域 $O[f(x_0)]$，在 $O[f(x_0)]$ 中都有 f 的正则值．事实上，这时 f 的临界值在 Y 中无处稠密．为此，我们用有限维的结果(1.6.1.(i))．因为 $\dim \operatorname{coker} f'(x_0) < \infty$，故

$$Y = \operatorname{coker} f'(x_0) \oplus Y_1,$$

且存在一个标准投影 $P: Y \to \operatorname{coker} f'(x_0)$．现在

$$\varphi(z) = Pf(z, v_0): \ker f'(x_0) \oplus \{v_0\} \to \operatorname{coker} f'(x_0)$$

是一个 C^q 映射，故从 Sard 定理 (1.6.1.(i)) 推出，在 $P\{O[f(x_0)]\}$ 中必有 φ 的正则值．取 $y \in P^{-1}(z_0) \cap O[f(x_0)]$，那么 y 即所求的正则值．

作为这个结果有用的推论，我们证明这样一个定理，它表明，由负指标 Fredholm 算子定义的任何问题都是不适定的．

(3.1.46) 设 $f: X \to Y$ 是任一负指标的 Fredholm 映射，那么 $f(X)$ 不含内点．即是说，如果 $f(x) = y_0$ 在 X 中有解，那么必有与 y_0 任意接近的 y，使 $f(x) = y$ 在 X 中无解．

证明： 如果 $f(X)$ 含有内点，根据(3.1.45)，在 f 的值域中必存在 y 使得对某个 $x \in f^{-1}(y)$，$f'(x)$ 是满射，从而 $f'(x)$ 的指标 $= \dim \ker f'(x) \geq 0$，这与 $f(x)$ 有负指标相矛盾．

对非线性 Fredholm 算子的补充说明： 这个结果表明，负指标的非线性 Fredholm 算子方程都是不适定的．更明确些，对数学物理中出现的算子方程来说，形若 $f(x)=g$ 的方程的可解性应与 g 的精确性无关．事实上，由于实验误差和某些类似的原因，不可能得到 g 的完全精确的信息．

(3.1.45) 另一个有用的推论是关于具正指标 r 的 C^qFredholm 映射的．它说，如果 $q>r$，那么对几乎所有的 $g\in Y$，集合

$$S=\{x\,|\,f(x)=g\}$$

或是 X 的 r 维子流形，或是空集．

设 $F(x)$ 是定义在自反 Banach 空间 X 上的光滑泛函，我们把 Morse 定理 (1.6.1(ii)) 推广到 F 的临界值的情形．(3.1.45) 不包括这种情形．这是因为，当把 F 看作从 $X\to\mathbf{R}^1$ 的映射时，F 可能不是 Fredholm 映射．事实上，如 $F'(x)=0$，集

$$S=\{h\,|\,(F'(x),\ h)=0\}$$

有时是无穷维的．下面证明

(3.1.47) 设 X 是实可分自反 Banach 空间，$F(x)$ 是定义在 X 上的 C^m 实值泛函，$F'(x)$ 是映 X 入 X^* (X 的共轭空间) 的非线性 Fredholm 算子．那么，当 $m\geqslant\max(\dim\ker F''(x),2)$ 时，$F(x)$ 的临界值集(在 $\mathbf{R}^1$ 上)的 Lebesgue 测度为零．

证明： 设 x_0 是 $F(x)$ 的临界点，如我们能证明 (*) x_0 的一个开邻域 O_{x_0} 中的临界点和一个 C^m 实值泛函的临界点相重合，这个泛函定义在 $\mathbf{R}^m$ 中一个点的开邻域上，其中 $m\geqslant\max(\ker F''(x_0),\ 2)$，那么引用有限维时的结果 (1.6.1(ii)) 就可证明，$F(x)$ 在 x_0 附近的临界点相应的临界值为 Lebesgue 零测集．记 $F(x)$ 在 X 中临界点的集合为 C，则可用形若 $O_{x_0}\cap C$ 的邻域覆盖 C，在每个 $O_{x_0}\cap C$ 上 $F(O_{x_0}\cap C)$ 测度为零．因为 X 可分，覆盖

$$\bigcup_{x\in C}\{O_{x_0}\cap C\}$$

有可数子覆盖．由可数个零测集之并仍为零测集，$F(C)$ 的测度为零．

于是剩下来的就是证明(*)．因为 $F'(x)$ 是 Fredholm 算子，我们可以分解 $X=\ker F''(x_0)\oplus X_1$，使得任一 $x\in X$ 可以唯一表成 $x=z+x_2$，其中 $z\in\ker F''(x_0)$，$x_2\in X_1$．用同样的方法，我们可以分解

$$X^* = \operatorname{coker}F''(x_0) \oplus X_2^*,$$

以及

$$F'(x, x_2) = (P_1F', P_2F') = (f_1(x, x_2), f_2(x, x_2)),$$

其中 f_1 和 f_2 记相应于这个分解的偏导算子，P_1 和 P_2 分别记两个标准投影：$X^* \to \operatorname{coker}F''(x_0)$ 和 $X^* \to X_2^*$. 那么当把 $L = P_2F_2'(x)$ 局限到 X_2 上时，它一对一且映上，由 (1.3-20) L 有逆. 采用这些记号，在 x_0 附近定义 C^1 同胚 $h:(x, x_2) \to (\bar{x}, \bar{x}_2)$ 如下：

$$h(x, x_2) = (\bar{x}, L^{-1}f_2(x, x_2)).$$

因为 $\varphi(\bar{x}, \bar{x}_2) = F(h^{-1}(\bar{x}, \bar{x}_2))$ 在 $h(x_0)$ 附近的临界点是

$$\varphi'(\bar{x}, \bar{x}_2) = F'(h^{-1}(\bar{x}, \bar{x}_2))h'^{-1} = 0$$

的解，所以 φ 在 $h(x_0)$ 附近的临界点和 F 在 x_0 附近的临界点一一对应.

根据隐函数定理不难验证 h 是微分同胚.

下面证明 $\varphi(\bar{x}, \bar{x}_2)$ 的临界点全部属于子空间 $\ker F''(x_0)$，从而 $F(x)$ 的临界点和 $\varphi(\bar{x}, 0)$ 的临界点一一对应. 事实上，如果 $(\bar{x}, \bar{x}_2)$ 是 φ 的临界点，$h(x, x_2) = (\bar{x}, \bar{x}_2)$，那么 $f_1(x, x_2) = f_2(x, x_2) = 0$. 根据上面给出的 h 的定义，$\bar{x}_2 = 0$.

最后证明，如果 $F(x)$ 属于 C^m 类，那么 $\varphi(\bar{x}, 0)$ 也属于 C^m 类. 这可从以下事实推出：如果 $F(x)$ 是 C^m 类 $(m \geqslant 2)$，那么 h 是 C^{m-1} 类. 事实上，$\varphi'(\bar{x}, 0) = (f_1(h^{-1}(\bar{x}, 0)) + f_2(h^{-1}(\bar{x}, 0)))h'^{-1}$. 根据定义，

$$f_2(h^{-1}(\bar{x}, 0)) = 0,$$

所以 $\varphi'(\bar{x}, 0) = f_1(h^{-1}(\bar{x}, 0))h'^{-1}$ 属于 C^{m-1} 类. 由此推出 $\varphi(\bar{x}, 0)$ 是 C^m 类. 从而(*)得证，其中 $\varphi(\bar{x}, 0)$ 就是所要的实值泛函. 定理证毕.

3.2 梯度映射的最速下降法

对映 Hilbert 空间 H 到自身的梯度映射 $f(x) = \operatorname{grad}F(x)$ 来说，可采用别的技巧对刚才讨论的逐次逼近法进行补充. 例如，对于解方程 $f(x) = 0$ 的某些叠代格式，它们毋需计算在任意点的 $[f'(x)]^{-1}$. 也许，其中最好的格式是属于 Cauchy 的最速下降法.

这个方法在于解初值问题

$$(3.2.1)\qquad \frac{dx}{dt} = -f(x), \quad x(0) = x_0, \quad 其中\ f = \operatorname{grad}F.$$

不难指出的一点是，当 $t \to \infty$ 时，(沿着 (3.2.1) 的解 $x(t)$) $F(x(t))$

减少．只要对所有的t，(3.2.1) 的解都存在，我们试图证明

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$$

存在，并且 $\bar{x}$ 是 $f(x)=0$ 的解．这个方法的收敛性需要研究，我们现在就来讨论它．

3.2A 对局部极小的连续下降法

如 $F(x)$ 在某点 x_∞ 有严格相对极小，那么下面的定理保证了最速下降法的合理性．

(3.2.2) **定理** 设 $S(x_0, r)$ 是 Hilbert 空间H中的球，$F(x)$ 是定义在 $S(x_0, r)$ 上的 C^2 实值泛函． 又设存在某个绝对常数 $A>0$，使得对一切 $x\in S(x_0, r)$ 和 $y\in H$，都有

(3.2.3) $$(F''(x)y, y) \geqslant A\|y\|^2.$$

那么，当 $\|F'(x_0)\|/A \leqslant r$ 时，初值问题 (3.2.1) 有唯一解．这个解对所有的 t 都有定义，并且极限 $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\infty$ 存在． x_∞ 是 $F(x)$ 在 $S(x_0, r)$ 的唯一极小点， 也是 $f(x)=0$ 在 $S(x_0, r)$ 中的唯一解．而且，对 $x(t)\to x_\infty$ 的收敛速率有如下估计

(3.2.4) $$\|x(t)-x_\infty\| = O(e^{-At}).$$

证明：首先注意到，根据 (3.1.23)，对于充分小的 t，初值问题 (3.2.1) 有且仅有一个解． 为证 $x(t)$ 属于 $S(x_0, r)$，并且当 $t\to\infty$时有 $\|dx/dt\|\to 0$，从而 $\|f(x(t))\|\to 0$，我们论证如下：沿着 (3.2.1) 的解 $x(t)$，有

(3.2.5) $$\frac{d}{dt}F(x(t)) = (f(x(t)), x'(t)) = -\|x'(t)\|^2.$$

因而，当 t 增加时 $F(x(t))$ 减少．又

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}F(x(t)) &= -2(x''(t), x'(t)) \\ &= 2(F''(x(t))x'(t), x'(t)) \\ &\geqslant 2A\|x'(t)\|^2 = -2A\frac{d}{dt}F(x(t)).\end{aligned}$$

因而 $F(x(t))=g$ 满足微分不等式 $g''+2Ag'\geqslant 0$. 于是

$$(d/dt)F(x(t))\geqslant -\|f(x_0)\|^2e^{-2At},$$

再由 (3.2.5),

$$\|x'(t)\|\leqslant\|f(x_0)\|e^{-At}. \tag{3.2.6}$$

积分可得 $\|x(t)-x_0\|\leqslant\|f(x_0)\|/A$, 于是对所有的 t, $x(t)\in S(x_0,r)$. 从而对所有的 t, (3.2.1) 的解存在. 对 $0<t\leqslant t_1$, 用同样的方法得出

$$\|x(t_1)-x(t)\|\leqslant\|f(x_0)\|A^{-1}(e^{-At_1}-e^{-At}).$$

所以,对任何序列 $t_n\to\infty$, $x(t_n)$ 是 Cauchy 序列,从而

$$x_\infty=\lim_{t_n\to\infty}x(t_n)$$

存在且属于 $S(x_0,r)$. 显然

$$\|x(t)-x_\infty\|\leqslant\|f(x_0)\|A^{-1}e^{-At}, \tag{*}$$

故 x_∞ 与序列 t_n 的选择无关. 从 (3.2.6) 还推出

$$\|f(x(t))\|=\|x'(t)\|\to 0,$$

因而 $f(x_\infty)=0$. 解 x_∞ 是唯一解. 实则如果 f 在 $x,y\in S(x_0,r)$ 都为 0, 而 $x(t)$ 是连接 x 和 y 的直线,那么由 (3.2.3),

$$\begin{aligned}0=(f(x)-f(y),x-y)&=\int_0^1(f'(x(t))(x-y),x-y)\\&\geqslant A\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

类似地可导出

$$F(x_\infty)=\min_{S(x_0,r)}F(x)$$

的唯一性. 这是因为对 $x\in S(x_0,r)$, $f(x_\infty)=0$, 有

$$\begin{aligned}F(x)-F(x_\infty)&=\int_0^1(f(x_\infty+s(x-x_\infty)),x-x_\infty)ds\\&=\int_0^1(f(x_\infty+s(x-x_\infty))-f(x_\infty),x-x_\infty)ds\\&\geqslant\frac{1}{2}A\|x-x_\infty\|^2.\end{aligned}$$

3.2B 等周变分问题的最速下降法

把 (3.2.2) 推广到抽象等周问题(见前一节)是有用的. 为此考虑限制

在超曲面 C 上的 C^2 泛函 $F(x)$，C 由 $G(x)=$ 常数定义. 假定 $G(x)$ 充分光滑，限制集 C 弧连通，我们证明

(3.2.7) 定理 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 是 C^2 实值泛函，在限制集 $C=\{x|G(x)=$ 常数$\}$ 上 $G'(x)\neq 0$. 由 (3.1.41) 定义的，F 在点 x 关于 C 的"形式的"第二变分满足如下不等式：对某个绝对常数 $A>0$ 和所有

$$x\in C_A\equiv C\cap\{x|\,\|x-x_0\|\leqslant\|f(x_0)\|/A\},$$

总有

(3.2.8) $$\delta^2F(x,v)\geqslant A\|v\|^2,\ 对\ (v,G'(x))=0.$$

那么，对所有 $t\geqslant 0$，初值问题

(3.2.9)
$$x'(t)=-F'(x)+\lambda(x)G'(x),$$
$$\lambda(x)=(F'(x),G'(x))/\|G'(x)\|^2,$$
$$x(0)=x_0$$

有解，且

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x_\infty$$

存在，它是 $F(x)$ 在 C_A 中的唯一极小点.

证明：用 $x(t)$ 记 (3.2.9) 的解. 由 (3.1.27)，对足够小的 t 它必然存在. 我们将证明，当 $G(x(t))$ 为常数时 $F(x(t))$ 沿着 $x(t)$ 减少，且 $x(t)\in C_A$，从这个事实可推出，对所有的 t，$x(t)$ 存在且是 (3.2.9) 的解. 事实上，如果 $x(t)$ 只对某个极大时间区间 $[0,\beta)$ 存在，那么由上面所讲的以及 (3.1.27) 就可推出 $\beta=\infty$. 此外有下面的式子成立：

$$[F(x(t))]'=(\lambda(x)G'(x)-x'(t),x'(t))=-\|x'(t)\|^2,$$
$$[F(x(t))]''=(F''(x)x'(t),x'(t))+(F'(x),x''(t)),$$
$$[G(x(t))]'=0\qquad(根据\ \lambda(x)\ 的定义).$$

从而 $F(x(t))$ 沿 $x(t)$ 减少，而且

$$[F(x(t))]''=\delta^2F(x,x'(t))-(x'(t),x''(t))$$
$$=\delta^2F(x,x'(t))+\frac{1}{2}[F(x(t))]''.$$

故 $[F(x(t))]''=2\delta^2F(x,x'(t))$. 于是从 (3.2.8) 推出 $g(t)=F(x(t))$ 满足微分不等式 $g''(t)+2Ag'\geqslant 0$. 和 (3.2.3) 一样，

$$\|x(t)-x_0\|\leqslant\|f(x_0)\|/A,$$

所以 $x(t)\in C_A$.

重复 (3.2.3) 中的证明，我们得到 $x_\infty=\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ 存在；

$$F'(x_\infty) - \lambda(x_\infty)G'(x_\infty) = 0,$$

于是 x_∞ 就是 $F(x)$ 限于 C_A 上时的极小点. 为证 x_∞ 是唯一极小点，我们证明，对任 $x_0 \in C_A$，

$$F(x_0) \geqslant F(x_\infty) + \eta(\|x_0 - x_\infty\|),$$

其中当 $t > 0$ 时 $\eta(t) > 0$. 设 $x(0, \mu)$ 是连接 x_0 和 x_∞ 的任一 C^1 曲线，还设 $x(t,\mu)$ 是初值问题(3.2.9)带初值条件 $x(0,\mu)$ 时的解. 引用(3.2.8)，令 $x_\mu = (\partial/\partial\mu)x(t, \mu)$，我们有

$$\begin{aligned}(d/dt)\|x_\mu\|^2 &= 2(x_\mu, x_{\mu t})\\ &= -2(F''(x) - \lambda(x)G''(x)x_\mu, x_\mu)\\ &\leqslant -2A\|x_\mu\|^2.\end{aligned}$$

于是 $\|x_\mu\|e^{At}$ 是 t 的递减函数，且

$$\begin{aligned}\|x(t, 1) - x(t, 0)\| &\leqslant \int_0^1 \|x_\mu(t, \mu)\| d\mu\\ &\leqslant e^{-At}\int_0^1 \|x_\mu(0, \mu)\| d\mu.\end{aligned}$$

从而

$$x_\infty = \lim_{t\to\infty} x(t, 1) = \lim_{t\to\infty} x(t, 0).$$

用 Taylor 定理(2.1.33)，可求出对某 $0 < \tau < t$(略去了下标 μ)，

$$(3.2.10) \qquad F(x_0) = F(x(t)) + t[F(x(t))]' + \frac{1}{2}t^2[F(x(\tau))]''.$$

但因 $F(x(t)) \geqslant F(x_\infty)$，$[F(x(t))]' = -\|x'(t)\|^2$，$[F(x(\tau))]'' \geqslant 2A\|x'(t)\|^2$，于是从 (3.2.10) 可得 $F(x_0) \geqslant F(x_\infty) + (At^2 + t)\|x'(t)\|^2$. 从而如所希望的，$x_\infty$ 是唯一极小点.

3.2C 一般临界点的结果

如果 $\bar{x}$ 是 $F(x)$ 的临界点，但不是相对极小点，那么无论 $\|x_0 - \bar{x}\| > 0$ 多么小，一般讲最速下降法可不收敛到 $\bar{x}$. 作为例子，考虑定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的函数

$$F(x, y) = x^2 - y^2 + \frac{1}{2}y^4.$$

相应初值问题为

$$\frac{dx}{dt} = -2x, \qquad \frac{dy}{dt} = 2(y - y^3),$$

$$(x(0),\ y(0)) = (x_0,\ y_0).$$

它的解 $x(t)$ 总是收敛到 $F(x,y)$ 的三个临界点：$(0,0)$, $(0,\pm 1)$ 中的一个。点 $(0,\ 0)$ 是 $F(x,\ y)$ 的鞍点。不难核验，无论 $(x_0,\ y_0)$ 离 $(0,\ 0)$ 多么近，只要 $y_0 \neq 0$,

$$(x(t),\ y(t)) = (x_0 e^{-4t},\ y(y_0,\ t))$$

总是收敛到绝对极小点 $(0,\ \pm 1)$ 中的某一个。于是出现这样一个问题：是否象刚才给出的例子那样，最速下降法导向 $F(x)$ 的某个临界点(不必在初值 x_0 的附近)吗？

首先证明下面的简单结果

(3.2.11) **定理** 设 $F(x)$ 是定义在 Hilbert 空间H上的 C^1 实值泛函，$F'(x)$ Lipschitz 连续，F 有如下性质：

(i) $F(x)$ 在H上有下界；

(ii) 对 $\mathbf{R}^1$ 中任何有界集 B，$F^{-1}(B)$ 有界；

(iii) 如果在H中 x_n 弱收敛于 x，$\{\text{grad}F(x_n)\}$ 强收敛于 v，则 $v = \text{grad}F(x)$.

那么，初值问题 (3.2.1) 对一切 t 有解，弱极限 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$ 存在且是 $F(x)$ 的临界点。

证明：和定理 (3.2.3) 的证明一样，$f(x)$ 局部 Lipschitz 连续。于是对小的 t，(3.2.1) 的解 $x(t)$ 存在，并且 $F(x(t))$ 沿 $x(t)$ 递减。设对 $t\in[0,\ t_*)$ $x(t)$ 存在，但对 $t = t_* < \infty$，$x(t)$ 不存在。那么对 $0 < t_1$, $t_2 < t_*$,

$$(3.2.12)\quad \|x(t_2) - x(t_1)\| = \left\|\int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{ds} ds\right\|$$
$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \|\text{grad}F(x(s))\| ds$$
$$\leqslant \left\{\int_{t_1}^{t_2} \|\text{grad}F(x(s))\|^2 ds\right\}^{1/2} (t_2 - t_1)^{1/2}.$$

另一方面，因为对 $t\in[0,t_*)$，$F(x(t))$ 有下界，

$$(3.2.13)\quad F(x(t_2)) - F(x(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} F(x(s)) ds$$
$$= -\int_{t_1}^{t_2} \|\text{grad}F(x(s))\|^2 ds.$$

结合（3.2.12）和（3.2.13），我们得到，如果 $t\to t_*$，则 $\{x(t)\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列，所以 $\lim\limits_{t\to t_*}x(t)$ 存在且有限. 在 $t=t_*$ 点用局部存在定理（3.1.23），$x(t)$ 可以连续延拓到 $t>t_*$ 并满足（3.2.1）. 这同 t_* 的极大性相矛盾，从而 $t_*=\infty$.

其次证明 $\{x(t)\}$ 的一个子序列收敛到 $F(x)$ 的一个临界点. 因为 $F(x)$ 有下界，从（3.2.13）推出

$$\int_0^\infty \|\mathrm{grad}F(x(s))\|^2 ds<\infty.$$

于是当 $t\to\infty$ 时 $\underline{\lim}\|\mathrm{grad}F(x(t))\|=0$. 另一方面，由（ii），因为

$$\{x(t)\}\subset F^{-1}\{\inf_H F(x),\ F(x(0))\},$$

所以集合 $\{x(t)\}$ 有界. 因而 $\{x(t)\}$ 有弱收敛子序列 $\{x(t_i)\}$，当 $t_i\to\infty$ 时，记其弱极限为 $\bar{x}$. 同时 $\mathrm{grad}F(x(t_i))$ 强敛于 0，根据（iii），

$$\mathrm{grad}F(\bar{x})=0,$$

$\bar{x}$ 就是所求的临界点.

如果假定 $F(x)$ 的所有临界点都是孤立的，那么可以得到比（3.2.11）更强的有用的结果.

（3.2.14）设 $F(x)$ 是定义在 Hilbert 空间 H 上的 C^1 实值泛函，$F'(x)$ Lipschitz 连续，$F(x)$ 在 H 上有下界，并满足如下条件：

（i）$F(x)$ 的所有临界点都是孤立的；

（ii）对任何序列 $\{x_n\}\subset H$，如果 $|F(x_n)|$ 有界，$F'(x_n)\to 0$，那么 $\{x_n\}$ 必有收敛子序列.

那么对所有的 t，微分方程（3.2.1）有解 $x(t)$，$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$ 存在，它是 $F(x)$ 的临界点.

证明：重复（3.2.11）的论证，应用上面更强的条件（ii），我们可以假定对某个子序列 $t_i\to\infty$，$x(t_i)$ 强收敛于 x_∞，从而只需证明

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=x_\infty$$

存在.

设若不然，必存在两个以 x_∞ 为心的球邻域 O_1 和 O_2，使 $O_2\subset O_1$ 和 $\bar{O}_1-O_2$ 不含有 $F(x)$ 的临界点. 同时，对一个无穷多个不交区间构成的序列 $[t_i,\tau_i]$，存在常数 $c>0$，使得当 $t\in[t_i,\tau_i]$ 时 $x(t)\in\bar{O}_1-O_2$，并且

$$\|x(\tau_i)-x(t_i)\|\geqslant c.$$

根据条件 (ii)，必有正数 d，使对任意 $x\in \bar{O}_1-O_2$ 都有 $\|\text{grad}F(x)\|\geqslant d$. 否则将有临界点 $x\in\bar{O}_1-O_2$. 于是当 $t\to\infty$时，

$$\lim_{t\to\infty}F(x(t))=F(x(0))-\int_0^\infty\|\text{grad}F(x(s))\|^2ds$$

$$\leqslant F(x(0))-\sum_{i=1}^\infty\int_{t_i}^{\tau_i}\|\text{grad}F(x(s))\|^2ds$$

$$\leqslant F(x(0))-\sum_{i=1}^\infty d\int_{t_i}^{\tau_i}\|\text{grad}F(x(s))\|ds,$$

于是,根据前面的事实

$$\lim_{t\to\infty}F(x(t))\leqslant F(x(0))-\sum_{i=1}^\infty d\|x(\tau_i)-x(t_i)\|$$

$$\leqslant F(x(0))-\sum_{i=1}^\infty cd=-\infty,$$

这与 $F(x)$ 有下界相矛盾.

3.2D 一般光滑映射的最速下降法

我们用一个简短的讨论来结束这一节，即最速下降法对一般映射的应用. 在 Cauchy 早期的研究中，他指出刚才讨论的方法可以用来研究光滑映射的可解性. 为简单起见,在无穷维时假定 f 是 C^q(非线性) Fredholm 算子,有非负指标 $r<q$，映实 Hilbert 空间H到自身. 我们证明(3.2.15)对任 $p\in H$，方程 $f(x)=p$ 的解和泛函 $F(x)=\|f(x)-p\|^2$ 的临界点相同.

证明: 简单的计算指出，$F(x)$ 的临界点和算子方程

$$[f'(x)]^*\{f(x)-p\}=0 \tag{3.2.16}$$

的解相同，其中 $[f'(x)]^*$ 记 $f'(x)$ 的共轭算子. 根据 Sard 定理在无穷维时的推广 (3.1.45)，f 的奇异值 $f(S)$ 构成一个无处稠密集. 于是，对任 $p\bar{\in}f(S)$,

$$\dim\text{Ker}f'^*(x)=\dim\text{coker}f'(x)=0.$$

对于这样的一般的 p, 如果 $\bar{x}$ 是 (3.2.16) 的解,那么 $f(\bar{x})=p$. 这就证明了所要的结果.

假定 $0\bar{\in}f(S)$，在 3.2A—C 的结论中考虑泛函 $F(x)=\|f(x)\|^2$ 的临界点,就可应用上面的结果研究 $f(x)=0$ 的解.

3.3 解析算子和强级数法

对复解析映象，还有一些方法常常是有效的，用它们可对第二部分开始处所提出的问题作更完整的讨论。

3.3A 一 些 启 发

为说明这点，我们从考虑形式的待定系数法开始，它的合法性由“Cauchy 强级数”得到保证。这个方法是研究非线性问题主要的经典方法，迄今在非线性分析中仍然占有重要的地位。例如，假设要解(解析)算子方程 $f(x, \lambda)=0$，它定义在 Banach 空间 X 上，对小参数 λ 有定义，并已知 $f(x, 0)=0$ 有一个解 x_0。用待定系数法，我们假定它有形若

$$x(\lambda)=x_0+\sum_{n=1}^{\infty} x_n\lambda^n, \qquad x_n\in X$$

的解。设这样的解存在且有正的收敛半径。把 $f(x(\lambda), \lambda)$ 展成

$$f(x(\lambda),\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_1, \cdots, x_n)\lambda^n,$$

解隐函数组 $f_n(x_1, \cdots, x_n)=0$ $(n=1, 2, \cdots)$。设法证明，在一个以 x_0 为心的小球中这个方程组有且仅有一个解 $(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n, \cdots)$。最后，由找到 $x(\lambda)$ 的一个强级数 $x^*(\lambda)$，证明解

$$x(\lambda)=x_0+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{x}_n\lambda^n$$

确实有正的收敛半径。更清楚些，

(3.3.1) **定义** 如果

$$x^*(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} x_n^*\lambda^n,$$

其中 x_n^* 是正实数，$\|x_n\|\leqslant x_n^*$，那么称 $x^*(\lambda)$ 强于 $x(\lambda)$，记作 $x(\lambda)\ll x^*(\lambda)$。

显然，如果 $x^*(\lambda)$ 有如下意义的正的收敛半径

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n^*\|^{1/n} < \infty,$$

那么，根据 2.3 节的结果，$x(\lambda)$ 也有正的收敛半径。

3.3B 一个解析隐函数定理

作为强级数法简单的但是典型的结果，我们证明

(3.3.2) **解析隐函数定理** 设 $X\times Y$ 是复 Banach 空间，算子 $F(x,y)$ 映 (x_0,y_0) 的某邻域到复 Banach 空间 Z 解析。还设 $F(x_0,y_0)=0$，线性算子 $F_y(x_0,y_0)$ 有有界逆。那么 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 附近有且仅有一个解 $y=f(x)$。在 x_0 附近，$f(x)$ 是 x 的解析函数，并且相应幂级数的收敛半径可由下面的 (3.3.8) 估计。

证明：不失一般性，可设 $(x_0,y_0)=(0,0)$。将 $F(x,y)$ 在 $(0,0)$ 展开，得

$$(3.3.3)\quad F(x,y)=F_{10}(0,0)x+F_{01}(0,0)y+\sum_{i+j=2}^{\infty}F_{ij}(0,0)\times(x^i,y^j),$$

由 Cauchy 公式，其中

$$F_{ij}(0,0)(x^i,y^j)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\xi|=r_1}\int_{|\eta|=r_2}\frac{F(\xi x,\eta y)}{\xi^{i+1}\eta^{j+1}}d\xi d\eta.$$

现在要找一个收敛级数

$$(3.3.4)\qquad y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^n),$$

对充分小的 $\|x\|$ 它满足方程 $F(x,y)=0$。显然，因为

$$F_{01}(0,0)=-L$$

有逆，y 应该满足

$$(3.3.5)\quad y=L^{-1}F_{10}(0,0)x+\sum_{i+j=2}^{\infty}L^{-1}F_{ij}(0,0)(x^i,y^j)$$

$$=H(x,y).$$

最后这个方程指出，如果 x, y 满足 (3.3.3)，这些系数至少形式上

被唯一确定。事实上，形式地将 (3.3.4) 代入 (3.3.5)，就可看到算子 a_n 应该满足方程组

(3.3.6) $\quad a_{n+1}x^{n+1} = f_{n+1}(a_1, \cdots, a_n, x),\ n = 0, 1, 2, \cdots,$

其中 f_{n+1} 是 x 的 $n+1$ 重线性算子，与 $a_1, a_2, \cdots$ 直到 a_n 有关，还与 $F_{ij}(i+j=n+1)$ 有关。于是，对 $n = 0, 1, \cdots$, $a_{n+1}x^{n+1}$ 可以表作 x 的 $n+1$ 重线性算子和 $F_{ij}(i+j=n+1)$ 的线性组合，其系数为正。因而，如记 $a_{n+1}x^{n+1} = Q_{n+1}(x, F_{ij})$，那么这些函数有定义，且与 $F(x, y)$ 的具体形式无关。为证级数 (3.3.5) 有正的收敛半径，我们注意到，根据 Cauchy 估计 (2.3.5)，如果 $S_r = \{(x, y) | \|x\|, \|y\| \leqslant r\}$，则有

$$\|F_{ij}(x^i, y^j)\| \leqslant \frac{M}{r^{i+j}} \|x\|^i \|y\|^j, \tag{3.3.7}$$

其中 $M = \sup\limits_{S_r} \|f(x, y)\|$。现在考虑这里证明中的适当的强级数。

根据 (3.3.7)，(3.3.5) 右端在 S_r 上最直接的强函数 $\Phi(\|x\|, \|y\|)$ 是

$$\begin{aligned}
&\|L^{-1}\| \left\{ \sum_{i+j=1}^{\infty} \left(\frac{M}{r^{i+j}}\right) \|x\|^i \|y\|^j - \frac{M}{r} \|y\| \right\} \\
&\quad \leqslant \|L^{-1}\| \left\{ \frac{M}{(1 - \|x\|/r)(1 - \|y\|/r)} - M - \frac{M}{r} \|y\| \right\}.
\end{aligned}$$

下面是强级数法关键的一步，即如果

$$\Phi(\|x\|, \tilde{y}) \gg H(x, y) = \Sigma H_{ij}(x^i, y^j),$$

并且方程 $\tilde{y} = \Phi(\|x\|, \tilde{y})$ 有收敛的解析解 $\tilde{y} = \Sigma \tilde{a}_n \|x\|^n$，那么方程 $y = H(x, y)$ 形式的解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x^n)$$

(它以 $\tilde{y}$ 为强级数) 对 $\|x\| < R$ 收敛，其中 $R \leqslant \tilde{R}$，$\tilde{R}$ 是 $\tilde{y}$ 的收敛半径。事实上，如果 $\tilde{y} = \Sigma \tilde{a}_n \|x\|^n$，

$$\Phi(\|x\|, \tilde{y}) = \Sigma \alpha_{ij} \|x\|^i \tilde{y}^j,$$

那么 $\tilde{a}_n \leqslant Q_{n+1}(\|x\|, \alpha_{ij})$。如已经提到的，因为 $\|H_{ij}\| \leqslant \alpha_{ij}$，函

数 Q_{n+1} 有性质 $a_n = Q_{n+1}(x, H_{ij})$，以及 $\|a_n\| = Q_{n+1}(\|x\|, a_{ij})$，因而 $y \ll \tilde{y}$。于是剩下的只是计算方程

$$\tilde{y} = c\left\{\frac{1}{(1-\|x\|/r)(1-\tilde{y}/r)} - 1 - \frac{\tilde{y}}{r}\right\} \tag{3.3.8}$$

（其中 $c = \|L^{-1}\|M$）的解的收敛半径。下面给出的简单计算指出，如果把这个方程看作 $\tilde{y}$ 的二次方程，那么，当 $\|x\| = 0$ 时为 0 的那个根是

$$\tilde{y} = \frac{r^2}{2(r+c)}\left[1 - \left(1 - \frac{\|x\|}{r}\right)^{-1/2}\left(1 - \frac{\|x\|}{\alpha}\right)^{1/2}\right],$$

其中 $\alpha = r(1/r + 2c)^2$；$c = \|L^{-1}\|M$。从而当 $\|x\| < \alpha$ 时 $\tilde{y}$ 对 $\|x\|$ 解析。

这个计算可这样进行：当看作 $\tilde{y} = \sigma$ 的二次方程时，(3.3.8) 可以写成

$$\sigma^2 - \left\{\frac{r^2}{r+c}\right\}\sigma - \left\{\frac{cr^2}{r+c}\right\}\frac{\|x\|}{r}\Big/\left(1 - \frac{\|x\|}{r}\right) = 0.$$

对固定的 x 和 r，这个方程最小的根（即当 $x = 0$ 时为 0 的那个根）可由在通常的二次方程求根公式中选择适当的负因子得出。

关于解析隐函数定理的附注：

注意到在（3.1.10）中给出的隐函数定理的证明基于和压缩映射原理有关的叠代格式，就可得出(3.3.2)中第一部分的结论，于是，解 $y = y(x)$ 是解析函数列的一致极限，从而解析。不过一般说来，在强级数法中收敛半径的估计更精确些。

3.3C 复解析 Fredholm 算子的局部性质

作为 (3.3.2) 的简单应用，考察方程 $f(z) = y$ 在 z_0 附近的解的局部结构，其中 z_0 是已给的解，f 是作用于复 Banach 空间之间的复解析 Fredholm 映射。

(3.3.9) **定理** 如X和Y是复 Banach 空间，$z_0 \in X$，f 是从 z_0 的某邻域到Y中的复解析 Fredholm 映射，z_0 是 $y = f(z)$ 的已知解。那么，在 z_0 附近，$y = f(x)$ 的解构成一个有限维解析簇的一

对一解析象集。如果 z_0 不是孤立解，那么存在不为常数的收敛幂级数

$$z(\lambda)=z_0+\sum_{n=1}^{\infty}z_n\lambda^n$$

满足 $y=f(z)$。

证明： 不失一般性，可设 $z_0=0$ 和 $\|y\|$ 很小，使得方程 $y=f(z)$ 可以写成

(3.3.10) $\quad y=f'(0)z+R(z)$， 其中 $\|R(z)\|=O(\|z^2\|)$，

$R(z)$ 复解析．设 $X=\mathrm{Ker}(f'(0))\oplus X_2$，$Y=\mathrm{Range}f'(0)\oplus Y_2$．对

$$z\in S(0,\delta)=\{z\,|\,\|z\|\leqslant\delta\},$$

令 $z=z_1+z_2$ 是 z 的相应直和分解，我们试着解方程

(3.3.11) $\quad y=f'(0)z_2+R(z_1+z_2)$。

据 (1.3.38)，有有界线性映射 A_0: $Y\to X$，对 $y\in\mathrm{Range}\ f'(0)$，它一对一，值域为 X_2，使得

$$A_0f'(0)=I-P,$$

其中 P 是到 $\mathrm{Ker}f'(0)$ 上的投影．用 A_0 作用 (3.3.11)，得到

$$A_0y=z_2+A_0R(z_1+z_2).$$

那么根据解析隐函数定理 (3.3.2)，$z_2=h(z_1)$，其中 $h(W)=O(\|W\|^2)$ 是复解析映射．现在 $\mathrm{Ker}(A_0)=Y_2$，A_0 在 $\mathrm{Range}\ f'(0)$ 上一对一，又因 $\dim\mathrm{Ker}(A_0)<\infty$，因而存在一个从 Y 到 Y_2 的有界投影 P_1．于是 (3.3.10) 等价于方程

$$0=P_1[y-f'(0)h(z_1)+R(z_1+h(z_1))].$$

为 Y_2 和 $\mathrm{Ker}f'(0)$ 选取有限基，后面这个方程复解析，等价于一个有限个复变元的，有限个复解析函数的方程组．于是，根据 (1.6.2) 在解析情形的定理就得到所要的结果．

3.4 广义反函数定理

3.4A 一些启发

在这里我们把反函数定理 (3.1.5) 推广到线性算子 $f'(x)$ 没有有界逆的情形，但是仍然假定，对于 x_0 附近的 x，$f'(x)$ 有"近似"的逆．更清楚些，设 f 是 C^1 映射，定义在 Banach 空间 X 中的球

$S(x, r)$ 上，映入 Banach 空间 Y。设已给出 $f(x)=0$ 解的一个近似 x_0，我们试图构造一个"更好"的近似 $\{x_N\}$。令 $x_{N+1}=x_N+\rho_N$，其中 ρ_N 是方程 $f(x_N+\rho_N)=0$ 的近似解(关于 x_N 线性化)。定理(3.1.16)中介绍的 Newton 法指出，当 $\rho_N=-[f'(x_N)]^{-1}f(x_N)$时，$f$ 在 x_0 附近的光滑性和有逆性保证这个方法收敛（依二次速率收敛）。如果对 x_0 附近的 x，$f'(x)$ 没有(有界)逆，对每个线性化方程仍有可能求一个近似解 ρ_N'，使 $x_{N+1}=x_N+\rho_N'$ 收敛到

$$f(x)=0$$

的解（事实上，如果可以精确地测量出每个线性化方程的近似解 ρ_N' 逼近真解 ρ 的程度，那么 Newton 叠代法的快速收敛可以用于补尝每个 ρ_N' 的误差）。在微分方程的理论中，经常出现那种情形，即线性算子 $(f'(x)^{-1}$ 不能保证函数在它的定义域中的光滑性。例如，如果 $f'(x)$ 是有界线性映射，映 p 次可微函数空间 X^p 到 $p-m$ 次可微函数空间 X^{p-m} (即 $f'(x)$为m阶)。当然期望$(f'(x))^{-1}$是从X^p 到 X^{p+m} 的有界线性映射，然而常常却是 $(f'(x))^{-1}$: $X^p\to X^{p+m-\beta}$（降低了 β 次可微性），从而在有限步后，序列$\{(f'(x_N))^{-1}\}$不再存在。在这种情形，有时有可能用一个近似的线性光滑有逆算子 $T_{\xi_N}(f'(x_N))^{-1}=L_Nx_N$ 去代替 $(f'(x_N))^{-1}$，使得实际上 L_N 映 X^p 到 X^{p+m} 有界，这就有可能得出线性化方程的近似解。

为度量每个 ρ_N' 近似的程度，我们把 Banach 空间X 嵌入到一个单参数 Banach 空间连续链。当 $\alpha>\alpha'$ 时 $X_\alpha\subset X_{\alpha'}$。对 $\alpha>\alpha'$，X_α 到 $X_{\alpha'}$ 的嵌入是连续的，并使 $f(\alpha)=\log\|\cdot\|_\alpha$ 是 α 的凸函数 $(\alpha\geqslant 0)$。因而，对 $0\leqslant\rho\leqslant r$ 和 $v\in X_r$，

$$\|v\|_\rho\leqslant\|v\|_0^{1-\rho/r}\|v\|_r^{\rho/r}.$$

如果 $(f'(x))^{-1}$: $Y\to X_\alpha$ 无界，当把 X_α 换成 $X_{\alpha-\delta}$ 时（对某个 $\delta>0$）它可能有界。这样，如果 f: $X_r\to Y$，逼近序列可在 X_r 中发散，但在 $X_{r'}$ 中收敛 $(r'<r)$。更清楚些，如果对每个 $\varepsilon>0$，有 $x_\varepsilon\in X_r$ 使 $\|f'(u)x_\varepsilon-g\|\leqslant c\|u\|_r\varepsilon^\lambda$，同时对 $\|u\|_r\leqslant K_0$，

$$\|x_\varepsilon\|_r\leqslant K_0/\varepsilon,$$

其中 c 和 K_0 是绝对常数，我们就称 $f'(u)x = g$ 在 X_r 中 λ 阶近似可解。现在用这个概念，由（λ 阶）近似解一系列线性方程组

$$f'(x_r)\rho = g(\rho = \rho_n)$$

证明一个结果。

3.4B J. Moser 的一个结果

(3.4.1) **定理** 设 f 是从球 $S(x_0, \bar{r}) \subset X_r$ 到 Banach 空间 Y 的 C^1 映射，满足：

(i) 对 $u \in S(x_0, \bar{r})$，$f'(u)$ 在 X_r 中 λ 阶近似可解；

(ii) 对 $u \in S(x_0, \bar{r})$，$\|f'(u)v\| \geqslant c\|v\|_0$，其中 c 与 u，v 无关；

(iii) 对 $u, v \in S(x_0, \bar{r})$，有绝对常数 $\beta \in [0, 1)$ 和 $M > 0$ 使

$$\begin{aligned}\|Q(u, v)\| &= \|f(u+v) - f(u) - f'(u)v\| \\ &\leqslant M\|v\|_0^{2-\beta}\|v\|_r^{\beta};\end{aligned}$$

(iv) 对 $\|u\|_r \leqslant \bar{K}$，$\|f(u)\| \leqslant M\bar{K}$。

那么，只要 $\bar{r}$ 和 $\|f(x_0)\|$ 充分小，上面构造的 λ 阶近似序列

$$x_{N+1} = x_N + \rho_N'$$

在 $X_{r'}$ 中收敛到 $\bar{x}$，其中 $r' < (\lambda/(\lambda+1))r$。于是，如果

$$f: X_{r'} \to Y$$

连续，那么 $f(\bar{x}) = 0$。

证明： 不失一般性，可假定 (ii) 中常数 $c = 1$。我们的论证基于证明三个归纳假设：

(1N) $\|f(x_N)\| \leqslant K^{-\mu s^N}$，

(2N) $\|x_N - x_{N-1}\|_0 \leqslant 2K^{-\mu s^{N-1}}$，

(3N) $\|x_N - x_{N-1}\|_r \leqslant \dfrac{1}{2}K^{s^N}$，

其中 K，μ 和 s 是待定正数。如果对所有的 N 这些不等式成立，那么对 $r' < r(\mu/(s+\mu))$，$\{x_N\}$ 是 Xr' 中的 Cauchy 序列。事实上，因为

$$\|v\|_{\rho'} \leqslant \|v\|_0^{1-\rho'/r}\|v\|_r^{\rho'/r}.$$

根据（2N）和（3N），

$$\begin{aligned}\|x_N - x_M\|_{\rho'} &\leqslant \sum_{j=M+1}^{N}\|x_j - x_{j-1}\|_{\rho'} \\ &\leqslant \sum_{j=M+1}^{N}\|x_j - x_{j-1}\|_0^{1-\rho'/r}\|x_j - x_{j-1}\|_r^{\rho'/r} \\ &\leqslant R\sum_{j=M+1}^{N}K^{s^{j-1}[s\rho'/r-\mu(1-\rho'/r)]}.\end{aligned}$$

当

$$s\frac{\rho'}{r} - \mu\left(1 - \frac{\rho'}{r}\right) < 0,$$

亦即

$$\rho' < \frac{r\mu}{s+\mu}$$

时，随着 $N, M \to \infty$，这个级数趋于 0，于是，如果 $\bar{x} = \lim\limits_{N\to\infty} x_N$ 和 f 是 $X_{\rho'} \to Y$ 的连续映射，那么 $f(\bar{x}) = 0$. 所以，剩下的只是验证（1N），（2N）和（3N）. 对 $N = 0$，（1N）是假设条件，因 x_{-1} 没定义，故（2N），（3N）没意义. 假定对 $N = 0, \cdots, n$，（1N）—（3N）成立，我们依次证明（$2(n+1)$），（$3(n+1)$）和（$1(n+1)$）如下：

（$2(n+1)$）的证明：首先指出

$$\begin{aligned}\|x_n\|_r &\leqslant \|x_0\|_r + \sum_{j=0}^{n-1}\|x_{j+1} - x_j\|_r \\ &\leqslant K + \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{2}K^{s^{j+1}} \qquad (\text{由}(3n)) \\ &\leqslant K^{s^n} \qquad (\text{当} K \text{充分大时}).\end{aligned}$$

由近似解线性化方程 $f'(x_n)\rho_n + f(x_n) = 0$，以决定

$$x_{n+1} = x_n + \rho_n.$$

令 $\rho_n = \rho_\varepsilon$（其中 ε 待定），可得如下的估计：

(a) $\quad \|f'(x_n)\rho_\varepsilon + f(x_n)\| \leqslant MK^{s^n}\varepsilon^\lambda$,

(b) $\quad \|\rho_\varepsilon\|_r \leqslant K^{s^n}\varepsilon^{-1}$.

因而由 (1n),

$$\|f(x_n)\| \leqslant K^{-\mu s^n}$$

和

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\|_0 = \|\rho_\varepsilon\|_0 &\leqslant \|f'(x_n)\rho_\varepsilon\|^{*)}\\ &\leqslant \|f(x_n)\| + \|f'(x_n)\rho_\varepsilon + f(x_n)\|\\ &\leqslant K^{-\mu s^n} + M\varepsilon^\lambda K^{s^n}.\end{aligned}$$

现选取 $\varepsilon > 0$ 使

$$MK^{s^n}\varepsilon^\lambda \ldots \tag{3.4.2}$$

$$M\varepsilon^\lambda K^{s^n} \leqslant K^{-\mu s^n},$$

那么

$$\|x_{n+1} - x_n\|_0 \leqslant 2K^{-\mu s^n}.$$

(3(n + 1)) 的证明：根据上面的 (b)，只要

$$K^{s^n}\varepsilon^{-1} \leqslant \frac{1}{2}K^{s^{n+1}}, \tag{3.4.3}$$

就有

$$\|x_{n+1} - x_n\|_r = \|\rho_\varepsilon\|_r \leqslant K^{s^n}\varepsilon^{-1} \leqslant \frac{1}{2}K^{s^{n+1}}.$$

(1(n + 1)) 的证明：又由上面的 (a) 和 (b)，

$$\begin{aligned}\|f(x_{n+1})\| &\leqslant \|f(x_n) + f'(x_n)\rho_\varepsilon + Q(x_n, \rho_\varepsilon)\|\\ &\leqslant \|f(x_n) + f'(x_n)\rho_\varepsilon\| + \|Q(x_n, \rho_\varepsilon)\|\\ &\leqslant MK^{s^n}\varepsilon^\lambda + M\|\rho_\varepsilon\|_0^{2-\beta}\|\rho_\varepsilon\|_r^\beta\\ &\leqslant MK^{s^n}\varepsilon^\lambda + M\{2K^{-\mu s^n}\}^{2-\beta}\{\varepsilon^{-1}K^{s^n}\}^\beta.\end{aligned}$$

现在这样选择 ε 和 μ，使上式右端不超过 $K^{-\mu s^{n+1}}$. 如果下面的 (3.4.5) 成立，则 (3.4.2) 自动满足，所以只需选取 ε 和 μ 使得

$$K^{s^n}\varepsilon^{-1} = \frac{1}{2}K^{s^{n+1}}, \tag{3.4.4}$$

$$MK^{s^n}\varepsilon^\lambda \leqslant \frac{1}{2}K^{-\mu s^{n+1}}, \tag{3.4.5}$$

$$M(2K^{-\mu s^n})^{2-\beta}(\varepsilon^{-1}K^{s^n})^\beta < \frac{1}{2}K^{-\mu s^{n+1}}. \tag{3.4.6}$$

---

*) 此不等式似由 (ii) 而得，但尚需验证 $x_n \in S(x_0, r)$，以下有类似问题——译者注.

因为从（3.4.4）推出，当K充分大时ε^{-1}为$K^{s^{n}(s-1)}$阶。所以如果

(3.4.7)　$s\mu+1<\lambda(s-1)$　和　$s(\mu+\beta)<\mu(2-\beta)$，

那么（3.4.5）和（3.4.6）成立*)。这就完成了（$1(n+1)$）的证明，从而定理（3.4.1）得证。

3.4C　光滑算子

为用定理（3.4.1），我们现在考察这样一种方法，它可以用来保证形若 $f'(u)\rho+f(u)=0$ 的线性算子方程的近似可解性。

光滑算子　假定对$\xi>0$和α，$\beta>0$已构造出单参数线性算子族 T_ξ：$X_\alpha\to X_{\alpha+\beta}$，它们有如下性质：

(a) 对 $v\in X_\alpha$，$\|T_\xi v\|_{\alpha+\beta}\leqslant C\xi^\beta\|v\|_\alpha$，其中$C$是绝对常数；

(b) 对 $v\in X_r$，$\|(I-T_\xi)v\|_{r-\delta}\leqslant C\xi^{-\delta}\|v\|_r$。

还设算子 $f'(u)$ 有单侧逆 $L(u)$，$L(u)$ 有性质：如果 $u\in X_\alpha$ 使 $f'(u)v=h$，那么必存在绝对常数 C_0，使 $L(u)h=v$，以及

(c) $C_0^{-1}\|L(u)h\|_{\alpha-\sigma}\leqslant\|h\|\leqslant C_0\|L(u)h\|_{\alpha+\sigma_1}$，其中 σ，σ_1 表示由算子 $L(u)$ 引起的“光滑度的降低”；

(d) $L(u)f(u)\in X_{\alpha+\beta_0}$，$\beta_0>\sigma_1$，$\|L(u)f(u)\|_{\alpha+\beta_0}\leqslant C_1\|u\|_\alpha$。

于是，如果 $f'(u)$：$X_\alpha\to Y$ 是有界算子，$\|f'(u)\|\leqslant C_2$，我们取 $\rho_\xi=-T_\xi L(u)f(u)$ 作为方程 $f'(u)\rho+f(u)=0$ 的近似解（把它看作元素 $L(u)f(u)$ 的光滑化）。为确定这样选取时线性方程的近似可解性，我们注意到，对 $u\in X_\alpha$，$\beta=\beta_0-\sigma_1$，

$$
\begin{aligned}
&\|f'(u)\rho_\xi+f(u)\|\\
&\quad=\|f'(u)\{(I-T_\xi)-I\}L(u)f(u)+f(u)\|\\
&\quad=\|f'(u)(I-T_\xi)L(u)f(u)\|\\
&\quad\leqslant\|f'(u)\|\|(I-T_\xi)L(u)f(u)\|_{\alpha+\sigma_1}\\
&\quad\leqslant\|f'(u)\|\{C\xi^{-\beta}\}\|L(u)f(u)\|_{\alpha+\sigma_1+\beta}\\
&\quad\leqslant C_2C\xi^{-\beta}C_1\|u\|_\alpha.
\end{aligned}
$$

另一方面，

---

*) 原文此处还有一个（3.4.8）式，这似有问题，且与本文关系不大，故删去——译者注。

$$\|\rho_\xi\|_\alpha = \|T_\xi L(u)f(u)\|_\alpha \leqslant C\xi^\sigma\|L(u)f(u)\|_{\alpha-\sigma}$$
$$\leqslant C\xi^\sigma C_0\|f(u)\|.$$

于是，根据近似可解性的概念，由 $\|\rho_\xi\|_\alpha \sim 1/\varepsilon$，令

$$\xi^{-\sigma} = \varepsilon, \text{ 于是 } \xi^{-\beta} = \varepsilon^{\beta/\sigma},$$

我们得出，具有性质 (a)—(d) 的光滑算子确定了

$$f'(u)\rho + f(u) = 0$$

的近似可解性，其阶数为 $(\beta_0 - \sigma_1)\sigma^{-1}$。

典型的光滑算子是

A. d 个变元 $x = (x_1, \cdots, x_d)$ 的截尾 Fourier 级数。设 $v(x)$ 是定义在 $D = \{x \mid |x_i| \leqslant 2\pi, (i = 1, \cdots, d), x = (x_1, \cdots, x_d)\}$ 上周期为 2π 的 C^r 类函数，由规定范数

$$\|v\|_{C^r} = \max_{0 \leqslant p \leqslant r} \sup_{x \in D} |D^p v|$$

构成空间 $\tilde{C}^r$。令 $X_r = \tilde{C}^r$。每个 $v \in \tilde{C}^r$ 可展成 Fourier 级数

$$v = \sum_{|k| \leqslant p} v_k e^{i(k,x)}, \qquad k = (k_1, \cdots, k_d).$$

定义截段算子如下：

$$T_N v = \sum_{|k| \leqslant N} v_k e^{i(k,x)}.$$

对 $N > 0$，有下面的不等式成立：

(i) $\|T_N v\|_{\tilde{C}^{r+s}} \leqslant cN^{s+d+1}\|v\|_{\tilde{C}^r}$,

(ii) $\|(I - T_N)v\|_{\tilde{C}^r} \leqslant cN^{-s+d+1}\|v\|_{\tilde{C}^{r+s}}$.

B. 作用于具紧支集函数上的卷积算子。设 $\phi(x)$ 是这样一个函数，它的 Fourier 变换 $\hat{\phi}(\xi)$ 是定义在 $\mathbf{R}^d$ 上的 C^∞ 函数，在 $|\xi| < 1$ 外为 0，对 $|\xi| < \frac{1}{2}$ 它等于 1。那么卷积算子

$$T_\xi u = \xi^d \int \phi(\xi(x - y))u(y)dy$$

满足上面的不等式 (a) 和 (b)，其中 $X_\alpha = C_0^\alpha(\Omega)$，$\Omega$ 是 $\mathbf{R}^d$ 中有界开集。事实上，因为微分运算和卷积运算可换，所以 (a) 成立。如果对 $r = 0$ 验证了 (b)，基于同一理由，第二个不等式也

成立．这时，因为

$$u(x)-\int\phi(z)u\left(x-\frac{z}{\xi}\right)dz$$

$$=\int\phi(z)\left\{u(x)-u\left(x-\frac{z}{\xi}\right)\right\}dz,$$

把 $u(x)-u(x-z/\xi)$ 展成 Taylor 级数，就有

$$\left|u(x)-u\left(x-\frac{z}{\xi}\right)-\sum_{|k|<s}a_k(x)z^k\right|\leqslant\frac{z^s}{\xi^s}C\|u\|_{C^s}.$$

3.4D 局部共轭问题的反函数定理

在 3.4A—C 的几节中，我们讨论了在已给首次近似 x_0 附近解方程 $f(x)=0$ 的 Newton 叠代格式

$$x_{n+1}=x_n-[f'(x_n)]^{-1}f(x_n)$$

的推广．在这一节，我们将对和反函数定理有关的叠代格式

$$x_{n+1}=x_n-[f'(x_0)]^{-1}f(x_n)$$

给出一个类似的推广．这个叠代格式的优点在于只需计算 $f'(x)$ 在 x_0 点的逆．在研究第二部分开始处提到的那些映射的共轭问题时需要这种推广．例如，f 和 $f+a$ 是 C^1 映射，它们映

$$S(x_0,r)\subset X$$

到自身，$S(x_0,r)$ 是 Banach 空间中以 x_0 为心，r 为半径的球．此外还设，相比于 f 在 $S(x_0,r)$ 上的值而言，$\|a\|$ 足够小．我们要问：是否存在一个 $S(x_0,r)$ 上的非奇异"坐标变换" u（也就是说，u 是从 $S(x_0,r)$ 到自身的微分同胚），使得对充分小的 $r>0$，

$$u^{-1}(f+a)u=f. \tag{3.4.9}$$

在有限维 Banach 空间中，从现代微积分学的秩定理推出，如果 $f'(x)$ 和 $f'(x)+a'(x)$ 在一个充分小的球 $S(x_0,r')$ 中有相同的秩，那么 f 和 $f+a$ 是上面意义下的共轭．不幸的是，Banach 空间中相应的定理更为困难，可以参看本章末的附注 E．在一定情形下，可用下面的叠代格式给出同胚 u 的一个形式的构造：把

u 写成恒等算子的扰动 $u = I + y$，定义

(3.4.10) $$u_0 = I,\quad u_{N+1} = u_N \circ \{I + y_{N+1}\}.$$

其中 y_{N+1} 由解(在某种“近似”的意义下)

(3.4.11) $$u_{N+1}^{-1} \circ \{f + a\} \circ u_{N+1} = f$$

确定。

更清楚些，对同胚 $u \in C(S(x_0, r), S(x_0, r))$ 定义一个算子 $F(f, u) = u^{-1} f u$，注意下面的“半群”性质成立：

(3.4.12) $$F(f,\ u \circ v) = F(F(f, u), v).$$

于是 (3.4.11) 的左端可以改写成

$$F(f + a,\ u_N \circ (I + y_{N+1})) = F(f_N,\ I + y_{N+1}),$$

其中 $f_N = F(f + a,\ u_N)$。设 $F(f, u)$ 是变元的 C^1 函数，注意到 $F(f, I) = f$ 和 $F_f(f, I) = I$，将 $F(f, u)$ 关于 (f, I) 展开，由 (2.1.31) 得到

$$F(f_N,\ I + y_{N+1}) = f + (f_N - f) + F_u(f, I) y_{N+1} + o(\|f_N - f\| + \|y_{N+1}\|).$$

从而

(3.4.13) $$F_u(f, I) y + (f_N - f) = 0$$

的解是 (3.4.11) 的解的“合理的”近似 y_{N+1}。如果 $F_u(f, I)$ 有逆，那么 y_{N+1} 唯一确定，(3.4.9) 的形式解 u 可以写成

(3.4.14) $$u = \lim_{N \to \infty} u_0 \circ u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_N = \lim_{N \to \infty} (I + y_1) \circ (I + y_2) \circ \cdots \circ (I + y_N).$$

这个形式构造的解是否收敛呢？下面简单讨论一下这个问题。

在常微分方程的变换理论中，有个问题和 (3.4.9) 所提的问题类似。在 $x = 0$ 附近考察如下的 N 个方程的常微分方程组

(3.4.15) $$\frac{dx}{dt} = f(x) + a(x).$$

设退化方程组 $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ 在 $x = 0$ 附近的解已知，其中 $a(x)$ 是 $f(x)$ 的小扰动(对充分小的 $|x|$)，那么，很自然去找 $x = 0$ 附近的

微分同胚(也就是局部坐标变换) $x = U(y)$，它保持原点不动，但把扰动方程组 (3.4.15) 变换成已知的 $dy/dt = f(y)$. 这时，例如，可从已知方程组在 $y = 0$ 附近的周期解求出扰动方程组在 $x = 0$ 附近的周期解. 事实上，在 x 坐标下，$x = 0$ 附近的闭曲线对应着 y 坐标下 $y = 0$ 附近的闭曲线. 如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ 的线性映射，$a(x) = o(|x|)$，上面讨论的问题就和第二部分开始处提到的线性化问题完全相同. 在这种情形，对 $U: S(x_0, r)$ 到自身的微分同胚，令 $F(f, U) = U'^{-1}fU$，我们得到

$$F(f, U_1 \circ U_2) = F(F(f, V_1), V_2),$$

使得对解 (3.4.9) 的那一套形式的作法可以用于解 (3.4.15) 提出的问题. 事实上，如果我们能求得一个 U 满足

$$(3.4.16) \qquad U'^{-1}(f + a)U = f \quad 即 \quad F(f + a, U) = f,$$

(3.4.15)就可以化成 $dy/dt = f(y)$. 现在再考察叠代格式(3.4.11). 为此，把 (3.4.9) 改写为(令 $u = I + y$)

$$(3.4.17) \qquad G(y, a) \equiv (I + y)f - (f + a)(I + y) = 0.$$

求 (3.4.17) 的解 y. 根据隐函数定理 (3.1.10) 的一个推广，可以期望，只要 $\|G(0, a)\|$ 充分小，且 $G_y^{-1}(0, 0)$ 存在，解 y 就存在. 事实上，甚至于当 $[G_y(0, 0)]^{-1}$ 稍微有些奇异性时，通过本质上是对叠代格式 (3.4.11) 收敛性的研究，也可以证明这样一个类似结果是对的.

我们从用 $G(y, a) = 0$ 在 $y = 0$ 附近的解改写叠代格式(3.4.11)开始. 由 (3.4.10)，$u_{N+1} = u_N \circ \{I + y_{N+1}\}$，如又记

$$u_{N+1} = I + x_{N+1}{}^{*)},$$

那么

$$u_{N+1} = I + x_{N+1} = u_N \circ \{I + y_{N+1}\} = (I + x_N) \circ (I + y_{N+1}),$$

从而

$$(3.4.18) \qquad \begin{aligned} x_{N+1} &= (I + x_N)(I + y_{N+1}) - I \\ &= (I + y_1)(I + y_2)\cdots(I + y_{N+1}) - I, \end{aligned}$$

---

*) 此句为译者所加，另外，原书此段符号混乱，在翻译时已作适当更动——译注.

其中 y_{N+1} 是 (3.4.13) 的解。于是，用 G 来表示，(3.4.13) 可以改写成

(3.4.19) $$G_y(0, 0)y_{N+1} + a_{N+1} = 0,$$

其中

$$a_{N+1} = f_N - f = F(f + a, I + x_N) - f$$

$$\text{(因为 } f_N = F(f + a, u_N))$$

$$= ((I + x_N)^{-1})(f + a)(I + x_N) - f$$

$$= [(I + x_{N-1})(I + y_N)]^{-1}(f + a)(I + x_{N-1})(I + y_N) - f$$

$$= ((I + y_N)^{-1})f_{N-1}(I + y_N) - f,$$

这就是

(3.4.19′) $$a_{N+1} = ((I + y_N)^{-1})(f + a_N)(I + y_N) - f.$$

叠代格式 (3.4.19)—(3.4.19′) 的收敛性以及它对物理学和几何学的应用是 Sternberg (1969), Moser (1973b) 的书的课题. 如想作进一步的了解，有兴趣的读者可以参考它们。

注 记

A 非线性椭圆型方程组局部解的存在性

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的某个区域，讨论 Ω 上 k 个未知量、k 个方程的椭圆型方程组

(∗) $$F(x, u, \ldots, D^m u) = 0,$$

其中 F 和 u 是向量值函数，F 是其变元的光滑函数. 此外还假定 $u_0(x)$ 是(∗)的已知光滑解. 那么可用压缩映射原理证明如下的结果：对任意 $x_0 \in \Omega$，在其足够光滑的 ε 邻域 O_{x_0} 内，都存在(∗)的一个光滑解 u，使对一切 $|\alpha| \leqslant m$，有 $\sup|D^\alpha u - D^\alpha u_0| \leqslant C\varepsilon^{m-|\alpha|+\sigma}$，其中 $\sigma \in (0, 1)$ 和 C 是绝对常数. 证明的想法是把所要求的(∗)的解看作某个压缩映射的不动点，该映射把 Hölder 空间 $C^{m,\sigma}(O_{x_0})$ 映到自身. 不失一般性，我们假定 $x_0 = 0$，$u_0(x) \equiv 0$，并在问题中引进一个小参数 $\varepsilon > 0$ 如下：令 $x = \varepsilon y$ 和

$$u(\varepsilon x) = v(y),$$

于是可把(∗)改写成

(∗∗) $$Lv = Lv - \varepsilon^m F(\varepsilon y, v, \ldots, \varepsilon^{-m} D_y^m v),$$

其中 L 是常系数线性椭圆算子，只含最高阶导数，L 是由把(∗)在 $x_0 = 0$ 和 $u_0(x) \equiv 0$ 线性化得到的. 于是 L 有逆，方程(∗∗)可以写成 $v = v - A(\varepsilon, v)$

的形式，当 $\varepsilon\to 0$ 时，其右端的 $C^{m,\alpha}(O_{x_0})$ 范数是 $O(\varepsilon)$. 可看 Nirenberg (1973).

B Riemann 流形的等距嵌入问题

设 $(\mathfrak{m}^k, g)$ 是已给的 Riemann 流形，其度量张量 $g=(g_{ij})$. 我们试图把 $\mathfrak{m}^k$ 作为子流形等距嵌入到某个 Euclid 空间 $\mathbf{R}^N$ 中去，也就是说，由这个嵌入在 $\mathfrak{m}^k$ 上导出的度量是 g. 设 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的 Cartese 坐标，$\mathfrak{m}^k$ 光滑等距嵌入到 $\mathbf{R}^N$ 中. 那么，借助于 $\mathfrak{m}^k$ 中的局部坐标卡 $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，我们要求函数 $z=(z_1, \cdots, z_N)$ 满足非线性微分方程组

$$g_{ij}(x)=\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial z_m}{\partial x_i}\frac{\partial z_m}{\partial x_j}.$$

Nash (1956) 证明了，只要 N ($\mathbf{R}^N$ 的维数)充分大，这个方程组可解. 证明中关键的一步是 (3.4.1) 中的隐函数定理的雏形. 已有几本专著讨论这个题目，我们在这里就不重复它了，建议读者去看 Sternberg (1969) 和 Schwartz (1969) 的专著.

C 中心问题

作为 3.4D 的直接应用，下面考虑这样一个问题：用变量 $u(z)$ 的解析变换证明在 $z=0$ 附近，解析函数

$$f(z)=\lambda z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n=f_1(z)+f_2(z)$$

共轭于线性函数 $f_1(z)=\lambda z$. 于是我们要找一个定义在 $z=0$ 附近的保角映射

$$u(z)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n,$$

它使

(*) $$u(\lambda z)=f(u(z)).$$

如果 λ 不是 1 的根，可以求出一个形式解：令 $b_1=1$，然后在(*)中比较 z 的同次幂的系数，依次决定 b_n. 显然，对 $n>1$,

$$(\lambda^n-\lambda)b_n=g_n(b_1, \cdots, b_{n-1}).$$

如果 $|\lambda|\neq 1$，用 3.3 节中讲的强级数法，可以证明这个级数收敛. 但是对 $|\lambda|=1$，应被排除的 1 的根稠密. 事实上，存在复数 λ 的一个稠密集，在该

集的每点处这个级数发散．于是对 $|\lambda|=1$，形式级数的收敛性是个问题，要求比强级数法更精细的方法．C. L. Siegel (1942) 成功地研究了这个形式级数的收敛性．他对 λ 加上一组(无穷多个)条件，其形式为

$$(**)\qquad |\lambda^q-1|^{-1}\leqslant c_0q^2,\ \text{对}\ q=1,\ 2\cdots.$$

这些条件保证了不用 1 的根来逼近 λ. 我们将用 3.4 D的方法证明 Siegel 的结果．

定理 设 $|\lambda|=1$，λ 满足不等式(**)，那么由变量的一个解析变换，$f(z)=\lambda z+f_2(z)$ 共轭于 $f_1(z)=\lambda z$.

虽然可以用不同的方法证明这个结论，这里只概约地谈谈怎样基于 3.4D 的讨论证明它．对细节有兴趣的读者可以看 Moser (1966) 的文章或 Sternberg (1969) 的专著．考虑映射

$$G(z,a)=(I+z)(\lambda I)-(\lambda I+a)(I+z),$$

其中 $a(z)=f_2(z)$ 定义在一个 Banach 空间链 $\{A_n\}$ 上，在另一个链 $\{B_n\}$ 上取值．A_n 和 B_n 都是解析函数的空间，这些解析函数定义在 $\mathbb{C}^1$ 的原点的不同邻域上．在 $(0,0)$ 点形式地计算 $G(z,0)$ 对 z 的 Fréchet 导数，得到 $G_z(0,0)v=v(\lambda z)-\lambda v(z)$. 作为空间 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 间的映射，如果这些空间选取得当，线性算子 $G_z(0,0)$ 有逆．但是在下面的意义下，$G_z(0,0)$ 的"范数"有三阶的奇性：方程 $v(\lambda z)-\lambda v(z)=g(z)$ 的形式解是

$$v(z)=\sum_{k=2}^{\infty}(\lambda^k-\lambda)g_kz^k,$$

其中 $g(z)=\Sigma g_kz^k$. 如果 $g(z)$ 在 Σ_r (圆盘 $|z|<r$) 上解析，那么由 Cauchy 估计推出，如果令 $\|g\|_{A_r}=\sup\limits_{|z|<r}|g(z)|$，就有

$$|g_k|\leqslant r^{-k}\sup_{\Sigma_r}|g(z)|=r^{-k}\|g\|_{A_r}.$$

于是在 $\Sigma_{r(1-\theta)}$ 上，

$$|v(z)|\leqslant c_0\left(\sum_{k=2}^{\infty}k^2\left|\frac{z}{r(1-\theta)}\right|^k\right)\|g\|_{A_{r(1-\theta)}}$$

$$\leqslant\|g\|c_0\Sigma k^2(1-\theta)^k\leqslant\frac{2c_0}{\theta^3}\|g\|_{A_{r(1-\theta)}}.$$

这个结果表明，如果用(3.4.19)—(3.4.19′)中定义的格式，并把 Banach 空间链取为：这些空间的元素是定义在圆盘上的解析函数，而圆盘族的半径依次

缩小一个数量 k^{-n}（对某个固定的正数 k），那么，在某个以原点为中心的极限域中可以得出收敛性． 事实上这就是上面所引参考文献中所证明的东西．

D 可积的几乎复结构

假定给出几个一阶微分算子

$$P_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_i,$$

它们定义在 $\mathbf{R}^N$ 的原点的某邻域 Ω 中，a_{ij} 是光滑的复值函数．如果 P_1, P_2, …, P_n 以及它们的共轭 $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, …$\bar{P}_n$ 线性无关，就把组 $(P_1, \cdots, P_n)$ 称作 Ω 上的一个几乎复结构，我们要找一个充要条件，该条件保证存在一个新的局部坐标 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{2n}$，使方程 $P_j w = 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$ 等价于 Cauchy-Riemann 方程 $\partial w/\partial \bar{\eta}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$，其中

$$\eta_j = \mu_j + i\mu_{j+n}.$$

这时我们可以把函数 w 确定成是解析的，使得在 Ω 上的解析函数可以被明确定义的意义下，几乎复结构实际上是一个“复结构”．不难找到一个必要条件，只需注意到，如果算子 P_j 是 $\partial/\partial \bar{\eta}_i$ 的线性组合 $(i, j = 1, 2, \cdots n)$，那么因为 $\partial \eta' = (\partial/\partial \eta_1, \cdots, \partial/\partial \eta_n)' = 0$，

(*) 对唯一的一对 j, k，换位子 $[P_j, P_k]$ 是 $P_1, \cdots, P_n$ 的线性组合．

条件 (*) 称作可积性条件． 因为它与坐标系无关，于是和在 Ω 的情形一样，用流形上几乎复结构的术语时也有意义．条件 (*) 对方程组 $P_j w = 0$ 和 Cauchy-Riemann 方程组的共轭性也是充分的，但是要证明这个事实却不容易．

如果试图去找坐标变换 $\{x\} \to \{\mu\}$，这个充分性问题是局部非线性的．为证此，让我们选取一个新坐标 $\{\eta\}$，使 $P_j \eta = 0, (j = 1, \cdots, n)$．可以假定 P_j 能写成 $\bar{\partial}\mu = A(\partial \mu)$，其中 $A = (a_{ij})$ 是一个矩阵，其表值在原点是二阶无穷小量．$\bar{\partial} = (\partial/\bar{\partial} z_1, \cdots, \partial/\partial z_n)$．那么条件 (*) 可以写成

$$(\dagger) \qquad P_j a_{ik} = P_k a_{ij}.$$

因为 P_j 和 P_k 和 A 的表值有关，故 (†) 是 A 的表值的非线性方程．Newlander 和 Nirenberg (1957) 第一个用这种方法证明了 (*) 的充分性．一个解 (†) 的现代的精巧方法是由 Malgrange (1969) 给出的．

E 非线性 Fredholm 算子的秩定理

对于 Banach 空间间的 C^1 映射来说，还不知道高等分析中经典的秩定

理是否成立．但是对非线性 Fredholm 映射有如下结果．

定理： 设 f 是定义在 Banach 空间 X 中某点 x_0 的邻域 U 上，在 Banach 空间 Y 中取值，是指标为 p 的 C^1 Fredholm 算子．如果对任一 $x\in U$，$\dim \operatorname{ker} f'(x)$ 是常数，那么，在 U 的充分小的邻域内，f 和线性投影算子 P 共轭，其中 P 映 $\operatorname{Range} f'(x_0)\oplus \operatorname{Ker} f'(x_0)$ 到 $\operatorname{Range} f'(x_0)$ 上．

关于这个结果的证明，读者可看 Berger 和 Plastock (1977) 的文章．

F 参考文献

3.1 节： 前面已提到，压缩映射原理属于 Banach (1920)，它可以看成 Picard 逐次逼近法的自然推广．在 Dieudonné (1960) 的文章中，有关于无穷维逆和隐函数定理的很好的讨论，但是秩定理仅是对有穷维的情形建立的．在 Krasnoselski 等人的专著 (1972) 中讨论了 Newton 法及其各种经典的变形．结果(3.1.19)属于 Graves (1950)．由于 Peano 定理(3.1.28)在无穷维时不成立(可看 Dieudonné (1960) 的一个简单的反例)，解 Banach 空间中常微分方程初值问题就更加困难．在 Ljusternik 和 Sobolev 的书 (1961) 中可以找到结论 (3.1.36)．Sard 定理在无穷维时的推广属于 Smale (1965)，而 Morse 定理(3.1.47)的相应推广则属于 Pohozaev (1968)．

3.2 节： 最速下降法可以追溯到 Cauchy (1847) 的文章．这里讨论的结果基于 Rosenbloom 的文章 (1956)，(3.2.14) 属于 Browder (1965)．对第六章全局性的结果来说，最速下降法技巧是个关键．

3.3 节： 解局部解析算子方程的强级数法也属于 Cauchy，已经证明，这是一个高度灵活的工具．不过对某些问题来说，这个方法是太一般了，在对有关算子作定性分析时它常常失效．在 Rosenbloom (1961)，Treves (1970)，Nirenberg (1972) 等文章中，可以找到运用这个方法的极好的工作，在那里把 Cauchy-Kowalewski 定理推广到了无穷维，还有一些其它有关的结果．

3.4 节： 我们关于(3.4.1)的讨论基于 Moser (1966) 的文章．应用 Newton 法以增加收敛速度的原则可在 Cartan (1940) 的文章中找到(其中解决了解析矩阵的因子分解问题)，也可参看 Kolomogorov (1954) 的评论文章．在 Nash (1956) 的文章中可以找到把算子光滑化的技巧．在 Moser (1973b) 和 Sternberg (1969) 的专著中详细地讨论了局部共轭问题．关于这个课题，Zehnder 有一篇有意思的文章 (1975)．

G 非线性映射的分解定理

把 Helmholtz, Hodge 以及 Frobenius 的分解定理推广到无穷维，可以得到在共轭等价性下研究非线性映射的一个有用的替换物．在这些定理中，一个非线性算子被看作一个微分一次形式，而梯度映射的概念是用外微分来表述的．在 1977 年的一篇论文中，T. Golding 通过把外微分的共轭算子的概念推广到无穷维，得到了这个方向上某些最新的重要结果，在物理学和遗传学中，这些结果都有着重要的应用．

第四章 参数相依扰动现象

在这一章，我们用前面的局部分析讨论某些临界现象，当在 f 的奇点 (x_0, λ_0) 附近研究映射 $f(x, \lambda)$ 时（f 光滑地依赖于参数 λ）会遇到这些现象. 考虑两种特殊情形：首先是分歧现象，这时假定 $f(x, \lambda)$ 是 C^1 类的 Fredholm 算子，我们在给定零点 (x_0, λ_0) 的附近研究 $f(x, \lambda) = 0$ 零点集 (x, λ) 的结构，其中 λ_0 固定，x_0 是 $f(x, \lambda_0)$ 的奇点；其次是某些奇异扰动现象，这时去找某种定义，使得在该意义下，对充分小的 $\varepsilon > 0$，所给形式上的近似解 $x(\varepsilon)$ 满足一个 C^1 Fredholm 算子方程 $f(x, \varepsilon) = 0$，这时线性映射 $f'(x(0), 0)$ 甚至可以不是 Fredholm 算子. 这两种情形在具体问题中都经常出现. 在分歧的情形，解的非唯一性是首先考虑的问题，常常发现，这种考虑直接导致解方程的相当精细的拓扑技巧. 另一方面，为了解决我们所研究的奇异扰动问题，一般要求对线性映射 $f'(x(\varepsilon), \varepsilon)$ 的范数作出十分精细的解析估计. 在研究形如 $Ax = \lambda Bx$ 的非线性特征值问题时，这两种情形都出现了. 粗糙地说，令 $\lambda \to \infty$ 和置 $\lambda = 1/\varepsilon$，在奇异扰动理论中，自然想证明在 $Bx = 0$ 的每一个解 $x(0)$ 附近，都有解族 $x(\varepsilon)$ 存在. 另一方面，假定线性算子 $A'(0)$ 和 $B'(0)$ 二者都非零，当 $\|x\|$ 充分小时，分歧理论试图把 $Ax = \lambda Bx$ 的解 (x, λ) 和线性特征值问题 $A'(0)x = \lambda B'(0)x$ 的解加以比较.

4.1 分歧理论——一个构造性方法

分歧理论讨论方程 $f(x, \lambda) = 0$ 在解 (x_0, λ_0) 附近解的结构. 把这些解看作参数 λ 的函数，其中 x_0 是映射 $f(x, \lambda_0)$ 的奇点(从而 $f_x(x_0, \lambda_0)$ 没有逆)，这里 $f(x, \lambda)$ 是 C^1 类算子，映 Banach 空间 $X \times Z$ 中 (x_0, λ_0) 的一个邻域到 Banach 空间 Y（通常选取实

数和复数作为参数空间 $Z=\{\lambda\}$). 于是线性算子 $f_x(x_0, \lambda_0)$ 没有逆,不能直接用第三章中的隐函数定理. 事实上, $f(x, \lambda)=0$ 在 (x_0, λ_0) 附近的解的性状是不确定的. 在 1.6 节中提到过, 如果 $X=Y=C^N$, $Z=R^1$, f 是复解析映射,那么可以断定,映射 $f(x, \lambda_0)$ 在 x_0 附近不一对一, 因而 $f(x, \lambda_0)$ 不是局部同胚. 在这一节里,我们将从结构的观点讨论这种"非唯一性"现象. 在 4.2 节再回到上面提到的更有力的定性的方法.

假定方程 $f(x, \lambda)=0$ 有一个已知的解族$(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))$,它包含点 (x_0, λ_0). 分歧理论的一个课题就是断定 $f(x, \lambda)=0$ 在 (x_0, λ_0) 附近有另外的与 $(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))$ 不同的解族 $(x_1(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon))$存在当 $\lambda\to\lambda_0$ 时 $(x_1(\varepsilon), \lambda_1(\varepsilon))\to(x_0, \lambda_0)$ (看图 4.1). 在这种意义下分歧理论类似于线性算子的谱理论. 那里

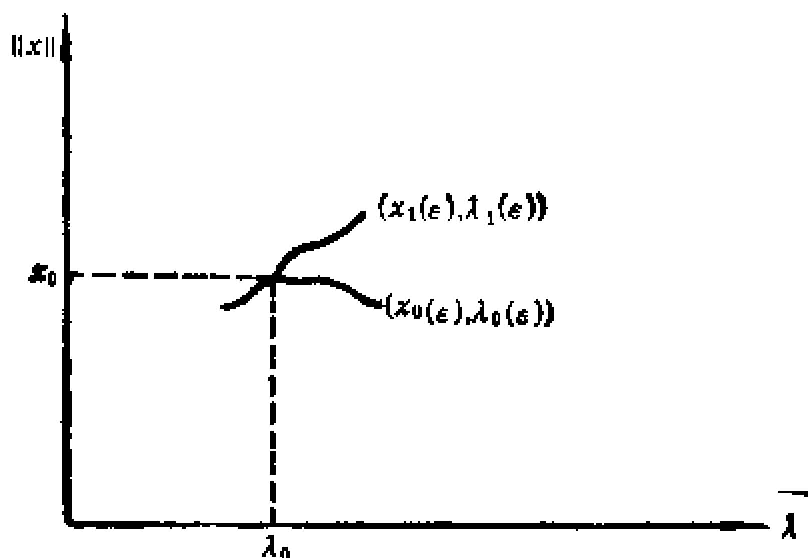


图 4.1 $f(x, \lambda)=0$ 的解在歧点附近通常的性状,解的 $(\|x\|, \lambda)$ 图称作分歧图.

已知的解族 $(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))$ 是零解 $(0, \lambda)$, 而第二个解族是特征元的线性子空间.

4.1A 定义和基本问题

为了更好地理解分歧理论,让我们来考察这门学科的起源. 在一篇 1885 年发表的论文中, H. Poincaré 试图解答如下的问题:

(a) 设有均匀的流体物质(在重力约束下)绕固定轴以等角动量 ω 旋转，试找出它可能的平衡状态。

(b) 确定每种状态的稳定性或不稳定性。

已经知道：(i) 如果 $\omega=0$，唯一可能的状态是球；(ii) 如果 ω 很小，则存在一族旋转椭球 M_ω (Maclaurin 椭球)，它们是稳定的；(iii) 在某个临界值 ω_0，这个椭球族虽然继续存在但成为"不稳定的"，而一个新的平衡状态族 J_ω (有三个不等轴的椭球，也称作 Jacobi 椭球)成为稳定的。Poincaré 还发现，在更高的临界值 ω_1 处，这些椭球(对 M_ω 有小的初始偏离) 又成为不稳定的了。临近 ω_1，又出现非椭球的梨形平衡状态族 P_ω (对 J_ω 又有小的初始偏离)。 Poincaré 希望，由追溯 P_ω 随 ω 的变化继续这个论证，以证明月球是从地球"分裂"出来的(参看图 4.2)。可惜的是(在经历了很多争论之后)，确定了 P_ω 是不稳定的，因而 Poincaré 对月球起源的论证被放弃了。 但是 Poincaré 想法的数学内涵却有完全不同的命运，Poincaré 称椭球 J_ω 在 ω_0 点从 M_ω 分歧出来，梨形在 ω_1 点从 J_ω 分歧出来，族 $\{M_\omega\}$, $\{J_\omega\}$, $\{P_\omega\}$ 称作分歧，(M_{ω_0}, ω_0) 和 (J_{ω_1}, ω_1) 称作歧点。稳定性是由形体 (F_ω) 的位能达到相对极小来确定的，Poincaré 把从 (M_{ω_0}, ω_0) 到 (J_{ω_1}, ω_1) 稳

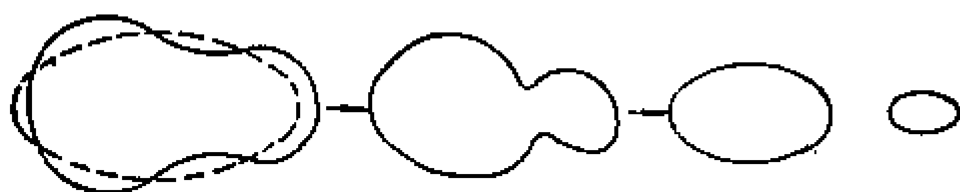


图 4.2 Poincaré 关于由分裂产生月球的想象.

定性发生变化称作稳定性改变。在下一节将看到，怎样把这些术语用于更一般的情形，并在很多具体问题中对它们的产生作出解释。

现在把上面有关算子方程

$$(4.1.1)\qquad f(x, \lambda)=0, \quad (x, \lambda)\in X\times Z$$

的术语精确化。

(4.1.2) 定义 点 (x_0, λ_0) 称作算子方程 $f(x, \lambda)=0$ 的歧点，如果：(i) (x_0, λ_0) 位于通过 (x_0, λ_0) 的解曲线 $(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))$ 上；(ii) (x_0, λ_0) 在 $X \times Z$ 的每一邻域都有 $f(x, \lambda)=0$ 的与 $(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))$ 不同的解。

当 (x_0, λ_0) 是方程 $f(x, \lambda)=0$ 的歧点时，$f(x, \lambda)=0$ 的解常常由通过 (x_0, λ_0) 的不同的连续曲线组成，这些曲线称作解的分枝。

大范围的连续分枝解是指 $f(x, \lambda)=0$ 这样一条连续解曲线 $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$，当 $\varepsilon \to 0$ 时有 $\|x(\varepsilon)\| + \|\lambda(\varepsilon)\| \to \infty$.

$$f(x, \lambda)=0$$

的解 $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ 称作稳定的，如果线性算子 $f_x(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ 所有的谱都有负的实部；$(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ 称作不稳定的，如果 $f_x(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ 有一谱值有正的实部. 由此推出初值问题(与 $f(x, \lambda)$ 在 $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ 的线性化有关)

$$\frac{dy}{dt}=f_x(\tilde{x}, \tilde{\lambda})y, \quad y(0)=y_0$$

具有如下性质：如果稳定，所有的解衰减；如果不稳定，则不衰减. 因为把线性算子 $f_x(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ 的谱作为判别稳定性的依据，所以这个概念一般称作线性稳定性理论(当然，一个更精细的稳定性理论将要用到完全非线性的算子的初值问题).

我们用刚定义的术语叙述分歧理论的基本问题：

(i) 存在性问题 确定 $f(x, \lambda)=0$ 的歧点.

(ii) 结构问题 确定 $f(x, \lambda)=0$ 在每个歧点附近解集的完整结构.

(iii) 连续性问题 确定使分枝解有整体连续性的条件(由于这个问题的非局部性，将在本书的第三部分处理它).

(iv) 稳定性问题 确定方程 $f(x, \lambda)=0$ 在歧点附近稳定的分枝解.

(v) 线性化问题 设 $f_x(x_0, \lambda_0)$ 是 f 在歧点 (x_0, λ) 处的导算子，关于与分歧理论有关的问题，$f_x(x_0, \lambda_0)$ 能给我们提供些

什么信息？

(vi) 非线性影响问题　在上面的问题 (i)—(iv) 中，非线性起些什么作用？

作为一个简单的例子，设 $U(x, \lambda)$ 是定义在 $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^1$ 上的实解析函数，考虑 $\nabla U(x, \lambda) = 0$ 在 (x_0, λ_0) 附近的解，其在 (x_0, λ_0) 处 $\nabla U(x, \lambda) = 0$. 如果 Hesse 行列式

$$|U_{x_i x_j}(x_0, \lambda_0)| \neq 0,$$

由隐函数定理推出存在唯一一条曲线 $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ 通过 (x_0, λ_0). 但是如果 $|U_{x_i x_j}(x_0, \lambda_0)| = 0$，那么 (x_0, λ_0) 可能是歧点，特别，总有第二条曲线 $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ (也许是复值的) 通过 (x_0, λ_0) 满足方程 $\nabla U(x, \lambda) = 0$. 但是因为我们不考虑复值解，所以要确定 (x_0, λ_0) 究竟是不是歧点这个问题还需要进一步的讨论.

一个有关的问题(它常常可以化作这里所述的分歧问题) 是求 C^1 Fredholm 算子方程 $g(x) = 0$ 非平凡解的结构. 所谓非平凡解是相对于过 g 的奇点 $x(0) = x_0$ 的已给解曲线 $x(t)$ 而言，或者说非平凡这个术语是指 $g(x) = 0$ 不同于 $x(t)$ 的解. 为把这个问题和我们的讨论连系起来，令

$$f(y, t) = g(x(t) + y),$$

那么 $f(0, t) = 0$, $f_y(0, 0) = g'(x(0))$ 是线性 Fredholm 算子.

作为一个有趣的例子，考察方程

$$\ddot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0, \tag{4.1.3}$$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = 0(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)$$

在奇点 $\mathbf{x} = 0$ 附近的周期解. 这里 $\mathbf{x}(t)$ 是 t 的 N 向量函数，A 是 $N \times N$ (自共轭)非奇异矩阵，它有 k 个正特征值

$$\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k^2,$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的光滑函数. 一般用线性化过程得到(4.1.3)的周期解的首次逼近. 就是说，我们找(4.1.3)的和线性方程

$$\ddot{\mathbf{x}} + A\mathbf{x} = 0 \tag{4.1.4}$$

的周期解很相近的周期解. 因为这个线性方程有 k 个不同正规模式周期解族 $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \cdots, \mathbf{z}_k$ (参看 1.2B(V))，所以试图去找 (4.1.3) 至少 k 个不同的周期解族. 在点 $\mathbf{x} = 0$ 附近，它们与 $\mathbf{z}_1$,

$\mathbf{z}_2, \cdots, \mathbf{z}_k$ 相差很小．为把这个问题和分歧理论连系起来，很重要的是显式地引进（4.1.3）的尝试周期解的周期（在一般理论中，这个周期起着参数 λ 的作用）．这可由在（4.1.3）中作变量代换 $t=\lambda s$ 得到．于是（4.1.3）变成

(4.1.3′) $$\mathbf{x}_{ss}+\lambda^2[A\mathbf{x}+\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{x}_s/\lambda)]=0.$$

它的周期为 1 的解相应于变元为 t 时周期为 λ 的解．在这方面 Liapunov 有一个重要的经典结果．它说，在 $\mathbf{f}$ 的高阶扰动下周期解 $\mathbf{z}_i$ 仍可保持．这个结果可陈述如下：

Liapunov 准则 设 $\mathbf{f}(\mathbf{x},-\mathbf{y})=-\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$，如果对 $i\neq j$ $(i=1,2,\cdots,k)$，$\lambda_i/\lambda_j\neq$ 整数，那么在 $\mathbf{f}$ 的高阶扰动下，(4.1.3) 第 j 个周期解族仍然保持．如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的实解析函数，那么族 $\mathbf{x}_j(\varepsilon)$ 和它的周期 $\lambda_j(\varepsilon)$ 可以写成

$$\mathbf{x}_j(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\alpha}_{n,j}(t)\varepsilon^n,$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_{1,j}(t)=\mathbf{z}_j(t)$，

$$\lambda_j(\varepsilon)=2\pi/\lambda_j+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varepsilon^n.$$

我们将看到，这个结果是我们讨论的一般结果的推论，而且我们要用线性方程 (4.1.4) 解的多重性来解释 $\lambda_i/\lambda_j\neq$ 整数这个"无理性"条件．在这个结果的经典证明中，在对解析函数 $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 应用强函数法时这个条件是必不可少的．

4.1B 化成有限维问题

(4.1.5) 定理 设 X 和 Y 是实 Banach 空间，$f(x,\lambda)$ 是定义在 (x_0,λ_0) 的邻域 U 上，在 Y 中取值的 C^1 映射，$f(x_0,\lambda_0)=0$，

$$L=-f_x'(x_0,\lambda_0)$$

是线性 Fredholm 算子．那么，$f(x,\lambda)=0$ 在 (x_0,λ_0) 附近的解（λ 固定）一一对应于某个有限维方程组的解．这个有限维方程组有 N_0 个实变量，N_1 个实方程．而且 $N_0=\dim\mathrm{Ker}L$，

$$N_1=\dim\mathrm{coker}L.$$

证明：令 $\lambda-\lambda_0=\delta$，$x-x_0=\rho$，方程 $f(x,\lambda)=0$ 就可以改写成

(4.1.6) $$L\rho=R(\rho,\lambda_0,\lambda),$$

其中 $R(\rho,\lambda_0,\lambda)=f(x,\lambda)-f(x_0,\lambda_0)-f_x(x_0,\lambda_0)\rho$，

于是 $R(\rho,\lambda_0,\lambda)=O(\|\delta\|)+o(\|\rho\|+\|\delta\|)$.

事实上，

$$f(x,\lambda)=[f(x,\lambda)-f(x_0,\lambda)]+[f(x_0,\lambda)-f(x_0,\lambda_0)]$$
$$=f_x(x_0,\lambda_0)\rho+o(\|\rho\|+\|\delta\|)+O(\|\delta\|).$$

现在分解 $\rho=\rho_1+\rho_2$，其中 $\rho_1\in\mathrm{Ker}L$，$\rho_2\in X_1$，$X=\mathrm{Ker}L\oplus X_1$.
回想起 (1.3.38)，L 有左逆 L_0，L_0 的值域为 X_1，核为 $\mathrm{coker}L$. 于是在用 L_0 作用后，(4.1.6) 成为

(4.1.7) $$\rho_2=L_0R(\rho_1+\rho_2,\lambda_0,\lambda).$$

把隐函数定理用于 (4.1.7)，当 $\|\rho_1\|$，$\|\lambda-\lambda_0\|$ 和 $\|\rho_2\|$ 充分小时，得到 (4.1.7) 的唯一解 $\rho_2=g(\rho_1,\lambda)$. 因为

$$Y=\mathrm{Range}L\oplus\mathrm{Coker}L,$$

在 L 的值域上 L_0 一对一，剩下来的只是在 $\mathrm{coker}L$ 上验证 (4.1.6). 于是，如果 P 是 Y 到 $\mathrm{coker}L$ 上的投影，那么 $f(x,\lambda)=0$ 在 (x_0,λ_0) 附近的解一一对应于

(4.1.8) $$PR(\rho_1+g(\rho_1,\lambda),\lambda_0,\lambda)=0$$

的解. 在 $\mathrm{ker}L$ 和 $\mathrm{coker}L$ 中适当选择基，方程 (4.1.8) 就等价于 N_0 个实未知量，N_1 个实方程的方程组.

(4.1.9) **推论** 在上面的假设下，再设对 λ_0 附近的 λ 有 $f(x_0,\lambda)=0$，$f_x(x_0,\lambda)=I-\lambda L$，其中 I 是恒等算子. 如果 $X=\mathrm{Ker}(I-\lambda_0L)\oplus X_1$，$(x,\lambda)$ 是 $f(x,\lambda)=0$ 在 (x_0,λ_0) 附近的一个解，$x-x_0=\rho_1+g$，

$$\rho_1\in\mathrm{Ker}(I-\lambda_0L),\quad g\in X_1,$$

那么 $\|g\|=o(\|\rho_1\|)$.

证明：因为 $f(x,\lambda)=f(x_0,\lambda)+f_x(x_0,\lambda)(x-x_0)+O(\|x-x_0\|^2)$，我们可以假定方程 $f(x,\lambda)=0$ 能改写成（为简单起见，不妨设 $x_0=0$）

$$(I-\lambda L)x+T(x,\lambda)=0,$$

其中 $T(0,\lambda)=T_x(0,\lambda_0)=0$. 于是方程 (4.1.8) 可以写成

(4.1.10) $$h(\rho_1,g)\equiv(I-\lambda L)g-PT(\rho_1+g,\lambda)=0.$$

因为 $g=g(\rho_1)$ 可由隐函数定理确定，从 (3.1.11) 推出

(4.1.11) $$g_{\rho_1}(\rho_1)=-[h_g(\rho_1,g)]^{-1}[h_{\rho_1}(\rho_1,g)].$$

我们证明，当 $\|\rho_1\|\to 0$ 时 $\|g_{\rho_1}(\rho_1)\|=o(1)$，从而由中值定理 (2.1.19) 得 $\|g(\rho_1)\|=o(\|\rho_1\|)$. 事实上，$h_g=(I-\lambda L)-PT_x(\rho_1+g,\lambda)$，因为

$$T_x(0,\lambda_0)=0,$$

故 $h_g(0,0)=I-\lambda_0 L$，它在 X_1 上有逆. 于是由连续性，对充分小的 ρ_1 和 g，$h_g(\rho_1 g)$ 有逆，且 $\|[h_g(\rho_1,g)]^{-1}\|\leqslant 2\|[h_g(0,0)]^{-1}\|$. 又当 $\|\rho_1\|\to 0$ 时，

$$\|h_{\rho_1}(\rho_1,g)\|=\|PT_x(\rho_1+g,\lambda)\|=o(1).$$

这里的收敛对 λ_0 附近的 λ 一致. 于是由 (4.1.11)，当 $\|\rho_1\|\to 0$ 时

$$\|g_{\rho_1}(\rho_1)\|=o(1)$$

对 λ_0 附近的 λ 一致成立.

4.1C 单重的情形

显然，从定理 (4.1.5) 推出，在 (x_0,λ_0) 附近，解 (x,λ) 的总数由有限维方程组 (4.1.8) 完全确定，这个方程组称作 $f(x,\lambda)=0$ 在 (x_0,λ_0) 的分枝方程组. 在应用中最重要的情形是

$$\operatorname{index} f_x(x_0,\lambda_0)=0,$$

此时分枝方程组由 N 个未知数的 N 个方程组成，

$$N=\dim \operatorname{Ker} f_x(x_0,\lambda_0).$$

即使在这种情形，除非 $N=1$，分枝方程也难以给出所述问题真正全面的明确的答案.

为了说明分枝方程的效用，现在就来讨论这种情形.

假定 $f(x,\lambda)$ 是自变量的 C^2 函数，在点 $(0,\lambda_0)$ 的邻域中 $f(0,\lambda)\equiv 0$，$f_x(0,\lambda_0)$ 是零指标的线性 Fredholm 算子，

$$\dim \ker f_x(0,\lambda_0)=1.$$

下面证明：

(4.1.12) **单重时的分歧定理** 假定上面的条件成立，此外还设对 $z\in \operatorname{Ker}L$，$f_{\lambda x}(0,\lambda_0)z\cap \operatorname{Range} f_x(0,\lambda_0)=\{0\}$，那么 $(0,\lambda_0)$ 是方程 $f(x,\lambda)=0$ 的歧点，并且只有一条非平凡解连续曲线从 $(0,\lambda_0)$ 分枝出来.

证明：这时分枝方程 (4.1.8) 的左端可以看作单值实值函数。事实上，设 μ 是非零有界线性泛函，在 $\operatorname{coker} f_x(0, \lambda_0)$ 外为 0。那么分枝方程 (4.1.8) 可以改写成

$$F(\rho, \lambda) \equiv \mu f(\rho + g(\rho, \lambda), \lambda) = 0. \tag{4.1.13}$$

如果需要就平移原点，故还可设 $\lambda_0 = 0$。在定理的条件下，我们证明 $(0, 0)$ 是 $F(\rho, \lambda)$ 的非退化临界点 ($F(\rho, \lambda)$ 是两变元 (ρ, λ) 的 C^2 实值函数)。于是由 Morse 引理 (1.6.11)，经过一个适当的坐标变换 $(\rho, \lambda) \to (\tilde{\rho}, \tilde{\lambda})$，(4.1.13) 在 $(0, 0)$ 附近的解满足方程 $\tilde{\rho}^2 - \tilde{\lambda}^2 = 0$。亦即 (4.1.13) 在 $(0, 0)$ 附近的解 (ρ, λ) 由在 $(0, 0)$ 相交的两条曲线组成。因为这些曲线之一是 $(0, \lambda)$ 轴，所以只有一条非平凡解曲线从 $(0, \lambda_0)$ 分枝出来。

为验证 $(0, 0)$ 是实值函数 $F(\rho, \lambda)$ 的临界点，我们证明 $g_\rho(0, 0)\rho = 0$。事实上，在 (4.1.13) 中对 F 进行微分，由链锁法则得出

$$\mu f_x(0, 0)\{\rho + g_\rho(0, 0)\rho\} = \mu f_x(0, 0) g_\rho(0, 0)\rho = 0.$$

由此推出 $f_x(0, 0) g_\rho(0, 0)\rho \in Y_1$ (Y_1 是 $\operatorname{coker} f_x(0, 0)$ 的余子空间)。现在 $g_\rho(0, 0)\rho \in Y_1$，$f_x(0, 0)$ 是 Y_1 上的同构，于是有如所要求的 $g_\rho(0, 0)\rho = 0$，从而 $F_\rho(0, 0) = 0$。类似可证

$$F_\lambda(0, 0) = 0.$$

所以 $(0, 0)$ 的确是 F 的临界点。

最后验证 $(0, 0)$ 是非退化临界点，其 Morse 指数为 1。用上节的结果，通过简单计算可知，F 在 $(0, 0)$ 点的 Hesse 矩阵 $H_F(0, 0)$ 是一个 2×2 阶矩阵，它的元素恰恰是 $\mu f(\rho, \lambda)$ 在 $(0, 0)$ 的二阶导数(即属于 $g(\rho, \lambda)$ 一项的贡献为 0)。因为在 λ_0 附近 $f(0, \lambda) \equiv 0$，我们得到 $\mu f_{\lambda\lambda}(0, 0) = 0$；因为已经假定对 $\rho \neq 0$，$\rho_{\lambda x}(0, \lambda_0)\rho \in \operatorname{coker} f_x(0, \lambda_0)$ 不为 0，所以同时又有 $\mu f_{x\lambda}(0, 0) = \mu f_{\lambda x}(0, 0) \neq 0$。于是 Hesse 矩阵 $H_F(0, 0)$ 是非奇异矩阵。相应的二次型不确定，所以，正如所希望的，$(0, 0)$ 是一个非退化的临界点，其 Morse 指数为 1。这就证明了定理。

关于单重情形的附注：

为进一步弄清(4.1.12)条件的含义，设方程 $f(x,\lambda)=0$ 可以写成

(4.1.14) $$(I-\lambda L)x+T(x,\lambda)=0,$$

其中 $T(x,\lambda)$ 是 (x,λ) 的 C^2 函数，$T(0,\lambda)=T_x(0,\lambda)\equiv 0$. 那么，因为对 $z\in\mathrm{Ker}(I-\lambda_0 L)$,

$$f_{\lambda x}(0,\lambda_0)z\equiv -Lz=-\lambda_0^{-1}z$$

和

$$f_x(0,\lambda_0)=I-\lambda_0 L,$$

所以从条件 $f_{\lambda x}(0,\lambda_0)z\cap \mathrm{Range} f_x(0,\lambda_0)=\{0\}$ 推出 $I-\lambda_0 L$ 的值域和核仅交于零点，于是 λ_0^{-1} 是 L 的单重特征值.

此外，对于方程 (4.1.14)，结果 (4.1.12) 可以改进为仅要求 $T(x,\lambda)$ 是其变元的 C^1 函数. 而且不难证明，非平凡解曲线可以写成 $(x(\varepsilon),\lambda(\varepsilon))$ 的形式，其中 $x(\varepsilon)=\varepsilon\rho+o(|\varepsilon|)$. 这些结果也是从分枝方程(4.1.8)推出来的. 不过这次不用 Morse 引理去解它们，而改用隐函数定理证明，在 λ_0 附近，当

$$\rho\in\mathrm{Ker}(I-\lambda_0 L)$$

给定时，从分枝方程可唯一确定 λ (将在后面 (4.1.31) 中给出证明).

作为这些结果的应用，我们给出

(4.1.3) 周期解 Liapunov 准则的证明: 要克服的主要困难是为(4.1.3)选取一个适当的空间 X，使得产生的算子方程有单重歧点，为此我们改写(4.1.3) 为 Banach 空间 X_N 的闭子空间中的算子方程. X_N 中元素是定义在 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$上的 C^1 N 向量函数 $x(s)=(x_1(s),\cdots,x_N(s))$，它们满足边界条件

$$\dot{x}(0)=\dot{x}\left(\frac{1}{2}\right)=0,$$

元素 $x\in X_N$ 的范数定义为

(4.1.15) $$\|x\|=\sup_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}|x(s)|+\sup_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}|\dot{x}(s)|.$$

由对 $s\in\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 令 $x(-s)=x(s)$，再将 $x(s)$ 周期地延拓到所有的 s，这个算子方程的解可以延拓成(4.1.3′)的偶的周期解. 因为 X_N 的任一元素

$x(s)$ 都可以唯一表成 $x(s) = x_0(s) + x_m$，其中 x_m 是 $x(s)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的平均值，而 $x_0(s)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的平均值为 0，方程（4.1.3′）可以写成一对方程

(4.1.16) $$0 = \ddot{x}_0 + \lambda^2 \left[A x_0 + f(x_0 + x_m, \lambda^{-1}\dot{x}_0) - \frac{1}{2}\int_0^{1/2} f(x_0 + x_m, \lambda^{-1}\dot{x}_0) ds \right],$$

(4.1.17) $$0 = A x_m + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 + x_m, \lambda^{-1}\dot{x}_0) ds.$$

因 A 有逆，我们可对（4.1.17）用隐函数定理，解出 $x_m = g(x_0, \lambda)$。因为 f 光滑，故 g 也是光滑函数。用 2.2C 节提到的步骤，方程（4.1.16）可以写成积分方程

(4.1.18) $$x_0(s) = \lambda^2 \int_0^{\frac{1}{2}} G(s, s')\{A x_0(s') + N(x_0(s'), \lambda)\} ds',$$

其中 $G(s, s')$ 是 $\ddot{x}_0$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的 Green 函数，满足边界条件

$$\dot{x}_0(0) = \dot{x}_0\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} x_0(s) ds = 0,$$

而

$$N x_0(s) = f(x_0 + g(x_0, \lambda), \dot{x}_0/\lambda) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} f(x_0 + g(x_0, \lambda), \dot{x}_0/\lambda) ds.$$

这个积分方程显然可以写成空间 X_N^0 中的算子方程

(*) $$x_0 = \lambda^2 \{L x_0 + T(x_0, \lambda)\},$$

其中 X_N^0 是 X_N 的闭子空间，其中元素在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的平均值为 0。线性算子 L 定义为

$$L x_0(s) = \int_0^{\frac{1}{2}} G(s, s') A x_0(s) ds',$$

它是紧算子，于是 $I - \lambda^2 L$ 是零指标的 Fredholm 算子。同时因为(4.1.3)的 $f(x, y)$ 充分光滑，所以 $T(x_0, \lambda)$ 是高阶的 C^2 算子(下面将看到，选取空间 X_N^0 是为了克服 L 的谱的多重性的困难)。

有了这些准备，我们可以把（4.1.2）的结果用于方程(*)．为此首先计算线性算子 $I-\lambda^2L$ 在 Banach 空间 X_N^0 中的实谱，亦即求方程 $\ddot{x}+\lambda^2Ax=0$ $\left(\text{边界条件为 } \dot{x}(0)=\dot{x}\left(\frac{1}{2}\right)=0，\text{且} \int_0^{\frac{1}{2}}x(s)ds=0\right)$ 的特征值 λ^2 和相应的特征元 $x(s)$．不失一般性，可以假定 A 是对角矩阵．由简单的计算可知，这些特征值取 $\{\lambda^2|\lambda^2=4\pi^2N^2/\lambda_i^2,\ N=1, 2, \cdots, i=1, 2, \cdots, k\}$ 的形式．我们感兴趣的是在特征值 $4\pi^2/\lambda_i^2(i=1, \cdots, k)$ 附近的性状，以及希望证明(*)有非平凡的分枝解 $(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))\to(0, 2\pi/\lambda_i)$（当 $\varepsilon\to0$）．根据(4.1.12)，如果 $4\pi^2/\lambda_i^2$ 是简单特征值那就行了．此即要求

$$4\pi^2/\lambda_i^2\neq4N^2\pi^2/\lambda_j^2\quad(i\neq j)$$

或 $\lambda_j/\lambda_i\neq N$（$N$ 为任意整数），这个条件正是 Liapunov 准则，它现在可以通过（4.1.12）来证明．不难证明，由 $f(x, y)$ 的实解析性可以推出 $T(x, \lambda)$ 的解析性，从而 $(x_0(\varepsilon), \lambda_0(\varepsilon))$ 的解析性也由（4.1.15）得到保证．

4.1D 一个收敛的叠代格式

现在构造（4.1.14）的非平凡解 $x(\varepsilon, y)$ 和 $\lambda(\varepsilon, y)$ 的一个收敛叠代格式，在（4.1.12）中已经证明了它们的存在性．我们希望在线性方程 $(\beta I-L)x=0$ 的简单特征元 εu_0 和特征值 β_0 的附近，构造方程

$$F(\beta, x, y)=(\beta I-L)x-T(\beta, x, y)=0,\quad \beta=\lambda^{-1} \tag{4.1.19}$$

的近似解．假定 ε 充分小，$\|y\|=O(\varepsilon^2)$，我们有

$$\|x(\varepsilon, y)-\varepsilon u_0\|=O(\varepsilon^2)$$

和 $|\beta(\varepsilon, y)-\beta_0|=O(\varepsilon)$．

为此考虑如下叠代格式 (I_N)：序列 $\{x_N=\varepsilon u_0+v_N, \beta_N\}$．取 $v_0=0$，$\beta=\beta_0$ 作为初始近似，然后依次按如下的办法计算 v_1 和 β_1：

$$(I_1)\qquad (\beta_0I-L)v_1=P^*T(\beta_0, \varepsilon u_0, y),$$
$$(\beta_1I-L)(\varepsilon u_0)=PT(\beta, \varepsilon u_0+v_1, y),$$

其中 P^* 和 P 是投影算子．一般地，给定了 v_N 和 β_N，我们由公式

$$(I_{N+1})\qquad (\beta_NI-L)v_{N+1}=P^*T(\beta_N, x_N, y),$$

$$(\beta_{N+1}I - L)(\varepsilon u_0) = PT(\beta_N, x_{N+1}, y)$$

依次计算 (v_{N+1}, β_{N+1}). 自然要求 $\beta_{N+1}I - L$ 在 $\text{Range}(\beta_0 I - L)$ 上有逆.

我们叙述和证明这个叠代格式存在性和收敛性的一个结果. 请注意，如果此叠代序列收敛到 $\bar{x}(\varepsilon) = \varepsilon u_0 + \bar{v}$ 和 $\bar{\beta}$，那么 $(\bar{x}(\varepsilon), \bar{\beta}(\varepsilon))$ 满足 (4.1.19). 此外，如果能够证明

$$\|x_N - \varepsilon u_0\| \leqslant K\varepsilon^2 \text{ 和 } \|\beta_N - \beta_0\| \leqslant K\varepsilon,$$

其中 K 是与 N 及 ε 无关的实数，那么这个解将和 (4.1.12) 中所讲的解重合. 为此我们需假定:

(*) 线性算子 $\beta_0 I - L$ 是 Fredholm 算子且

$$\dim\text{Ker}(\beta_0 I - L) = 1.$$

(4.1.20) 定理 设算子 $\beta_0 I - L$ 满足上面的条件 (*)，同时，当 $\|x\|$, $\|y\|$, $|\beta - \beta_0|$ 充分小时，算子 $T(\beta, x, y)$ 满足:

(a) $\|T(\beta, x, y) - T(\beta, x', y)\| \leqslant M(\|x\| + \|x'\|)\|x - x'\|$,

(b) $\|T(\beta, x, y) - T(\beta', x, y)\| \leqslant M(\|x\|^2 + \|y\|)|\beta - \beta'|$,

(c) $\|T(\beta_0, 0, y)\| \leqslant M\|y\|$,

其中 M 是仅与 T 有关的常数. 那么，对固定的充分小的 y，对每个 N，叠代序列 I_1—I_{N+1} 都存在且收敛于 $(\bar{x}(\varepsilon, y), \bar{\beta}(\varepsilon, y))$. 此外，$\bar{x}(\varepsilon, y)$ 和 $\bar{\beta}(\varepsilon, y)$ 对 ε 和 y 连续，满足方程 (4.1.19) 且

$$\|\bar{x}(\varepsilon, y) - \varepsilon u_0\| \leqslant O(\varepsilon^2), \quad \|\bar{\beta}(\varepsilon, y) - \beta_0\| = O(\varepsilon). \quad ^{*)}$$

证明: 对固定的 ε 和 y，考虑实值函数 $\alpha(\beta, v)$ 和算子 $\bar{T}(\beta, v)$，它们分别定义为

$$\bar{T}(\beta, v) = (\beta I - L)^{-1}P^*T(\beta, \varepsilon u_0 + v, y), \tag{4.1.21}$$

$$\alpha(\beta, v) = \beta_0 + \varepsilon^{-1}PT(\beta, \varepsilon u_0 + \bar{T}(\beta, v), y), \tag{4.1.22}$$

其中 P 是 $X \to \{u_0\}$ 的投影. 后面我们再确定正数 k 和 ε_0，使得对 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$，映射 $(\bar{T}(\beta, v), \alpha(\beta, v))$ 存在且定义一个从集 $S_{k,\varepsilon}$ 到自身的压缩映射，其中

$$S_{k,\varepsilon} = \{(\beta, v) \mid |\beta - \beta_0| \leqslant k\varepsilon, \|v\| \leqslant k^2\varepsilon\}.$$

$S_{k,\varepsilon}$ 上范数定义为 $\|(\beta, v)\| = |\beta| + \|v\|$. 于是从压缩映射原理推出序列

---

*) 原书此定理的陈述及证明符号较混乱，叙述也有不确之处，译时已酌情修改，因更动之处较多，兹不一一注明——译者注.

$$(\beta_{N+1}, v_{N+1}) = (\alpha(\beta_N, v_N), \bar{T}(\beta_N, v_N))$$

收敛到 $S_{k,\varepsilon}$ 中唯一的不动点，我们把它记作 $(\tilde{\beta}(\varepsilon, y), \bar{v}(\varepsilon, y))$. 显然 $\bar{x} = \varepsilon u_0 + v$ 满足 (4.1.19). 我们还要证明,对 $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, 这个收敛对 ε 一致. 于是,因为 β_N 和 v_N 是 ε 的连续函数,故 $\tilde{\beta}(\varepsilon, y)$ 和 $\bar{x}(\varepsilon, y)$ 是 ε 的连续解.

为证此两点,我们首先指出,对任何固定的 k 和充分小的 ε, 由 $(\beta, v) \in S_{k,\varepsilon}$ 和定理的条件推出 $\|T(\beta, \varepsilon u_0 + v, y)\| \leqslant k_1\varepsilon^2$, 其中 k_1 是和 $\beta, v \in S_{k,\varepsilon}$ 以及 y 无关的常数. 事实上,令 $x = \varepsilon u_0 + v$,

$$\begin{aligned}\|T(\beta, x, y)\| &\leqslant \|T(\beta, x, y) - T(\beta, 0, y)\| \\ &\quad + \|T(\beta, 0, y) - T(\beta_0 0, y)\| + \|T(\beta_0, 0, y)\| \\ &\leqslant M(\|\varepsilon u_0\| + \|v\|)^2 + M\|y\|\,|\beta - \beta_0| + M\|y\| \leqslant k_1\varepsilon^2.\end{aligned}$$

进一步,对于任意两个有逆的线性算子 $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$, 我们有

$$\mathfrak{L}_1^{-1} - \mathfrak{L}_2^{-1} = \mathfrak{L}_2^{-1}(\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1)\mathfrak{L}_1^{-1}.$$

因为 $\mathfrak{L}_1 = \beta_0 I - L$ 在 $(\beta_0 I - L)$ 的值域上有逆,对 $(\beta, v) \in S_{k,\varepsilon}$, 当 ε 充分小时, $\mathfrak{L}_2 = \beta I - L$ 同样有逆. 事实上我们还有

$$\|(\beta I - L)^{-1}\| \leqslant 2\|(\beta_0 I - L)^{-1}\|.$$

现在来确定球 $S_{k,\varepsilon}$ 使 $\vartheta(\beta, v) = (\alpha(\beta, v), \bar{T}(\beta, v))$ 映 $S_{k,\varepsilon} \to S_{k,\varepsilon}$. 把 $\|P\|$, $\|P^*\|$ 分别记作 c_P, c_{P^*}, 那末对充分小的 ε,

$$\begin{aligned}\|\bar{T}(\beta, v)\| &\leqslant \|(\beta I - L)^{-1}\|\|P^*\|\|T(\beta, \varepsilon u_0 + v, y)\| \\ &\leqslant 2\|(\beta_0 I - L)^{-1}\|c_{P^*}k_1\varepsilon^2.\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

$$\begin{aligned}|\alpha(\beta, v) - \beta_0| &\leqslant \varepsilon^{-1}\|P\|\|T(\beta, \varepsilon u_0 + \bar{T}(\beta, v), y)\| \\ &\leqslant \varepsilon^{-1}c_P M(\varepsilon + \|\bar{T}(\beta, v)\|)^2 \\ &\leqslant 2c_P M\varepsilon.\end{aligned} \tag{4.1.24}$$

我们总可以把 ε 取得充分小,以使 $\vartheta(\beta, v)$ 映 $S_{k,\varepsilon}$ 到自身.

最后,为证明 $\vartheta(\beta, v)$ 是 $S_{k,\varepsilon}$ 上的压缩映射, 只需证明对 (β, v) 和 $(\beta', v') \in S_{k,\varepsilon}$,

$$\|\bar{T}(\beta', v') - \bar{T}(\beta, v)\| \leqslant g_1(\varepsilon)\|v - v'\| + g_2(\varepsilon)\|\beta - \beta'\|, \tag{4.1.25}$$

$$\begin{aligned}&\|\alpha(\beta, v) - \alpha(\beta', v')\| \\ &\leqslant g_3(\varepsilon)\|v - v'\| + g_4(\varepsilon)\|\beta - \beta'\|,\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

其中,当 $\varepsilon \to 0$ 时, $g_i(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 为证 (4.1.25),我们指出,根据定理的条件 (a)—(c),

$$\|\bar{T}(\beta, v) - \bar{T}(\beta, v')\| \tag{4.1.27}$$

$$\leqslant \|(\beta I - L)^{-1}\|\|P^*\|\|T(\beta, \varepsilon u_0 + v, \varepsilon^2 y) - T(\beta, \varepsilon u_0 + v', \varepsilon^2 y)\|$$

$$\leqslant 2\|(\beta_0 I - L)^{-1}\|c_{p^*}M(2\varepsilon + \|v\| + \|v'\|)\|v - v'\|.$$

另一方面，因为

$$\|(\beta I - L)^{-1} - (\beta' I - L)^{-1}\| \leqslant 4|\beta - \beta'|\|(\beta_0 I - L)^{-1}\|^2,$$

(4.1.28) $\|\bar{T}(\beta, v') - \bar{T}(\beta', v')\|$

$$\leqslant \|(\beta I - L)^{-1} - (\beta' I - L)^{-1}\|\|P^*\|\|T(\ \ , \varepsilon u_0 + v', y)\|$$

$$+ \|(\beta' I - L)^{-1}\|\|P^*\|\|T(\beta, \varepsilon u_0 + v', y) - T(\beta', \varepsilon u_0 + v', y)\|$$

$$\leqslant 4k_1\|(\beta_0 I - L)^{-1}\|^2 c_{p^*}\varepsilon^2|\beta - \beta'|$$

$$+ 2M\|(\beta_0 I - L)^{-1}\|c_{p^*}k_2\varepsilon^2|\beta - \beta'|.$$

综合上面的 (4.1.27) 和 (4.1.28) 就得到 (4.1.25). 为证 (4.1.26), 我们用 (4.1.22), 因为差的估计和上面完全一样,我们略去了证明的细节. 为证明定理,我们还需证明,当 $|\varepsilon|$ 足够小时,序列

$$(\beta_{N+1}(\varepsilon, y), v_{N+1}(\varepsilon, y)) = (\alpha(\beta_N, v_N), T(\beta_N, v_N))$$

对 $|\varepsilon|$ 一致收敛,从而 $(\bar{\beta}, \bar{v})$ 连续依赖于 ε. 事实上，令

$$(\beta_{N+1}(\varepsilon, y), v_{N+1}(\varepsilon, y)) = \mathscr{G}(\beta_N, v_N),$$

由归纳法可知

$$|||\mathscr{G}(\beta_i, v_i) - \mathscr{G}(\beta_{i-1}, v_{i-1})|||$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |||\mathscr{G}(\beta_0, 0) - (\beta_0, 0)|||$$

$$\leqslant 2k\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\right)^i.$$

因而,对任意的正整数 m, n,

(4.1.29) $|||\mathscr{G}(\beta_m, v_m) - \mathscr{G}(\beta_n, v_n)|||$

$$\leqslant \sum_{i=n}^{m-1} |||\mathscr{G}(\beta_{i+1}, v_{i+1}) - \mathscr{G}(\beta_i, v_i)|||$$

$$\leqslant 2k\varepsilon_0 \sum_{i=n}^{\infty} 2^i.$$

随着 $m, n\to\infty$, 上面的项趋于零，我们断定 $\{\mathscr{G}(\beta_N, v_N)\}$ 是 $\mathbb{R}'\times X$ 上有界连续函数的一致收敛序列，因而对于适当的范数，极限函数 $(\bar{\beta}(\varepsilon, y)$ $\bar{v}(\varepsilon, y))$ 是 ε 的连续函数. 类似可证对 y 的连续性.

4.1E 多重的情形

现在考虑一个更困难的分歧问题，这时

$$\dim \mathrm{Ker} f_x(x_0, \lambda_0) > 1,$$

其中 $f_x(x_0, \lambda_0)$ 是零指标的 Fredholm 算子. 为简单起见，假定 $x_0 = 0$ 和

(4.1.30) $$f(x, \lambda) = (I - \lambda L)x + T(x, \lambda),$$

其中 $$T(0, \lambda) = T_x(0, \lambda) = 0.$$

因为 $f_x(0, \lambda) = I - \lambda L$，所以唯一可能的歧点是 $(0, \lambda_0)$ (λ_0 为实数)，λ_0^{-1} 是 L 的谱. 但是有简单的例子表明，虽然 λ_0^{-1} 是 L 的谱，但 $(0, \lambda_0)$ 并不一定是歧点. 根据 (1.3.38)，从 $I - \lambda_0 L$ 指标为零的假设推出，如果 λ_0^{-1} 是 L 的 $N \geqslant 1$ 重特征值，那么[*]

$$\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) \cap \mathrm{Range}(I - \lambda_0 L) = \{0\},$$

$$\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) \oplus \mathrm{Range}(I - \lambda_0 L) = X.$$

因为 $\dim \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) = N > 1$，对于固定的 λ，分枝方程中方程的个数和它们的实变元的个数相同，因此这些方程可以有实的非零解，而且这些解主要地依赖于高阶项 $T(x, \lambda)$ 的性质. 我们将简单讨论那些无需对 $T(x, \lambda)$ 或对 N 的奇偶性附加任何条件即可证得的结果.

首先指出，如果 (x, λ) 是 $f(x, \lambda) = 0$ 在 $(0, \lambda_0)$ 附近的解，那么 λ 可以由 x 在 $\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L)$ 上的分量唯一确定. 更清楚些，我们证明

(4.1.31) **定理** 设 (x, λ) 是 $f(x, \lambda) = 0$ 的与 $(0, \lambda_0)$ 充分靠近的一个解，如果 $x = u + v$，$u \in \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L)$，

$$v \in \mathrm{Range}(I - \lambda_0 L),$$

那么有唯一的函数 $\lambda = g(u)$ 满足:

i) $f(u + v, g(u)) = 0$;

ii) 在 $u = 0$ 的某去心邻域上，$g(u)$ 是 C^1 函数;

---

[*] 以下二式似应作为假设条件——译者注.

iii) 如果 $f(u+v',\ \lambda')=0$, $f(u+v,\ \lambda)=0$, 那么

$$\lambda=\lambda',\quad v=v'.$$

证明: 根据 (4.1.10), 对 $\beta=\lambda^{-1}$ 和 $u\in \mathrm{Ker}(\beta_0 I-L)$, 分枝方程可以写成

$$(*)\qquad (\beta I-L)u+PT(u+g(u,\beta),\ \beta)=0,$$

这里 $g(u,\ \beta)$ 是 (4.1.7) 中定义的函数, 令 $[u,\ \bar{u}]$ 记 $\mathrm{Ker}(\beta_0 I-L)$ 上任意线性积,那么,取(*)和 u 的内积有

$$(**)\qquad \beta-\beta_0+[u,\ u]^{-1}[PT(u+g(u,\ \beta),\ \beta),\ u]=0.$$

把这个方程的左端记作 $F(u,\ \beta)$, 下面证明, 在 $(0,\ \beta_0)$ 的一个小邻域内 $F_\beta(u,\ \beta)\neq 0$. 于是,根据一维时的隐函数定理, 存在唯一确定的、定义在 $(0,\ \beta_0)$ 附近的函数 $\beta=g(u)$ 满足(**). 事实上,当 $\|u\|+|\beta-\beta_0|\to 0$ 时,

$$F_\beta(u,\ \beta)=1+[u,\ u]^{-1}[PT_x(u+g(u,\ \beta),\ \beta)g_\beta$$
$$+PT_\beta(u+g(u,\beta),\ \beta),\ u]=1+o(1),$$

从而直接得到定理的结论 i) 和 ii). 为证 iii), 我们指出: 根据上面的论证,如果 $(x,\ \lambda)$ 和 $(x_1,\ \lambda_1)$ 在 $(0,\ \lambda_0)$ 附近满足(*), 其中

$$x=u+f(\lambda,\ u),\quad x_1=u+f(\lambda_1,\ u),$$

那么 $(\lambda^{-1},\ u)$ 和 $(\lambda_1^{-1},\ u)$ 满足(**),于是 $\lambda=\lambda_1$, 由(4.1.5) $v=v'$.

对于应用到分析中的具体问题来说, 得出高维时分歧问题的结果是很重要的. 我们关于 (4.1.3) 周期解的 Liapunov 准则的证明指出,如果"Liapunov 无理性条件"不满足, 那么就需要用多重时的分歧结果来研究非线性扰动下正规方式周期解的保持问题. 另一方面,第一章对方程组 (1.2.9) 的讨论表明,在偶数重时,要作出有关歧点存在性的一般结论是困难的. 事实上, 后面要指出, 在回答这样的一般分歧问题时, $f(x,\ \lambda)$ 的高阶部分的**性质**经常起着决定性的作用.

作为分枝方程 (4.1.8) 的第二个应用, 我们考虑这样一个问题,即确定实 Hilbert 空间 H 上算子方程

$$(4.1.32)\qquad x=\lambda(Lx+Nx)$$

在 $(0,\ \lambda_0)$ 点解的下临界和上临界分歧. 这里我们假定, 当 $\|x\|\to 0$ 时 $\|Nx\|=o(\|x\|)$, 且 $Nx=Bx+Rx$, 其中 B 是 x 的

p 阶齐次算子，对 $x \neq 0$，$(Bx, x) \neq 0$. 同时，当 $\|x\| \to 0$ 时 $\|R(x)\| = o(\|x\|^p)$. 如果 $(0, \lambda_0)$ 是 (4.1.32) 的一个歧点，且在 λ_0 的任意小邻域 $\lambda < \lambda_0$ $(\lambda > \lambda_0)$ 内，(4.1.32) 都有非平凡解 (x, λ) 那么族 (x, λ) 被称作解的下临界(上临界)解族(参看图 4.3). 显然，通过研究不依赖于重数的 (4.1.32) 的结构来确定下或上临界分歧是很重要的. 在很多情形，这可由下面的定理做到.

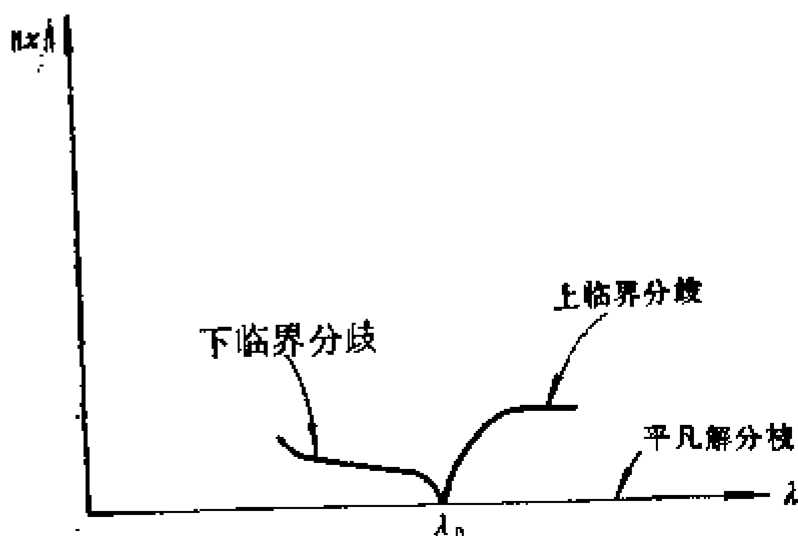


图 4.3 上下临界分歧的分歧图图示.

(4.1.33) **定理** 如果除了上面的条件，还设 $I - \lambda_0 L$ 的值域闭，$\dim\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) < \infty$ 和

$$H = \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) \oplus \mathrm{Range}(I - \lambda_0 L).$$

那么，如果 $(Bx, x) > 0$，(4.1.32) 从 $(0, \lambda_0)$ 分枝出去的任何解族都是下临界解族；如 $(Bx, x) < 0$，则是上临界解族.

证明: 又是从分枝方程 (4.1.8) 和估计式(4.1.9)得到这个结果. 关键之点在于：在所给条件下，并不需要知道分枝方程实际的解的情况. 事实上，用(4.1.5)的记号，分枝方程 (4.1.8) 可以写成

$$(4.1.34) \qquad P[(\lambda - \lambda_0)Lx + \lambda Nx] = 0.$$

因为在所给条件下，$\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) \equiv \mathrm{coker}(I - \lambda_0 L)$，所以 P 是

$$H \to \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L)$$

的投影. 于是，如果 $x = \rho_1 + g$，$\rho_1 \in \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L)$，$g \in \mathrm{Range}(I - \lambda_0 L)$，那么 (4.1.34) 成为

$$[(\lambda_0-\lambda)/\lambda\lambda_0]\rho_1 = P[B(\rho_1+g)+R(\rho_1+g)].$$

和 ρ_1 作内积，再用 (4.1.9)，可得

$$((\lambda_0-\lambda)/\lambda_0\lambda)\|\rho_1\|^2 = (B\rho_1, \rho_1)\{1+O\|\rho_1\|\}.$$

令 $\rho_1 = |\varepsilon|\rho$，其中 $\|\rho\| = 1$，设 $(B\rho, \rho) > 0$，对所有的

$$\rho \in \mathrm{Ker}(I-\lambda_0 L),$$

且 $\|\rho\| = 1$ 取下确界，于是 $\inf(B\rho, \rho)$ 大于某个 $\alpha > 0$，我们有

$$(\lambda_0-\lambda)/\lambda\lambda_0 \geqslant |\varepsilon|^{p-1}\alpha\{1+O(|\varepsilon|)\}.$$

从而在下临界分歧时，对 λ_0 附近的 λ，由最后一个方程直接推出所要的结果。如果 $(B\rho, \rho) < 0$，通过类似的论证可得到关于上临界分歧的结论。

4.2 分歧理论中的超越方法

4.2A 一些启发

一个有趣的事实是：在以前没有解决的分歧问题中，已经由拓扑学、复分析和临界点理论得到了一些意义重大的结果。对4.1E 节提到的困难的"退化"情形(即多重的情形)特别是如此。这节我们将对方程

$$(4.2.1)\qquad f(x, \lambda) \equiv (I-\lambda L)x + T(x, \lambda) = 0$$

考察这个课题，其中算子 $I-\lambda L$ 和 $T(x, \lambda)$ 满足 4.1 节的条件，即 $I-\lambda L$ 是零指标的 Fredholm 算子，

$$T(0, \lambda) = T_x(0, \lambda) \equiv 0,$$

于是 $T(x, \lambda)$ 是 x 高阶项。

粗略地说，这些超越方法成功之处在于：或是对方程 (4.2.1) 中高阶项 $T(x, \lambda)$ 作出了定性分析，或是对导算子 $f'(0, \lambda_0)$ 在 $f(x, \lambda)$ 的临界点 $(0, \lambda_0)$ 重数的奇偶进行了考察。一个想法是，对给定的算子 $f(x, \lambda)$ 找出一个适当的数值的或代数的"不变量" I_f，这个不变量 I_f 具有如下性质：

(1) I_f 是算子 $f(x, \lambda)$ 零点的量度；

(2) 当 $f(x, \lambda)$ 在"小的"适当限制的扰动下，I_f 稳定；

(3) I_f 可由线性化逼近，即借助于 f 的 Fréchet 导算子 f_x 逼近。

现在来考察这种不变量的一些例子以及它们在分歧理论中的

作用。我们用 4.1 节的结果把分歧问题化到有限维来考虑：于是（除 4.2C 节外）我们只需对有限维空间上的映射 f 讨论这些（拓扑)不变量 I_f，而把那些由无穷维论证得到的结果放到第三部分。

更清楚些，化成有限维问题是基于按 4.1 节中所讲的直和分解 $X = \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) \oplus \mathrm{Range}(I - \lambda_0 L)$ 来分解（4.2.1)。如果用 P 记 X 到 $\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L)$ 上的标准投影，$g(u, \lambda)$ 记由（4.1.8)定义的函数，它映 $\mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L) \times \mathbb{R}^1$ 入 $\mathrm{Range}(I - \lambda_0 L)$。那么，如在（4.1.5）中提到的，方程 $f(x, \lambda) = 0$ 在点（0, λ_0）（$f_x(0, \lambda_0)$ 没有逆)附近的解一一对应于方程

$$
(4.2.2) \qquad (I - \lambda L)u + PT(u + g(u, \lambda), \lambda) = 0, \quad u \in \mathrm{Ker}(I - \lambda_0 L)
$$

的解。

4.2B 分歧理论中的 Brouwer 度

设 f 是连续可微映射，定义域为有界区域 $D \subset \mathbb{R}^N$，值域

$$f(D) \subset \mathbb{R}^N.$$

在 1.6C 节中所定义的 f 的度 $d(f, P, D)$ 就是我们所希望的不变量。回忆一下，度是一个整数（正数，负数或零)，当在 ∂D 上 $f(x) \neq p$ 时它是 $f(x) = p$ 在 D 中解的个数“代数和”的量度。

我们指出，度 $d(f, p, D)$ 满足 4.2A 中的性质 (1)—(3)，于是确实可以作为整数不变量 I_f。首先，根据 1.6A 中的定义，$d(f, p, D)$ 是 $f(x) = p$ 在 D 中解的个数的一个量度，它由把

$$f(x) = p$$

的“非退化的”解加上“+”或“−”号进行计算而得，取正号或负号取决于在那个解处 f 保持或是改变其定向。如果在 $f(x) = p$（在 D 中）的每个解处 Jacobi 行列式不为 0，则 $f(x) = p$ 在 D 中所有的解都是非退化的。其次，$d(f, p, D)$ 是同伦不变量，因而在下面意义的小扰动下是稳定的。即如果 $f(x, t)$ 是 $\bar{D} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ 的连续映射，在 ∂D 上 $f(x) \neq p$，那么 $d(f(x, t), p, D)$ 有定义并且与 $t \in [0, 1]$ 无关。最后，在非退化的情形.

$$d(f, p, D) = \sum_{f(x)=p} \text{sgn } \det|J_f(x)|.$$

于是由 f 的导数决定 $f(x) = p$ 在D内解的个数的"代数和"。

我们用 $d(f, p, D)$ 是不变量这个事实证明。

(4.2.3) **定理** 设 (4.2.1) 中定义的算子 $f(x, \lambda)$ 满足如下条件:

(i) $(I - \lambda_0 L)$ 是零指标的 Fredholm 算子;

(ii) $\dim \text{Ker } (I - \lambda_0 L)$ 是奇数;

(iii) $\text{Ker}(I - \lambda_0 L) \cap \text{Range}(I - \lambda_0 L) = \{0\}$;

(iv) $T(x, \lambda)$ 是 C^1 映射, $T(0, \lambda) \equiv T_x(0, \lambda) \equiv 0$, 那么 $(0, \lambda_0)$ 是方程 $f(x, \lambda) = 0$ 的歧点。

证明: 用反证法。假定 $(0, \lambda_0)$ 不是 (4.2.1) 的歧点,于是 $(0, \lambda_0)$ 不是方程 (4.2.2) 的歧点。令

$$h(u, \lambda) = (I - \lambda L)u + PT(u + g(u, \lambda), \lambda)$$

和 $N = \dim\text{Ker } (I - \lambda_0 L)$。 设$D$是 $(0, \lambda_0)$ 的某个小球形邻域,在 ∂D 上 $h(u, \lambda) \neq 0$, 从而 $d(h(u, \lambda), 0, D)$ 有定义。根据度函数的同伦不变性, $d(h(u, \lambda), 0, D)$ 必然是和 λ 无关的常数。另一方面,对于 λ_0 的充分小的去心邻域中的 λ, 因为在 ∂D 上 $\|h(u,\lambda) - (I - \lambda L)u\|$ 很小,所以

$$d(h(u, \lambda), 0, D) = d(I - \lambda L, 0, D).$$

由在 $\text{Ker}(I - \lambda_0 L)$ 上对 $\det(I - \lambda L)$ 的简单计算可知, 当 $\lambda < \lambda_0$ 时,

$$d(I - \lambda L, 0, D) = \text{sgn} \prod_{i=1}^{N} (I - \lambda \lambda_0^{-1}) > 0.$$

同时对 $\lambda > \lambda_0$, 因为 $\dim\text{Ker}(I - \lambda_0 L) = N$ 是奇数,所以

$$d(I - \lambda L, 0, D) = \text{sgn} \prod_{i=1}^{N} (I - \lambda \lambda_0^{-1}) < 0,$$

因而在 λ_0 的任意小邻域内, $d(h(u, \lambda), 0, D)$ 不是常数。于是对给定 $\varepsilon > 0$, 对一切充分小的 $\rho > 0$,

$$h[u, t(\lambda_0 - \varepsilon) + (1 - t)(\lambda_0 + \varepsilon)] = 0$$

在 $\{\|u\|=\rho\}$ 上应该有解，我们得出矛盾。

用 L 的特征值的重数*)代替 $\dim \operatorname{Ker}(I-\lambda_0 L)$，我们可以证明一个稍许更一般的结果．它可以叙述如下：

(4.2.3′) 如果把定理 (4.2.3) 中的条件 (ii) 换成 λ_0 对于 L 的重数是奇数，那么定理仍然成立．

证明：和 (4.2.3) 的证明一样，把定义在 X 上的方程 $f(x,\lambda)=0$ 分解成两个方程，但是这时我们所用的分解是

$$X=\bigcup_i \operatorname{Ker}(I-\lambda_0 L)^i \oplus X_1.$$

根据假设，

$$\dim \bigcup_i \operatorname{Ker}(I-\lambda_0 L)^i$$

(λ_0 的重数)是奇数．同时，当局限于 X_1 上时 $I-\lambda_0 L$ 可逆．于是类似于 (4.2.3) 的证明(用 Brouwer 度)，就可以得到所要的结果．

如果对高阶项 $T(x,\lambda)$ 加以定性的限制，可对刚才得到的结果作出相当大的改进．事实上，如对 λ_0 附近的每个 λ，$T(x,\lambda)$ 是 U 上的复解析映射(在 2.3 节的意义下)，其中 U 是 $(0,\lambda_0)$ 在 X 中的某个邻域，这时可以证明如下的定理：

(4.2.4) **定理** 设对 λ_0 附近固定的实 λ，(4.2.1) 中所定义的算子 $f(x,\lambda)$ 复解析，此外还设

(i) $I-\lambda_0 L$ 是零指标的 Fredholm 算子，

(ii) $\dim \operatorname{Ker}(I-\lambda_0 L)>0$，同时

$$\operatorname{Ker}(I-\lambda_0 L)\cap \operatorname{Range}(I-\lambda_0 L)=\{0\}.$$

那么 $(0,\lambda_0)$ 是方程 $f(x,\lambda)=0$ 的歧点．事实上，存在一条解析曲线

$$x(\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varepsilon^n,\quad \lambda(\varepsilon)=\lambda_0+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varepsilon^n,$$

它是 $f(x,\lambda)=0$ 从 $(0,\lambda_0)$ 分枝出来的非平凡解。

---

*) 指代数重数——译者注。

证明： 沿袭 (4.2.3) 的证明，设 $(0, \lambda_0)$ 不是方程

$$f(x, \lambda) = 0$$

的歧点，那么 $(0, \lambda_0)$ 不是方程 $h(u, \lambda) = 0$ 的歧点。现在 $\operatorname{Ker}(I - \lambda_0 L)$ 是偶数维。在映射

$$h(u, \lambda) = (I - \lambda_0 L)u + PT(u + g(u, \lambda), \lambda)$$

中，因为 $T(x, \lambda)$ 和 $g(u, \lambda)$ 两者都复解析(其中 $g(u, \lambda)$ 是由隐函数定理确定的，可由 (3.3.2) 推出它的复解析性)，所以当 λ 固定时，$h(u, \lambda)$ 对 u 复解析。根据度的同伦不变性 (1.6.3) 对于 $[0, \lambda_0]$ 的小的去心邻域中的 λ，和 $\operatorname{Ker}(I - \lambda_0 L)$ 中原点的球形邻域 U，又有

$$d(h(u, \lambda), 0, U) = d(I - \lambda L, 0, U) = 1.$$

另一方面，在 $\lambda = \lambda_0$，因已假设 $h(u, \lambda) = 0$ 在 U 的边界上没有解，所以 $d(h(u, \lambda), 0, U)$ 有定义。但是在 $\lambda = \lambda_0$，$h(0, \lambda_0)$ 的 Jacobi 行列式 $\det(I - \lambda_0 L)$ 为零。根据 (1.6.3) 中关于复解析映射的基本结果推出，$h(u, \lambda_0)$ 在 U 中不一对一，因而

$$d(h(u, \lambda_0), 0, U) \geqslant 2.$$

从而在通过 $\lambda = \lambda_0$ 时函数 $d(h(u, \lambda), 0, U)$ 不连续。作为度的同伦不变性推论，由此推出，对 λ_0 的某个小区间中的 λ，$h(u, \lambda) = 0$ 在 U 的边界上有解，这又导出矛盾。

为证存在一条从 $(0, \lambda_0)$ 分枝出来的解析曲线，我们注意到，因为 $(0, \lambda_0)$ 是方程 $h(u, \lambda) = 0$ 的歧点，所以点 $(0, \lambda_0)$ 不是簇 $V = \{(u, \lambda) | h(u, \lambda) = 0\}$ 的孤立点。因为 $h(u, \lambda)$ 对 u 和 λ 复解析，V 可以看作 $(0, \lambda_0)$ 附近的一个解析集，故 V 应该包含一条解析曲线(参看 3.3.9)

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^n, \quad \lambda(\varepsilon) = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varepsilon^n.$$

于是 $x(\varepsilon) = u(\varepsilon) + g(u(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ 也可以写成

$$x(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varepsilon^n.$$

这就证明了定理。

4.2C 临界点理论初步

设 $f(x)=\mathrm{grad}F(x)$ 是定义在 Hilbert 空间H中球$\|x\|\leqslant R$上的梯度算子. 3.2 节告诉我们, $F(x)$ 限制在球面$\|x\|=R$上的临界点 $\bar{x}$ 满足方程 $\lambda_1 x+\lambda_2 f(x)=0$, 其中 λ_1 和 $\lambda_2\neq 0$ 是实数. 实数 $c=F(\bar{x})$ 是相应的临界值. 有趣的是,在一些重要情形,某些临界值正是 4.2A 中提到的那类数值不变量.

这种临界值不变量最简单的例子是 C^2 弱序列连续泛函 $F(x)$ 在小球面 $\partial\Sigma_\varepsilon=\{x\mid \|x\|=\varepsilon\}$ 上的上确界,其中 $F(x)$ 在原点附近可表成

$$F(x)=\frac{1}{2}(Ax,x)+o(\|x\|^2).$$

线性算子A紧,自共轭. 假定λ_1是A的最大正特征值. 现在来说明 $F(x)$ 在 $\partial\Sigma_\varepsilon$ 上的上确界具有不变量的性质 (1)—(3) (请看 4.2A). 首先,如果在某点 $\bar{x}\in\partial\Sigma_\varepsilon$ 达到 $\alpha=\sup\limits_{\partial\Sigma_\varepsilon}F(x)$, 则 $\bar{x}$ 将是方程 $g(x,\mu)=\mu x-\mathrm{grad}F(x)$ 对某个实数μ的非平凡解, μ应位于λ_1的一个小邻域内. 这就意味着这个临界值是方程

$$g(x,\lambda)=0$$

的解的一个度量. 为说明在适当限制的小扰动下α稳定, 我们注意到,如果用一个高阶项 $G(x)=o(\|x\|^2)$ (在零附近)扰动$F(x)$, 那么

$$\left|\sup_{\partial\Sigma_\varepsilon}[F(x)+G(x)]-\alpha\right|=o(\|x\|^2).$$

同样,α可由线性化方法近似计算. 由λ_1的变分特性(见(1.3.40)), $\varepsilon^2\lambda_1=\sup\limits_{\partial\Sigma_\varepsilon}(Ax,x)$, 故

$$(4.2.5)\quad \left|\alpha-\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_1\right|$$

$$=\left|\sup_{\partial\Sigma_\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}(Ax,x)+o(\|x\|^2)-\frac{1}{2}\varepsilon^2\lambda_1\right|\right.$$

$$=o(\varepsilon^2),$$

现在指出这个简单的不变量在分歧理论中的重要性。

设算子方程 (4.2.1) 定义在 Hilbert 空间H原点的某邻域上，可以写成

(4.2.6) $$f(x, \lambda) = x - \lambda\{Lx + T(x)\} = 0,$$

其中 L 是紧自共轭算子，$T(x) = \operatorname{grad}\mathscr{T}(x)$ 是一个高阶全连续算子，$T(x) = o(\|x\|)$. 我们证明

(4.2.7) **定理** 设 λ_1 是 L 最大的严格正特征值，那么在上面的假设下，$(0, 1/\lambda_1)$ 是 (4.2.6) 的一个歧点。

证明: 我们证明每个充分小的球形邻域 $U_\varepsilon = \{x \mid \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ 都包含有 (4.2.6) 的非平凡解

$$(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)), \ \|x(\varepsilon)\| = \varepsilon, \ |\lambda(\varepsilon) - 1/\lambda_1| = o(1).$$

为此，利用上面刚介绍的

$$\alpha_\varepsilon = \sup\left\{\frac{1}{2}(Lx, x) + \mathscr{T}(x)\right\},$$

其中上确界是在 $\partial\Sigma_\varepsilon = \{x \mid \|x\| = \varepsilon\}$ 上取的. 暂且假定 α_ε 由 $\partial\Sigma_\varepsilon$ 上的某个元素 x_ε 达到. 下面证明，对 x_ε 所满足的方程，即 $\mu_\varepsilon x = Lx + T(x)\left(\text{其中 } \mu_\varepsilon = \dfrac{1}{\lambda(\varepsilon)}\right)$ 有 $|\mu_\varepsilon - \lambda_1| = o(1)$. 一旦得出这个估计，立即可得

$$|\lambda(\varepsilon) - 1/\lambda_1| = |1/\mu_\varepsilon - 1/\lambda_1| = o(1), \text{ 当 } \varepsilon \to 0.$$

这就是我们要证的. 为此，作 (4.2.6) 与 x_ε 的内积，用 (2.1.21)，得出

$$\begin{aligned}
\mu_\varepsilon &= \|x_\varepsilon\|^{-2}\{(Lx_\varepsilon, x_\varepsilon) + (Tx_\varepsilon, x_\varepsilon)\} \\
&= 2\varepsilon^{-2}\left\{\left(\frac{1}{2}Lx_\varepsilon, x_\varepsilon\right) + \mathscr{T}(x_\varepsilon)\right\} \\
&\quad + \varepsilon^{-2}\{(Tx_\varepsilon, x_\varepsilon) - 2\mathscr{T}(x_\varepsilon)\} \\
&\leqslant 2\varepsilon^{-2}\alpha_\varepsilon + \varepsilon^{-2}\|x_\varepsilon\|\{\|Tx_\varepsilon\| + 2\sup_{s \in [0,1]}\|T(sx_\varepsilon)\|\}.
\end{aligned}$$

于是由上面的 (4.2.5)，

$$|\mu_\varepsilon - \lambda_1| \leqslant 2\varepsilon^{-2}\left\{\alpha_\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda_1\varepsilon^2\right\} + \varepsilon^{-1}o(\varepsilon)$$

$$= o(1).$$

剩下的只是证明在 $\partial\Sigma_\varepsilon$ 上达到 α_ε。我们这样来证明这件事。显然 $\alpha_\varepsilon < \infty$，于是，如果 $\{x_n\}$ 是 $\partial\Sigma_\varepsilon$ 上的元素列，使

$$F(x_n) = \frac{1}{2}(Lx_n, x_n) + \mathscr{T}(x_n) \to \alpha_\varepsilon,$$

那么 $\{x_n\}$ 有弱收敛子序列，记其弱极限为 $\bar{x}$。因为 $F(x)$ 对弱收敛连续，所以 $F(\bar{x}) = \alpha_\varepsilon$。现在 $\bar{x} \in \partial\Sigma_\varepsilon$，否则 $\|\bar{x}\| < \varepsilon$，且有某个 $t > 1$，使 $t\bar{x} \in \partial\Sigma_\varepsilon$。而由简单的计算可知 $F(t\bar{x}) > F(\bar{x})$，这和 $F(\bar{x})$ 的极大性相矛盾。定理证毕。

我们将在第六章指出，由各种极大极小原则计算的临界值都是满足 4.2A 中 (1)—(3) 的数值不变量。这些更精细的不变量也在分歧理论中起着重要作用。在 6.7A 一节还要指出，这些临界值是紧自共轭算子 L 正特征值如下特征的推广：如果把这些特征值按递增次序排列起来并且计及重数，那么

$$\lambda_n = \sup_{[\Sigma]_N} \min_{\Sigma}(Lx, x),$$

其中 $\Sigma = \{x \mid \|x\| = 1,\ x \in \mathfrak{A}_N,\ \mathfrak{A}_N$ 是H的一个N维子空间$\}$，$[\Sigma]_N$ 是H中所有这种球面的类。这些推广要求用更大的"拓扑的"类似集合族来代替Σ和 $[\Sigma]_N$。

为了说明定理 (4.2.7) 的重要性，我们考虑 4.1A 节中关于正规方式保持的 Liapunov 准则的如下推广，即对形如

(4.2.8) $\qquad \ddot{x} + Ax + \nabla f(x) = 0,\ f(x) = o(\|x\|)$

的 Hamilton 系统，毋需奇点附近的无理性条件。

(4.2.9) **定理** 设$N \times N$阶矩阵A是非奇异自共轭矩阵，有正的特征值 $0 < \lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k^2$ $(k \leqslant N)$。还设 $f(x) = \nabla F(x)$，$F(x)$ 是光滑函数。那么 (4.2.8) 有(非平凡的)周期解族 $x(t)$，其最小的周期 $\tau_\varepsilon(t)$ 趋于 $(0,\ 2\pi/\lambda_k)$。如果 $F(x)$ 实解析，这个解族实解析地依赖于 ε，并可以取作

$$x_\varepsilon(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\varepsilon^n, \quad \tau_\varepsilon(t) = \frac{2\pi}{\lambda_k} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\varepsilon^n,$$

其中 $\alpha_t(t)$ 的周期为 $2\pi/\lambda_k$，并且满足 $\ddot{x}+Ax=0$（即在 Hamilton 扰动下，最小周期的正规方式保持不变）。

证明的思路：这个证明与（4.1.15）中用于证明 Liapunov 准则的方法类似. 不同的是我们把（4.2.8）变形为适当的 Hilbert 空间中的算子方程，使其中的算子是梯度映射，因而可用（4.2.7）.

证明：作为第一步，改写（4.2.8）为 Hilbert 空间 H 中的算子方程，H 是 N 向量函数 $x(s)=(x_1(s),\cdots,x_N(s))$ 构成的空间，对 $i=1,\cdots,N$ $x_i(s)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上绝对连续，$\dot{x}_i(s)\in L_2\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 那么，这样一个方程的解可以延拓为（4.2.8）的偶周期解. 事实上，我们构造的解将自动满足条件

$$\dot{x}(0)=\dot{x}\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

为导出算子方程，遵循 2.2D 节的共轭方法，由下面的公式隐式地定义算子 $L(x)$，$A(x)$ 和 $T(x)$.

(4.2.10)
$$(Lx,y)=\int_0^{\frac{1}{2}}\dot{x}(s)\dot{y}(s)ds,$$
$$(Ax,y)=\int_0^{\frac{1}{2}}Ax(s)y(s)ds,$$
$$(T(x),y)=\int_0^{\frac{1}{2}}f(x(s))y(s)ds.$$

于是（4.2.8）的偶的、周期为 1 的广义解和算子方程

(4.2.11)
$$Lx=\lambda^2[Ax+T(x)]$$

在 H 中的解一一对应. 显然，线性算子 L 和 A 有界，自共轭，同时 A 和 T 是紧算子，且当 $\|x\|\to 0$ 时 $\|T(x)\|=o(\|x\|)$. H 中的元素 $x(s)$ 可以唯一写成 $x(s)=x_m+x_0(s)$，其中 x_m 是 $x(s)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上的平均值，$x_0(s)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上的平均值为 0. 这个分解对应于一个正交分解 $H=\mathbb{R}^N+H_0$. 因为 H_0 的一个内积可以取作

$$(x_0,y_0)_{H_0}=\int_0^{\frac{1}{2}}\dot{x}(s)\dot{y}_0(s)ds,$$

方程（4.2.8）可以分解为一对方程

(4.2.12)
$$x_0=\lambda^2[Ax_0+PT(x_0+x_m)],$$

(4.2.13)
$$0=Ax_m+(I-P)T(x_0+x_m),$$

其中 P 是 $H\to H_0$ 的投影. 因为 A 有逆,把隐函数定理用于(4.2.13)就得出唯一的可微函数 $x_m = g(x_0)$, 注意这里 g 与 λ 无关. 代入(4.2.12), 这个方程就变成

(4.2.14) $$x_0 = \lambda^2[Ax_0 + PT(x_0 + g(x_0))].$$

一旦验证了 A 是 H_0 中紧自共轭算子, 同时 $PT(x_0 + g(x_0))$ 是高阶项的梯度算子,就可把定理(4.2.7)用到这个算子方程. 而这两个事实都可以从定义以及 2.5 节与梯度算子有关的事实直接推出. 事实上, 由 (2.5.5), 如果

$$\mathcal{F}(x_0) = \int_0^{\frac{1}{2}} F(x_0(s) + g(x_0(s)))ds,$$

那么在 H_0 中, $\mathcal{F}(x_0) = PT(x_0 + g(x_0))$. 于是,用 1.3 节关于算子 $I - \lambda^2 L$ 的谱的计算,我们发现, 不论在特征值 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_k^2$ 间无理性条件是否满足,集合

$$\{\lambda^2 | \lambda^2 = 4\pi^2N^2/\lambda_i^2, (N = 1, 2, \cdots; i = 1, 2, \cdots, k)\}$$

的最小正数 λ_{min} 总给出方程 (4.1.4) 的一个歧点 $(0, \lambda_{min})$. 因为

$$\lambda_{min} = 2\pi/\lambda_k,$$

我们求得 (4.2.11) 的周期解族 $x_\varepsilon(s)$, $\|x_\varepsilon(s)\|_{H_0}^2 = \varepsilon$, 使得当 $\varepsilon \to 0$ 时, $\lambda(\varepsilon)\to 2\pi/\lambda_k$. 用 t 来表示,我们就得到周期为 τ_ε 的周期族 $x_\varepsilon(t)$, 当 $\varepsilon \to 0$ 时 $(x_\varepsilon(t), \tau_\varepsilon)\to(0, 2\pi/\lambda_k)$. 于是,如果 $F(x)$ 实解析,那么算子 $T(x)$ 也将实解析. 由 (1.6.2) 在实情形的类似结果,方程 (4.2.8) 也将有一条解析的解曲线 $x_\varepsilon(t)$, 其周期为 τ_ε, 同时具有定理中所叙述的性质,而且 τ_ε 将是 x_ε 的最小周期. 设若不然,族 $(x_\varepsilon(t), \tau_\varepsilon)$ 将引出 (4.2.8) 的一个歧点 $(0, \tilde{\lambda})$, 此与 $2\pi/\lambda_k$ 是最小的特征值相矛盾.

4.2D 分歧理论中的 Morse 型数

设 $F(x)$ 是 N 个实变量的 C^2 实值函数, 在 1.6C 中已经定义了它的孤立临界点 p 的 Morse 型数 $\{M_F(p)\}$. $\{M_F(p)\}$ 是一个 $N+1$ 维向量 $(m_0, m_1, \cdots, m_N)$, 其分量都是正整数. 它量度 $F(x)$ 临界点 p (可能退化)的"重数". 现在指出, 如果仅限于考虑自共轭算子 L 和梯度算子 $T(x, \lambda)$, 那么 Morse 型数也是方程 (4.2.1) 的不变量.

又从 4.2A 末尾的讨论推出, 只需验证 Morse 型数对有限维

Hilbert 空间的不变性．这里我们已经隐含地应用了一个事实（由(2.5.5) 推出的)，即对于固定的 λ 和 0 附近的 u，(4.2.2)左端的算子是梯度算子．这是因为，从 (4.2.1) 过渡到 (4.2.2) 时这个性质仍然保持．如果 $\bar{x}$ 是一个非退化的临界点，那么不难算出 $\bar{x}$ 的 Morse 型数．事实上，如果 $\bar{x}$ 的 Morse 指数为 k，

$$M_F(\bar{x}) = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0),$$

其中第 $k+1$ 个坐标是 1． 既然非退化临界点 $\bar{x}$ 的 Morse 指数可以由线性算子 $F''(\bar{x})$ 确定，所以，至少在非退化的情形，Morse 型数可以由线性化的办法算出．最后，Morse 型数在"小扰动"下是"稳定的"．若孤立临界点 $\bar{x}$ 是非退化的，上述事实的证明是容易的．对于较困难的退化情形，设 $\bar{x}$ 是孤立临界点，且其 Morse 型数为 $M_F(\bar{x}) = (m_0, m_1, \cdots, m_N)$．由 (1.6.14)，如果 $G(x)$ 是 C^2 函数，在 C^1 意义下和 $F(x)$ 充分接近，且在 $\bar{x}$ 附近只有非退化临界点，那么在 $\bar{x}$ 附近，$G(x)$ 至少有 m_k 个指数为 k 的孤立的非退化临界点 $(k = 0, 1, \cdots, N)$．

作为 Morse 型数对分歧理论的一个应用，我们证明

(4.2.15) **定理** 设 $I - \lambda_0 L$ 是无逆的自共轭 Fredholm 算子，那么，如果 $T(x, \lambda)$ 是 C^1 高阶梯度算子，则 $(0, \lambda_0)$ 是方程 (4.2.1) 的一个歧点．

证明：设 $(0, \lambda_0)$ 不是 (4.2.1) 的歧点，那么 $(0, \lambda_0)$ 也不是 (4.2.2) 的歧点．于是，对 λ_0 的邻域中固定的 λ，$(0, \lambda)$ 是实函数

$$H(u, \lambda) = \frac{1}{2}(u - \lambda L u, u) + \mathscr{T}(u + g(u, \lambda), \lambda)$$

的孤立临界点，其中 $\mathscr{T}$ 是实值函数，满足 $\mathscr{T}(0, \lambda) \equiv 0$ 和

$$\mathscr{T}_u(u + g(u, \lambda), \lambda) = PT(u + g(u, \lambda), \lambda).$$

显然，对于 λ_0 的小的去心邻域，$\det|H_{uu}(0, \lambda)| \neq 0$．故对于固定的 λ，$(0, \lambda)$ 是 $H(u, \lambda)$ 的孤立非退化临界点．不难由计算 Hesse 行列式 $\det|H_{uu}(0, \lambda)|$ 得出，$(0, \lambda)$ 关于 $H(u, \lambda)$ 的 Morse 指数在 $\lambda < \lambda_0$ 时为 0，在 $\lambda > \lambda_0$ 时为

$$\dim\mathrm{Ker}(I-\lambda_0 L)=N.$$

另一方面，$(0, \lambda_0)$ 是 $H(u, \lambda_0)$ 的孤立退化临界点，假定它的型数至少有一个不为0。根据上面提到的 Morse 型数的不变性，因为当 $(u, \lambda)\to(0, \lambda_0)$ 时，$\sup\|H(u, \lambda)-H(u, \lambda_0)\|$ 在 C^1 意义下趋于0，所以对 λ_0 小邻域中的每个 λ，$H(u, \lambda)$ 在 $(0, \lambda)$ 的 Morse 型数 $M_\lambda(0)$ 满足不等式 $M_\lambda(0)\geqslant M_{\lambda_0}(0)$（按每个坐标分量比较）。从这个不等式推出，如果

$$M_{\lambda_0}(0)=(m_0, m_1, m_2, \cdots, m_N),$$

那么对 $\lambda<\lambda_0$，$m_0=1$ 和 $m_i=0(i=1, 2, \cdots, N)$。同时对 $\lambda>\lambda_0$，$m_N=1$，$m_i=0(i=0, 1, \cdots, N-1)$。于是对

$$i=0, 1, 2, \cdots, N, m_i=0.$$

这就是所要的矛盾。剩下唯一要考虑的情形是 Morse 型数全部为0的可能性。但是，由于 Brouwer 度和 Morse 型数之间的关系 (1.6.15)，已经排除了这种可能。事实上，从 (1.6.15) 推出 $d(H_u(u, \lambda_0), 0, \|u\|<\varepsilon)=0$。但是这和下面的事实相矛盾：因为 $u=0$ 是 $H(u, \lambda_0-\delta)$ 的相对极小，所以对于充分小的 ε 和 δ，$d(H_u(u, \lambda_0-\delta)), 0, \|u\|<\varepsilon)=1$。

定理 (4.2.15) 显然是 (4.2.7) 中类似结果的深远推广。它的关于 (4.2.8) 在 $x=0$ 附近的周期解的直接推论是 (4.2.9) 的如下推广

(4.2.16) 定理 在 (4.2.9) 同样的条件下，在 $x=0$ 的任何充分小邻域内，方程 (4.2.8) 都有非平凡周期解 $x_i(t)\ (i=1,2,\cdots,k)$。当 U 的直径趋于0时，$x_i(t)$ 的周期 τ_i 趋于 $2\pi/\lambda_i$。如果实值函数 $F(x)$ 实解析，那么 (4.2.8) 有实解析解曲线 $x_\varepsilon(t)$，其周期为 $\tau_i(\varepsilon)$，并满足

$$x_\varepsilon(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(t)\varepsilon^n \quad 和 \quad \tau_\varepsilon=\frac{2\pi}{\lambda_i}+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\varepsilon^n.$$

证明： 把 (4.2.9) 的证明和上面的一般结果 (4.2.15) 结合起来就得到了这个定理。

附注：

Weinstein (1974) 已经证明，(4.2.16) 中的周期解彼此不同. 在第六章我们要指出，还可把 Ljusternik-Schnirelmann 理论用于这个方面(参看本章末的注记 F).

4.3 具体的分歧现象

某些临界参数的大小常常决定自然界很多事物的性质. 在很多情况下，分歧现象起着重要的作用. 在前两节，我们用"非线性扰动"谐波系统在平衡位置附近的周期运动解释了这个事实. 这里，我们在数学分析的不同领域继续这个课题，以说明前几节中发展起来的分歧理论的重要性，以及应用这个理论到特别困难的情形时的有关问题. 为简单起见，所选择的材料是比较成熟的. 但尽管它们是经典的，下面要讨论的每个课题中都充满没有解决的基本问题，而它们的解决需要用到分歧理论.

4.3A 约束三体问题中平衡位置附近的周期运动

约束三体问题可以叙述如下：两点质点 P_1 和 P_2 的质量比为 μ 和 $1-\mu$，P_1 和 P_2（在 Newton 引力作用下）沿圆周轨道围绕它们的质心运动. 第三个质点 P_3，其质量可以忽略不计，在前两个旋转体确定的平面上运动. 这个质点 P_3 受 P_1 和 P_2 的 Newton 引力控制，但假定它并不影响 P_1 和 P_2 的圆周运动. 要解决的问题是，描述在各种给定的初始条件下 P_3 的运动.

这个问题是 Euler 在 1772 年提出的，由于 Poincaré 深刻的工作，它已成为天体力学中的中心课题. Poincaré 强调此约束问题中周期运动的重要性. 他猜测，对给定的时间区间，此约束问题的任何解都可以由周期解来任意逼近.

Jacobi 建立了描述 P_3 运动的相对简单的微分方程(在一个旋转坐标系中). 这些方程是自治的，可以写成（用无量纲的形式）

(4.3.1) $$x_{tt} - 2y_t = U_x(x, y),$$

(4.3.2) $$y_{tt} + 2x_t = U_y(x, y), \quad 其中$$

(4.3.3) $U(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (1 - \mu)\{(x - \mu)^2 + y^2\}^{-1/2}$

$$+ \mu\{(x + 1 - \mu)^2 + y^2\}^{-1/2}.$$

方程组 (4.3.1)—(4.3.2) 是自治的 Hamilton 方程。 它的驻点(由解 $U_x = U_y = 0$ 得到)是这个系统最简单的解。 一共有五个驻点：三个形若 $(x_k(\mu), 0)$ $(k = 1, 2, 3)$，通常称为 L_1, L_2, L_3；另外两个是 L_4 和 L_5。 L_4 或 L_5 和 P_1，P_2 都构成一个等边三角形(参看图 4.4)。

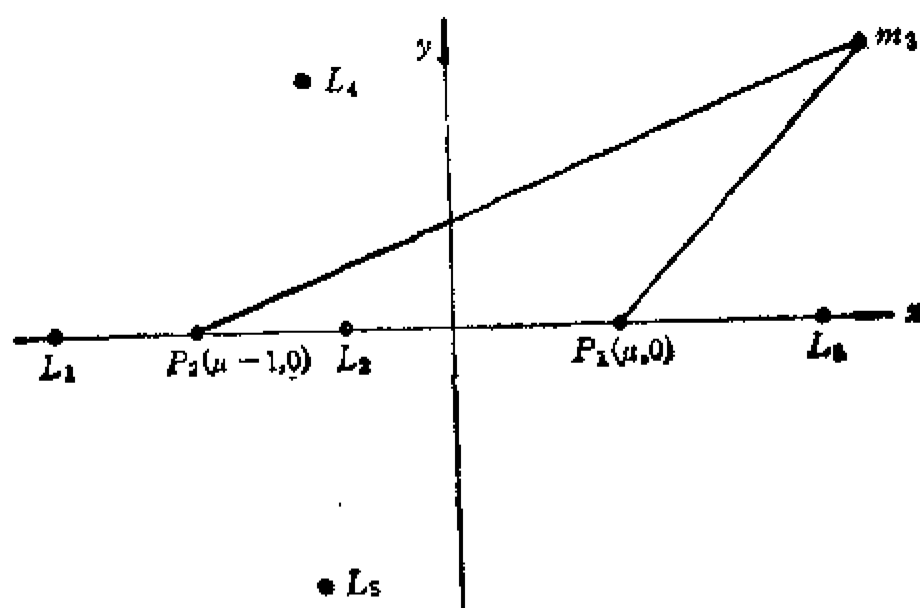


图 4.4 约束三体问题的平衡点.

L_4 和 L_5 称作三角驻点或平衡点。 出于和 4.1，4.2 节类似的考虑，下面讨论在这种驻点附近周期运动的可能性。首先注意到，不难求出所希望的周期解的线性近似。 事实上，用 (x_0, y_0) 记 (4.3.1)—(4.3.2) 的驻点的坐标，那么在点 (x_0, y_0) 的线性化方程是

(4.3.4) $\xi_{tt} - 2\eta_t = U_{xx}(x_0, y_0)\xi + U_{xy}(x_0, y_0)\eta,$

(4.3.5) $\eta_{tt} + 2\xi_t = U_{xy}(x_0, y_0)\xi + U_{yy}(x_0, y_0)\eta.$

如果把共线点 L_1, L_2, L_3 中的一个选作 (x_0, y_0)，那么这个线性组有一族周期解。而在点 L_4 和 L_5，方程组 (4.3.4)—(4.3.5) 或者有两个解，或者没有不同的周期解，这取决于质量比 μ 小于或等于

某个临界值 μ_0. 这里有一个问题，就是 (4.3.1)—(4.3.2) 的周期解线性近似的合法性. 说得更清楚些，在每个驻点 L_1—L_5 附近，(4.3.4)—(4.3.5) 的周期解是 (4.3.1)—(4.3.2) 周期解精确的一次近似吗? 在 4.1 和 4.2 节，对于类似于 (4.3.1)—(4.3.2) 的方程组，我们用分歧理论部分地解决了这个问题，也正是根据在非线性扰动下正规方式解的不变性来考虑这个问题. 下面指出，这个方法可以推广到现在的较困难的情形，即证明

(4.3.6) **定理** 如果关于 $L_i(i=1,\cdots,5)$，线性方程组 (4.3.4)—(4.3.5) 有非平凡周期解，那么在 L_i 的小邻域内，非线性方程组 (4.3.1)—(4.3.2) 至少有一个非平凡的周期解族 $x_\varepsilon(t)$，其周期为 τ_ε，两者都解析地依赖于 ε 且 $(x_\varepsilon(t),\ \tau_\varepsilon)\to(0,\ \tau_i)$，其中 τ_i 是 (4.3.4)—(4.3.5) 关于 L_i 的所有非平凡周期解中的最小非零周期.

证明: 仿照 (4.2.9) 中用过的方法进行证明. 第一步，在 (4.3.1)—(4.3.2) 中令 $t=\lambda s$，注意考察变换后方程的 s 的 1 周期解. 遵循 (4.2.9) 的步骤，所得方程可以改写成 Hilbert 空间 H 中的算子方程

(4.3.7) $$(\mathfrak{L}-\lambda B-\lambda^2 L)X-\lambda^2 R(X)=0.$$

这里 H 中的元素为定义在 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 上的绝对连续 2 向量函数

$$X(s)=(x(s),\ y(s)),$$

且 $\dot{X}(s)\in L_2\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. 算子 $\mathfrak{L}$, B, L 和 R 由下列公式隐式定义

$$(\mathfrak{L}X,\ \varphi)=\int_0^{1/2}X_s\cdot\varphi_s ds,$$

$$(BX,\varphi)=2\int_0^{1/2}(x_s\varphi_2-y_s\varphi_1)ds,$$

$$(LX,\varphi)=\int_0^{1/2}(H(x_0,\ y_0)X,\ \varphi)ds,$$

$$(RX,\ \varphi)=\int_0^{1/2}\nabla V(X)\varphi ds,$$

其中 $H(x_0,\ y_0)$ 表 Hesse 矩阵 $(U_{x_ix_j}(x_0,\ y_0))$.

$$V(X) = V(x, y),$$

而实值函数

$$V(x, y) = U(x_0 + x, y_0 + y) - U(x_0, y_0)$$
$$- \frac{1}{2} H(x_0, y_0)\{X \cdot X\}.$$

于是B和L是自共轭紧算子，R是高阶全连续梯度算子。

又和 (4.2.9) 中的做法一样，在H中把向量 $X(s)$ 分解成它在$\left[0, \frac{1}{2}\right]$上的平均值 X_m 和一个平均值为 0 的向量 $X_0(s)$。方程在H_0上可以改写成

(4.3.8) $$f(X_0, \lambda) = (I - \lambda B - \lambda^2 L)X_0 - \lambda^2 T(X_0) = 0,$$

其中H_0是H的一个闭子空间，它的元素在$\left[0, \frac{1}{2}\right]$上的平均值为0. 如果线性算子 $f_x(0, \lambda) = I - \lambda B - \lambda^2 L$ 没有逆，那么数 λ 便是 (4.3.4)—(4.3.5) 的非平凡周期解的周期. 因为算子B和L紧且自共轭，对所有的λ，$f_x(0, \lambda)$ 是零指标的 Fredholm 算子，于是可以应用 4.1 和 4.2 节中发展的分歧理论. 由于在每点 $L_i(i = 1, \cdots, 5)$，Hesse 矩阵 $H(x_0, y_0)$ 非奇异，重复(4.1.13)中的论证便可得出，如果 $\lambda = \lambda_0$ 时 $\dim\mathrm{Ker}(I - \lambda B - \lambda^2 L) = 1$，那么方程(4.3.8)有唯一的非平凡解曲线 $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ 从 $(0, \lambda_0)$ 分枝出来并实解析地依赖于 ε. 因为函数 $V(x, y)$ 实解析，这些解依次产生出所要求的 (4.3.1)—(4.3.2) 的周期解族. 另一方面，如果 $\lambda = \lambda_0$ 时 $\dim\mathrm{Ker}(I - \lambda B - \lambda^2 L) > 1$，那么可以用定理 (4.2.15) 和 (4.2.7) 的证明，得出方程 (4.3.8) 总有非平凡解曲线 $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$ 从 $(0, \lambda_0)$ 分枝出来并实解析地依赖于 ε，这些解产生了 (4.3.1)—(4.3.2) 的非平凡周期解族.

(4.3.9) **推论** 对一切 $\mu > 0$，在 L_1，L_2 和 L_3 中任何一点的邻域内，方程组 (4.3.1)—(4.3.2) 都有周期解. 此外，存在一个临界值 $\mu_0 < 1$，使得当 $\mu \leqslant \mu_0$ 时，在 L_4 和 L_5 的任何小邻域内，方程组 (4.3.1)—(4.3.2) 有周期解，但对 $\mu > \mu_0$ 则没有. 事实上，

除了一个可数无穷集 Σ_μ 外，对一切 $\mu\in(0,\ \mu_0)$ 在 L_4 和 L_5 附近 (4.3.1)—(4.3.2) 有两个不同的周期解族。

证明： 根据定理 (4.3.6)，只需确定数 λ 使 $f_x(0,\ \lambda)=I-\lambda B-\lambda^2 L$ 有非平凡的核，或等价地，确定 (4.3.4)—(4.3.5) 非平凡解的周期 λ。为确定这些线性方程组解的周期，我们构造这个方程组的特征方程。对 L_1，L_2，L_3，这个方程可以写成 $s^4+\alpha(\mu)s^2-\beta^2(\mu)=0$. 其中 $\alpha(\mu)$ 和 $\beta(\mu)$ 是常数. 因为周期解对应于 s 的纯虚值，我们看到，由于 $\beta^2(\mu)>0$，对于任何 μ 存在唯一的这种共轭对. 另一方面，对 L_4 和 L_5，特征方程是

$$s^4+s^2+\frac{27}{4}\mu(1-\mu)=0,$$

当且仅当 $1\geq 27\mu(1-\mu)$ 时，这个方程有所希望的纯虚数的复共轭根 $(\pm is_1,\ \pm is_2)$. 于是 μ_0 是方程 $1=27\mu(1-\mu)$ 的最小正解. 因而，如 $s_2>s_1$，只要 $s_2/s_1\neq N$，N 是整数，把推广了的 LiaPunov 准则用到方程组 (4.3.1)—(4.3.2)，就得出两个周期解族，其周期分别接近于 $2\pi/s_2$ 和 $2\pi/s_1$。令

$$D=1-27\mu(1-\mu),$$

所排除的 μ 值正是那些值，它们使

$$(1+\sqrt{D})/(1-\sqrt{D})\neq N^2(N=1,\ 2,\ \cdots).$$

注意，当 $N\to\infty$ 时，这些 μ 值有极限点.

关于尚未解决的问题的附注：

在上面这个方向上，尚未解决的重要经典问题是：

(i) 大振幅周期轨道族的连续性；

(ii) 在 L_4 和 L_5 附近，对某些 $\mu\in\Sigma_\mu$，有没有可能也存在两个不同的周期解族(参看本章末的注记 F)?

4.3B 非线性弹性中的屈曲现象

在非线性弹性中有很多有趣的分歧现象，最早的也许是第一章中提到的 Euler 弹性杆的问题. Euler 问题是对一个沿轴向受力的均匀弹性细杆作出数学描述. 在 1744 年的论文中，他把这个问题化成求解如下半线性边值问题

$$\ddot{w}+Pw[1-\dot{w}^2]^{3/2}=0,\ w(0)=w(1)=0.$$

Euler 发现，每当轴向压力大小 P 超过一定的数值时，细杆就

要偏离它的平衡位置而"屈曲"，这个数值即所谓"屈曲负载"，正是相应线性问题

$$\ddot{w} + Pw = 0, \quad w(0) = w(1) = 0$$

的最小特征值，他还指出，半线性问题可用与参数 P 有关的椭圆函数显式解出。

1910 年 von Kármán 指出，可用两个四阶拟线性偏微分方程组来描写一个类似的，但更困难的二维问题：一个弹性薄板，沿着它的边界受到任意的力和压力，给出该薄板屈曲的数学描述。在随后的年代里，对这些方程的充分讨论表明，如果不对薄板的形状或屈曲板的对称性作特别的假定，那么，由于所涉及的偏微分方程的非线性，该问题是极其困难的。在这里，我们把 4.1 和 4.2 节中发展起来的分歧理论用于弹性屈曲的数学讨论，既可讨论薄板，又可讨论更一般的弹性薄壳的情形。

von Kármán 方程可以叙述如下：我们考虑一个薄弹性体 B，它在没有变形时是平的。如 B 受到施加于其边界的压力作用(其数值为 λ)，在 B 中产生的应力可用 Airy 应力函数 $f(x, y) + \lambda F_0(x, y)$ 来测量。如把 B 距离它所处平面的位移记为 $u(x, y)$，那么它们由如下的拟线性椭圆型方程(参看 (1.1.12)) 确定

(4.3.10)
$$\Delta^2 f = -\frac{1}{2}[u, u],$$
$$\Delta^2 u = \lambda[F_0, u] + [f, u],$$

其中 Δ^2 记双调和算子，

$$[f, g] = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}.$$

如果把 B 看成 $\mathbb{R}^2$ 中有界区域 G，B 的边界是 ∂G，对 (4.3.10) 我们可以考虑如下边界条件

(4.3.11)
$$u = u_x = u_y = 0,$$
$$f = f_x = f_y = 0, \quad \text{在 } \partial G \text{ 上}.$$

上面的 $F_0(x, y)$ 是由解一个有关的非齐次线性问题得出的函数，它是当阻止板挠曲时，没挠曲的板中所产生的应力的量度。所得的平衡状态称作"屈曲"状态，这个问题称作"弹性屈曲"。

为研究屈曲的初始变形，一般假定方程 (4.3.10) 中的非线性项 $[u, u]$ 和 $[f, u]$ 可以忽略不计，于是可用下面的线性特征值问题来刻划薄板屈曲的经典的线性化问题：

(4.3.12) $\Delta^2 w - \lambda[F_0, w] = 0$, 在 Ω 中,

(4.3.13) $w = w_x = w_y = 0$, 在 $\partial\Omega$ 上.

从泛函分析的观点来看，这个线性化问题在于研究自共轭算子的特征值问题

(4.3.14) $w = \lambda L w$ 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中.

在整个工作中，我们将对函数 $F_0(x, y)$ 加上如下的假设：

$$Lw = [F_0, w]$$

是 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$上有界紧算子. 当 F_0 的二阶导数在 Ω 中一致有界时，这个条件一定满足. 进一步我们注意，这个假设使我们可以认为算子 L 有正的和负的特征值. 这种情形对应于如下的物理作用：作用在部分边界上的力是压力，而在 $\partial\Omega$ 的另一部分上是拉力. 事实上，(4.3.14) 的谱由特征值 $\{\lambda_n\}$ 组成，它们构成一个趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 或两者的离散数列，每个 λ_n 的重数是有限的，零不是(4.3.14)的特征值.

我们举一个夹紧板的线性化问题作为简单例子.

例：一个圆形夹紧的板，它的边界受到均匀压力，这时方程 (4.3.12)—(4.3.13) 化为

(4.3.15) $\Delta^2 w - \lambda\Delta w = 0$, $w = w_x = w_y = 0$.

研究这个问题的解导致分析径向对称特征函数和非径向对称特征函数.

(4.3.15) 的径向对称解 $w = w(r)$ 可以由 Bessel 函数 $J_1(r)$ 的零点确定. 这些特征函数是单重的，是二阶常微分方程

$$r^2\ddot{\psi} + r\dot{\psi} + (r^2 - 1)\psi = 0$$

的解，在 $r = 0$ 处有限.

非对称特征函数问题可以由下式得出

$$w(r, \theta) = R(r)\begin{cases} \sin\mu\theta, \\ \cos\mu\theta. \end{cases}$$

这些特征函数不一定是单重的，但已经知道第一特征函数轴向对称，且是单重的.

现在我们指出，在刚才的定义下，(i) 特征值 λ_n 和特征函数

是 (4.3.12)—(4.3.13) 解的有效一次近似. (ii) 用特征值 λ_n 来理解屈曲现象是合适的. 为此证明

(4.3.16) **定理** (i) 设 λ_n 是线性方程组 (4.3.14) 的特征值,那么 $(0, \lambda_n)$ 是非线性方程组 (4.3.12)—(4.3.13) 的歧点. 于是对每个 λ_n, 存在 (4.3.12)—(4.3.13) 的一个单参数解族 $(w_\varepsilon, f_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$, 它解析地依赖于 ε,

$$w_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \varepsilon^n, \quad f_\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty} f_n \varepsilon^n, \quad \lambda_\varepsilon = \lambda_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \varepsilon^n,$$

且 w_1 是 (4.3.13)—(4.3.14) 的解.

(ii) 方程组 (4.3.12)—(4.3.13) 在 $(\lambda_{-1}, \lambda_1)$ 中没有解. 其中 λ_1 和 λ_{-1} 分别是 (4.3.13)—(4.3.14) 最小的正特征值和最大的负特征值.

(iii) 在 $w=0$, $\lambda=\lambda_N$ 附近, 当 $\lambda_N>0$ 时, 非线性方程组 (4.3.12)—(4.3.13) 对 $\lambda \leqslant \lambda_N$ $(N=1, 2, \cdots)$ 没有解, 当 $\lambda_N<0$ 时,对 $\lambda \geqslant \lambda_N$ 没有解.

(i) 的证明: 在 2.5C 节,我们证明了方程组 (4.3.12)—(4.3.13) 的解一一对应于算子方程

$$w + Cw = \lambda Lw \tag{4.3.17}$$

的解. 式 (4.3.17) 定义在 Hilbert 空间 $H=\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 上, 算子 $C(w)$ 定义如下: 先定义双线性算子

$C(w, v)$: $H\times H\to H$ 为

$$(C(w, v), \varphi) = \int_\Omega [w, v]\varphi, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.3.18}$$

然后定义 $C(w)=C(w, C(w, w))$, C 是全连续梯度算子, 三次齐次并且 $(Cw, w)\geqslant 0$. 令 $f(w, \lambda)=w+Cw-\lambda Lw$. 我们指出, 根据定理 (4.2.15),所有使 $\dim\ker f_w(0, \lambda_N)>0$ 的点 $(0, \lambda_N)$ 都是(4.3.17)的歧点,而这些 λ_N 正是 (4.3.12)—(4.3.13)的特征值 λ_N. 因为 $f(w, \lambda)$ 对 w 和 λ 实解析,和 (4.2.16) 一样,又得到 (i) 中的展式

(ii) 的证明: 设 (w, f) 是 (4.3.12)—(4.3.13) 对 $\lambda\in[\lambda_{-1}, \lambda_1]$ 的解,那么 (w, f) 满足 (4.3.17). 作 (4.3.17) 和 w 的内积,利用 λ_1 和 λ_{-1} 的变分特性,我们有 $(Cw, w)=0$. 于是对所有的 $\varphi\in H$,

$$\int_{\Omega}[w, w]\varphi = 0,$$

故 w 满足

(4.3.19) $$[w, w] = w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2 = 0, \quad 在\ \Omega\ 中;$$

(4.3.20) $$D^{\alpha}w|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leqslant 1.$$

所以曲面 $w = w(x, y)$ 的 Gauss 曲率等于0，因而可展. 这个曲面被射线覆盖，根据 (4.3.20)，在 Ω 中 $w(x, y) \equiv 0$.

(iii) 的证明: 刚才证明了对 (4.3.12)—(4.3.13) 的任何非平凡解有 $(Cw, w) > 0$. 再把 (4.1.33) 用到方程 (4.3.17) 就得到要证明的结果.

关于改进 (4.3.16) 的说明:

在第六章我们将对结果 (i) 作出重要的改进. 即: 如果 λ_n 是一个 k 重特征值, 那么, 粗糙地说, 非线性方程组 (4.3.12)—(4.3.13) 至少有 k 个从 $(0, 0, \lambda_n)$ 分枝出来的单参数解族 (详情可见 6.7C).

弹性薄壳(即原来就弯曲的弹性结构) 的屈曲现象比弹性板的情形要复杂得多，尽管它有类似的 von Kármán 方程. 事实上，经验证，这时线性化常常不能解释所观察到的变形. 为说明这点，我们考虑一个任意外形的浅的薄壳 S，它在 xy 平面上的投影是有界区域 Ω，边界为 $\partial\Omega$，有外力 $Z(x, y)$ 沿边界 $\partial\Omega$ 作用到壳上. 那么，加上适当的边界条件后，S 的平衡状态将由如下的 von Kármán 方程确定:

(4.3.21) $$\Delta^2 f = -\frac{1}{2}[w, w] - (k_1 w_x)_x - (k_2 w_y)_y,$$

(4.3.22) $$\Delta^2 w = [f, w] + (k_1 f_x)_x + (k_2 f_y)_y + Z.$$

这里 k_1 和 k_2 分别记壳在平行于 zx 和 zy 平面的横截面处的初始曲率. 于是初始曲率对 von Kármán 方程的影响只不过是在 (w, f) 中加上一个线性曲率项.

此外，如果选取 $Z = \lambda\psi_0$，同时满足边界条件

(4.3.23) $$w = w_x = w_y = 0,$$

(4.3.24) $$f_{nn} = \lambda\psi_1, \ f_{n\tau} = \lambda\psi_2$$

在 $\partial\Omega$ 上.

那么对所有的 λ，方程组 (4.3.21)—(4.3.22) 有解 $(w, f) = (0, \lambda F_0)$ (即一个线性依赖于 λ 的解，在这个解中，变形的壳的中曲面被伸展了而不是被弯曲). 这里 n 和 τ 分别表示法向和切向导数; ψ_1 和 ψ_2 表示作用在 $\partial\Omega$ 上的

边应力；λ 度量边应力的大小．我们指出，对于给定的光滑的 ψ_1，ψ_2，总可以确定出这样一个线性依赖于 λ 的函数 $Z=\lambda\Psi_0$．事实上，如果 λF_0 是边界条件为（4.3.24）时的 Dirichlet 问题 $\Delta^2 F=0$ 的解，我们用公式

$$(k_1F_{0x})_x-(k_2F_{0y})_y=-\Psi_0$$

计算 Ψ_0，因而 $w=0$，$F=\lambda F_0$ 满足方程组（4.3.21）—（4.3.24）．

现在记整个方程组（4.3.21）—（4.3.24）的尝试解为

$$w=w,\ f=F+\lambda F_0.$$

我们发现，可由下面的方程组确定出所希望的平衡状态

$$\Delta^2 F=-\frac{1}{2}[w,w]-(k_1w_x)_x-(k_1w_y)_y, \tag{4.3.25}$$

$$\Delta^2 w=[F,w]+\lambda[F_0,w]+(k_1F)_x+(k_2F)_y, \tag{4.3.26}$$

$$w=w_x=w_y=0,\quad F=F_x=F_y=0,\quad 在\ \partial\Omega\ 上. \tag{4.3.27}$$

这时相应的线性方程组可以写成

$$\Delta^2 F=-(k_1w_x)_x-(k_2w_y)_y, \tag{4.3.28}$$

$$\Delta^2 w=\lambda[F_0,w]+(k_1F)_x+(k_2F)_y. \tag{4.3.29}$$

边界条件为（4.3.27）．显然（仿照（2.5.7）的论证），这个方程组可以写成 Hilbert 空间 $H=\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中的算子方程

$$w+L_1w=\lambda Lw. \tag{4.3.30}$$

Lw 和（2.5.7）中一样定义，而

$$(L_1w,\ \varphi)=\int_\Omega(k_1w_x\varphi_x+k_2w_y\varphi_y).$$

在上面的假定下，（4.3.30）的谱和平面情形有完全相同的性质．

下面的定理指出了方程组（4.3.25）—（4.3.27）和它们在点 $(0,\lambda)$ 的线性化之间的关系．

（4.3.31）**定理**　（i）设 λ_N 记线性化方程组（4.3.30）的一个特征值，那么 $(0,\lambda_N)$ 是方程组（4.3.25）—（4.3.27）的歧点，且存在一个解析依赖于 ε（对小的 ε）的单参数族 $(w_\varepsilon^{(N)},f_\varepsilon^{(N)},\lambda_\varepsilon^{(N)})$，使得

$$w_\varepsilon^{(N)}=\varepsilon w_N(x)+O(\varepsilon^2),$$

$$f_\varepsilon^{(N)}=O(\varepsilon^2),$$

$$\lambda_\varepsilon^{(N)}=\lambda_N+O(\varepsilon),$$

其中 w_N 是（4.3.30）的规范化的特征函数．

(ii) 对 $0<\lambda\leqslant\bar{\lambda}_0$，由平凡解 $(w,\lambda)=(0,\lambda)$ 达到位能的绝对极小，其中 $\bar{\lambda}_0$ 是相应的线性化平面方程 $w=\lambda Lw$ 的最小正特征值。但是对 $\lambda\in(\lambda_0,\lambda_1)$，平凡解 $(0,\lambda)$（虽然是相对极小，但一般说来）不是达到位能绝对极小值的解。

(i) 的证明：我们又可以把方程组(4.3.25)—(4.3.27)改写成 Hilbert 空间 H 中的一个算子方程．这个算子方程可以写成和(2.5.7)中一样，开始是一对方程

(4.3.32) $$F=-\frac{1}{2}C(w,w)-L_1w,$$

(4.3.33) $$w=C(F,w)+\lambda Lw+L_1F.$$

然后把(4.3.32)代入(4.3.33)，并令 $Cw=C(w,(Cw,w))$，得到

(4.3.34) $$G(w,\lambda)=w+\frac{1}{2}C(w)+C(w,L_1w)$$
$$+\frac{1}{2}L_1C(w,w)+L_1^2w-\lambda Lw=0.$$

若 $G_w(0,\lambda)$ 在 λ_N 没有逆，则点 λ_N 和(4.3.30)的特征值重合．为证明每个这样的 λ_N 都是歧点，且与 $\dim\ker(I+L_1^2-\lambda_NL)$ 无关，我们证明 $G(w,\lambda)$ 是个梯度算子，然后再用定理(4.2.15)．一个简单的计算指出，如果

$$\mathscr{I}(w,\lambda)=\|w\|^2+\left\|\frac{1}{2}C(w,w)+L_1w\right\|^2-\lambda(Lw,w),$$

那么 $\mathscr{I}_w(w,\lambda)=2G(w,\lambda)$，所以 $G(w,\lambda)$ 是梯度算子．而且，如果定义一个新的 Hilbert 空间，它的元素是 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中的元素，范数定义为 $\|w\|_{2,2}^2+\|Lw\|_{2,2}^2$ $\left(\text{它等价于范数 } \|w\|_{2,2}=\int_\Omega|\Delta w|^2\right)$，就可把 $G(w,\lambda)$ 改写成标准形式

$$G(w,\lambda)=(I-\lambda L)w+T(w).$$

(ii) 的证明：系统的位能可以用在(i)的证明中所定义的泛函 $\mathscr{I}(w,\lambda)$ 来表示．根据 λ_0 的变分特性，对 $\lambda\in[0,\lambda_0]$，

$$\mathscr{I}(w,\lambda)\geqslant\left\|\frac{1}{2}C(w,w)+L_1w\right\|^2\geqslant 0.$$

因为 $\mathscr{I}(0,\lambda)=0$，对 $\lambda\in[0,\lambda_0]$，平凡解 $(0,\lambda)$ 达到 $\mathscr{I}(w,\lambda)$ 的极

小．另一方面，对 $\lambda\in[\bar{\lambda}_0, \lambda_1]$ 和任意的 $x\in H$，根据 λ_1 的变分特性，二次型

$$(\mathscr{I}_{ww}(0, \lambda)x, x)=(x, x)+(L_1^2x, x)-\lambda(Lx, x)\geqslant 0.$$

于是对 $\lambda\in[\bar{\lambda}_0, \lambda_1]$，平凡解是位能泛函 $\mathscr{I}(w, \lambda)$ 的相对极小．为证（一般说来）平凡解不是绝对极小，我们注意到，如果 $(\bar{w}, \bar{F}, \lambda)$ 是(4.3.24)的解，那么

$$\mathscr{I}(\bar{w}, \bar{\lambda})=-\frac{1}{4}\|C(\bar{w}, \bar{w})\|^2-\frac{1}{2}(C(\bar{w}, \bar{w}), L\bar{w}).$$

现在，如果 $\dim\ker(I+L^2-\lambda_1L_1)=1$，且象通常那样，对某个

$$u_1\in\ker(I+L_1^2-\lambda_1L)$$

有 $(C(u_1, u_1), Lu_1)\neq 0$，那么对 $\lambda<\lambda_1$，$\mathscr{I}(\bar{w}, \lambda)$ 可以为负．故一般说来，对于小于 λ_1 的 λ 值，平凡解不一定是绝对极小．

对方程组 (4.3.10)—(4.3.11) 解的稳定性的研究很重要．事实上有各种理论来阐述物理原则，依据它，在 λ 的每一个值提供的各种可能之中，板"选择"了一个特殊的解或"分歧状态"． 这里我们介绍一个这样的原则，它可以追溯到 Dirichlet．

最小位能原理：在 λ 的特定值处，板选择使位能取极小的状态．反之，如果一个平衡状态的位能不是相对极小，那么它不稳定．

在所谈到的问题中，由 $u(x, y)$ 确定的平衡状态的位能由下式定义（可能相差一个常数因子）：

$$V(u)=(u, u)+\frac{1}{2}(Cu, u)-\lambda(Lu, u). \tag{4.3.35}$$

因而，在板不屈曲的状态 u_0 处，位能 $V(u_0)=0$．

(4.3.36) **定理** 板由 $u=u(x, y)$ 确定的任何屈曲状态都有严格负的位能，即 $V(u)<0$．于是，对 $\lambda>\lambda_1$，不屈曲的状态是不稳定的．

证明：对于任意屈曲状态，

$$(u, u)+(Cu, u)=\lambda(Lu, u).$$

因为 $u\neq 0$，所以

$$V(u)=-\frac{1}{2}(Cu, u)<0.$$

因而根据最小位能原理，当 $\lambda > \lambda_1$ 时，板总要弯离平面位置；从而对 $\lambda > \lambda_1$，平凡解是不稳定的.

4.3C Navier-Stokes 方程的第二稳态流

Navier-Stokes 方程刻画了粘性不可压流体的运动. 在很多情形，它的稳态解的结构决定性地依赖于实参数 R，R 称作 Reynolds 数. 对于充分小的 R，存在唯一的"层状"定常流满足 Navier-Stokes 方程. 第五章要证明，在很一般的条件下，对任何正的 Reynolds 数 R，Navier-Stokes 方程至少有一个定常解. 不过在很多情形都观察到，对于大的 Reynolds 数，Navier-Stokes 方程的这些定常解不稳定. 事实上，随着 Reynolds 数的增大可观察到不稳态的高度不正规湍流运动. 仅仅基于 Navier-Stokes 方程的非线性来解释这个现象是突出的尚未解决的问题. 这里我们用分歧理论研究起源于层状稳定流的这种事实. 特别，我们指出，在某些情形，首先可以把 Navier-Stokes 方程的歧点和某个线性算子的特征值连系起来；其次，正是在这些歧点稳定性发生了改变.

(I) 第二定常流的一般问题

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N(N = 2, 3)$ 的有界区域，边界为 $\partial\Omega$，在力 f 和 α 作用下的粘性流体运动的 Navier-Stokes 方程是

(4.3.37)
$$\beta\Delta v = (v\cdot \mathrm{grad})v + \nabla P + f,$$
$$\mathrm{div}\ v = 0,$$
$$v|_{\partial\Omega} = \alpha,$$

其中向量 v 和数量 $P(x)$ 是未知量. 假定 $f = \nu f_0$ 线性依赖于参数 ν，且方程组 (4.3.37) 有如下形式的已知解，对一切实值的 ν，

(4.3.38)
$$v(\nu) = \nu v_0.$$
$$P(\nu) = P_0(x_0, \nu),$$

这时要找 (4.3.37) 形若 $v = \nu w + v(\nu)$，$P = cp + P_0$ 的其它解. 为确定 w 和 p，令 $\lambda = \nu/\beta$，我们讨论如下方程的非平凡解

(4.3.39)
$$\Delta w = \lambda\{(w\cdot \mathrm{grad})v + (v\cdot \mathrm{grad})w + (w\cdot \mathrm{grad})w\} + \nabla p,$$

$$\operatorname{div} w = 0,$$
$$w|_{\partial\Omega} = 0.$$

显然，用 2.2D 的结果（参看第二章的附注 C），我们可以把解 (4.3.39) 变为解实 Hilbert 空间 $\mathring{H}_1$ 中的算子方程

(4.3.40) $$f(w, \lambda) \equiv w - \lambda\{Lw + Nw\} = 0.$$

$\mathring{H}_1$ 是无散 N 维向量空间，它由 $C_0^\infty(\Omega)$ 中的无散 N 维向量的每一分量在 Sobolev 空间 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 中完备化而得．算子 L 和 N 由公式隐式定义如下(参看第二章的附注 C)

$$(Lw, \varphi)_{H_1} = -\int_\Omega [\{w \cdot \operatorname{grad} v\} + \{v \cdot \operatorname{grad} w\}] \cdot \varphi,$$

$$(Nw, \varphi)_{\mathring{H}_1} = -\int_\Omega \{w \cdot \operatorname{grad} w\} \cdot \varphi.$$

如第二章附注 C 中指出的，Sobolev 嵌入定理保证了 L 和 N 是 $\mathring{H}_1 \to \mathring{H}_1$ 的紧算子．

我们将只考虑在 $\mathring{H}_1$ 上 dim Ker $(I - \lambda L)$ 是奇数的那些问题．因在实 Hilbert 空间 $\mathring{H}_1$ 上，算子 N 既不是梯度映射，也不是复解析的，故唯一可用于 (4.3.40) 的一般性结果是与限制 dim ker $(I - \lambda L)$ 的奇偶性有关的结论．为分析 ker $(I - \lambda L)$，必须对 Ω 以及向量 f 和 a 加以限制．4.1—4.2 的歧点分析指出，为证 Navier-Stokes 方程有不同于 $(v(\nu), P(\nu))$ 的第二定常流，只需求出方程 (4.3.40) 的歧点 $(0, \lambda)$．于是我们应该求出 $\mathring{H}_1$ 中线性算子 $f'(0, \lambda)w = (I - \lambda L)w$ 的实特征值 λ，并确定这些特征值中哪些对应于 (4.3.40) 的歧点．

设 $u(x, t)$ 是不定常 Navier-Stokes 方程 (1.1.18)—(1.1.19) 的解，把确定解 $u(x, t)$ 的初值有小扰动时所得到的解记作 $v(x, t)$，如果对一切 t，在某种适当的范数下，$v(x, t)$ 仍接近于 $u(x, t)$，则称 $u(x, t)$ 是稳定的，反之则称为不稳定的．对于定常状态 $u(x)$，这个稳定性准则有时可以如下样式的线性化来检验．考虑方程组 (1.1.18)—(1.1.19) 形若 $v(x, t) = e^{\sigma t}w(x) + u(x)$ 的解，其中 $w(x)$ 是由 (4.3.40) 的解中略去高阶项而得到的函数．

也就是说，我们考虑关于 Navier-Stokes 算子在 $u(x)$ 的线性化算子的谱. 如果这个算子有一正实部的特征值，那么根据线性稳定性理论，$u(x)$ 称作不稳定的，当线性算子所有特征值的实部都是负的，$u(x)$ 称作稳定的. 于是为此必须研究方程

$$f_w(u,\lambda)w = -\sigma\mathscr{L}w \tag{4.3.41}$$

的非平凡解 (w, σ). 其中 $\mathscr{L}$ 是 $W_{1,2}(\Omega)\to L_2(\Omega)$ 的嵌入算子在 $\mathring{H}_1$ 中的限制，$f_w(u, \lambda)$ 记由 (4.3.40) 定义的 $f(w, \lambda)$ 在定常解 (w, λ) 处的 Fréchet 导数.

作为说明刚才描述的非唯一现象的第一个例子，设 $\bar{\Omega}$ 是旋转光滑曲面，它不包含旋转轴 z 轴上的点. 对这种特殊的几何体，我们在柱面坐标系 (r, θ, z) 求旋转对称的第二定常流

$$w = w(r, z).$$

假定外力 $F(0, F_3(r), 0)$ 使 (4.3.37) 有平凡解 $v(r)=(0, \gamma v_0(r), 0)$ $(\gamma\in(-\infty, \infty))$. 由 (4.3.40)，在柱面坐标下关于 $w=(w^{(r)}, w^{(\theta)}, w^{(z)})$ 的 Navier-Stokes 方程可写成算子

$$f(w, \lambda) = (I-\lambda L)w + \lambda T(w)$$

的形式，该算子作用于 $\mathring{H}_1$ 的闭子空间 A_0，A_0 由旋转对称的无散向量组成，内积为

$$(w, v)_{A_0} = \int_D (\nabla w\cdot\nabla v) r\,dr\,dz,$$

其中 D 是 Ω 的轴截面. 那么，如果 $w_0 = -v_0/r$ 和

$$g = -(dv_0/dr + v_0/r),$$

则

$$(Lw, \varphi)_{A_0} = \int_D (2w_0 w^{(\theta)}\varphi^{(r)} + g w^{(r)} + \varphi^{(\theta)}). \tag{4.3.42}$$

一般说来，L 不是自共轭算子，但是如果 $v_0(r)=r^\beta$ 且 $\beta<-1$，只需对 A_0 上的内积作稍许改变，L 就是自共轭的. 事实上，我们可在 A_0 上定义一个等价内积如下

$$[w,\varphi]_{A_0} = (w,\varphi)_{A_0} + \int_D \left(w^{(r)}\varphi^{(r)} - \left(\frac{2}{\beta+1}\right) w^{(\theta)}\varphi^{(\theta)}\right.$$

$$+ w^{(z)}\varphi^{(z)})r\,dr\,dz.$$

因为 $2w(r)=(-2/(\beta+1))g(r)$,

$$[Lw,\varphi]_{\mathscr{X}_0}=\int_D 2w(r)\{w^{(\theta)}\varphi^{(r)}+w^{(r)}\varphi^{(\theta)}\}r\,dr\,dz$$
$$=[w,L\varphi]_{\mathscr{X}_0},$$

算子L既紧又自共轭. 于是存在可数无穷离散实数列 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$ 使

$$\dim\ker\ (I-\lambda_i L)<\infty\quad(i=1,2,\cdots).$$

这些事实的直接推论是(4.3.37)定常状态的非唯一性.

(4.3.43) 定理 设Ω如上所述，那么存在向量f和边界条件a，使得 Navier-Stokes 方程(4.3.37)相应的旋转对称定常状态不唯一。

证明: 令 $\lambda=\gamma/\beta$ 是上面所述特征值 λ_i 中的任一个，相应特征元为u_i，令

$$v_1=\frac{1}{2}(a+u_i),\quad v_2=\frac{1}{2}(a-u_i),$$

其中 $a=(0,\lambda r^\beta,0)$, $\beta<-1$. 那么v_1和v_2是在$\partial\Omega$上取值相同的无散向量. 而且在Ω内有 $(I-\lambda L)v_1+\lambda T(v_1)=(I-\lambda L)v_2+\lambda T(v_2)$. 于是,如果向量$f$是这个公共值,那么$v_1$和$v_2$两者都是旋转对称定常流.

下面证明

(4.3.44) 定理 在上面的条件下,如果 $\dim\ker\ (I-\lambda_i L)$ 是奇数,那么对λ_i附近的 $\lambda(\varepsilon)$, Navier-Stokes 方程组(4.3.37)有一族第二类旋转对称定常解 $w_i=w_i(r,z,\varepsilon)$，使得

$$w_i(r,z,\varepsilon)=\varepsilon u_i(r,\theta)+O(|\varepsilon|^2),$$
$$\lambda(\varepsilon)=\lambda_i+O(|\varepsilon|),$$

其中u_i是线性化方程当 $\lambda=\lambda_i$ 时的解.

证明: 证明可直接从(4.2.3)以及下面的事实推出. 在$\hat{\mathscr{X}}_0$中，当在$w=0$附近T是一个高阶的C^1算子时,算子方程

$$f(w,\lambda)=(I-\lambda L)w+Tw=0$$

使得L紧且自共轭.

(4.3.45) 推论 用λ_1记使 $\dim\ker\ (I-\lambda L)>0$ 的最小正数，那么对 $|\lambda|<\lambda_1$，平凡解 $v_0(\nu)$ 在线性意义下稳定,对 $|\lambda|>\lambda_1$, $v_0(\nu)$ 不稳定.

证明: 对 $0<\lambda<\lambda_1$，从方程 $(I-\lambda L)u=-\sigma\mathscr{L}u$, $\|u\|=1$ 推出

$$(\mathscr{L}u, u)\sigma = -((l-\lambda Lu), u).$$

由 λ_1 的变分特性，对 $u \neq 0$，$(\mathscr{L}u, u)\sigma < 0$. 所以 $\sigma < 0$ 并且相应于平凡解 $(0, \lambda)$ 的定常状态是线性稳定的. 对 $\lambda > \lambda_1$，$l - \lambda L$ 最小的特征值 σ_1 是

$$-\sigma_1 = \inf \frac{((l-\lambda L)u, u)}{(\mathscr{L}u, u)} \leqslant \frac{((l-\lambda L)u_1, u_1)}{(\mathscr{L}u_1, u_1)} \tag{4.3.46}$$

$$\leqslant \frac{(\lambda_1 - \lambda)\|u_1\|^2}{\lambda_1(\mathscr{L}u_1, u_1)} < 0.$$

又根据线性稳定性理论，对 $\lambda > \lambda_0$，平凡解 $(0, \lambda)$ 不稳定.

(II) Taylor 旋涡

设在两个无限长的同轴旋转圆柱面中间充满粘性不可压缩流体，它的流动是刚讲的第二类定常流的极好例子，虽然稍复杂一点. 设这两个圆柱面的半径依次为 r_1, r_2，且 $r_1 < r_2$，这些圆柱面分别以角速度 ω_1 和 ω_2 旋转. 再设柱面坐标系 (r, θ, z) 的 z 轴和圆柱面的公共轴重合，那么不难证明，对 $f = (0, \nu f_0, 0)$ 和 $a = 0$，Navier-Stokes 方程有解 $(v(r, \nu), P(\nu))$，其中

$$v(r, \nu) = (0, v_0^{(\theta)}(r), 0).$$

这个解称作 Couette 流. 下面讨论这样一个问题：在 r_1, r_2, ω_1 和 ω_2 之间存在什么样的关系时，(4.3.37) 有形若

$$v = v(r, \gamma) + w(r, z)$$

的(对 z 是周期的)第二种流(即轴对称流)? 这种流称为 Taylor 旋涡(参看图 4.5). 1923 年，G. I. Taylor 在实验中观察到它并在数学上对它进行了研究，他用的方法是把 Navier-Stokes 方程关于 Couette 流线性化.

有了上面这些准备，我们来找有如下性质的向量 $W = (W^{(r)}, W^{(\theta)}, W^{(z)})$，它满足：(i) 对 $r = r_1$, r_2, W 为 0; (ii) 对 z 的周期为 $2\pi/\alpha_0$，其中 α_0 待定; (iii) 在 z 方向上没有净的质量流动，即

$$\int_{r_1}^{r_2} W^{(z)} r\,dr = 0;$$

(iv) $W^{(r)}$, $W^{(z)}$ 是 z 的偶函数，$W^{(\theta)}$ 是 z 的奇函数. 不难把这

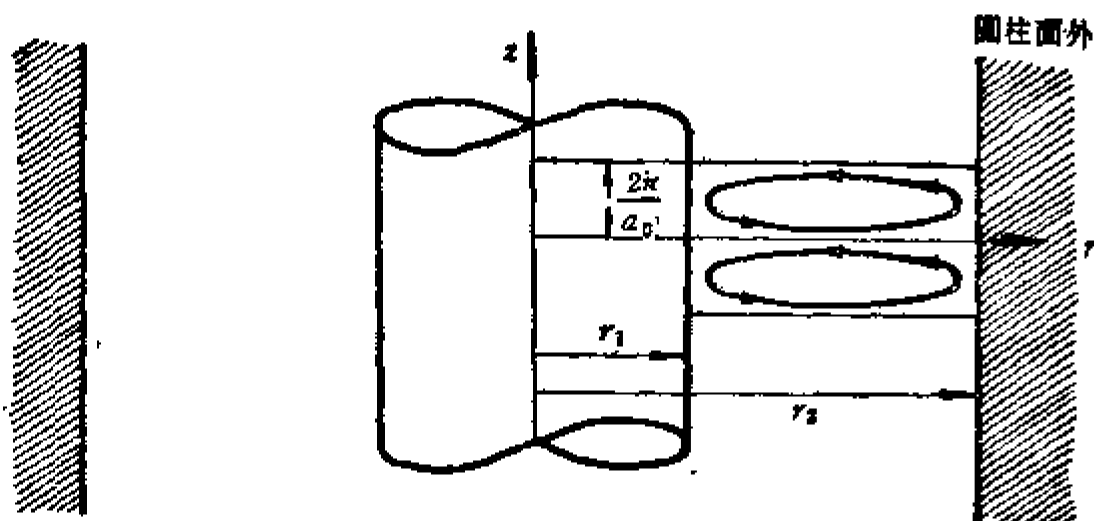


图 4.5 Taylor 旋涡的记号

些条件结合起来构成（4.3.37）解的允许族． 显然这个族 $\mathring{K}_1$ 是 $\mathring{H}_1$ 的闭子空间．为了证明 Taylor 旋涡的存在性，我们证明算子方程（4.3.40）在 $\mathring{K}_1$ 中有歧点存在．

实际上可以证明

(4.3.47) **定理** 如果 $\omega_1 > 0$，$\omega_2 \geq 0$，那么对于上面描述的结构来说，当 $\omega_2 r_2^2 < \omega_1 r_1^2$（即内圆柱面以充分大的角速度旋转）时，Navier-Stokes 方程（4.3.37）有第二类 Taylor 旋涡．

证明： 前面已提到，只需分析 Hilbert 空间 $\mathring{K}_1$ 中线性算子 L 的谱． 于是我们考察方程组

$$
\begin{aligned}
(4.3.48)\qquad & \Delta u^{(r)} - u^{(r)}/r^2 - \partial q/\partial r + \lambda\omega(r)u^{(\theta)} = 0,\\
& \Delta u^{(\theta)} - u^{(\theta)}/r^2 + \lambda g(r)u^{(r)} = 0,\\
& \Delta u^{(z)} - \partial q/\partial z = 0,\\
& (1/r)(\partial/\partial r)(ru^{(r)}) + \partial u^{(z)}/\partial z = 0,\\
& \int_{r_1}^{r_2} u^{(z)} r\,dr = 0,
\end{aligned}
$$

其中 $\omega(r) = a + b/r^2$，$g(r) = -2a$．求这个方程组形若

$$
\begin{aligned}
u &= (u^{(r)},\ u^{(\theta)},\ u^{(z)})\\
&= (u(r)\cos\alpha z,\ v(r)\cos\alpha z,\ w(r)\sin\alpha z)
\end{aligned}
$$

的解．把它们代入（4.3.48），消去 q，由解下面的常微分方程组，我们得到函数 $u(r)$，$v(r)$ 和特征值 λ．

$$(L - \alpha^2 I)^2 u = 2\alpha^2\lambda\omega(r)v,$$

$$(L-\alpha^2 I)v = -\lambda g(r)u,$$
$$u(r_i) = v(r_i) = u_r(r_i) = 0, \quad i = 1,2,$$

其中 $L = d^2/dr^2 + (1/r)d/dr - 1/r^2$. 设 $G_1(r, r')$ 和 $G_2(r, r')$ 是微分算子 $-r(L-\alpha^2 I)$ 和 $r(L-\alpha^2 I)^2$ 加上上面的边界条件的 Green 函数，G_1 和 G_2 关于 r 和 r' 连续，对称. 在 $\mathring{K}_1$ 中求解 (4.3.48) 显然等价于求方程组

(4.3.49) $$\mu = uG_2\omega G_1 gu,$$

(4.3.50) $$v = \mu G_1 g G_2 \omega v, \quad \mu = 2\alpha^2\lambda^2$$

的非平凡解. 如果 μ 是 (4.3.49) 的简单特征值，那么 $\lambda = \mp\sqrt{\mu/2\alpha^2}$ 也是 L 的简单特征值. 最后，注意到 Green 函数 G_1 和 G_2 是"振荡核"(参看 Karlin (1968))，于是，只要 $w(r)$ 和 $g(r)$ 二者都是正的，算子 $B = G_2\omega G_1 g$ 也是. 因此算子方程 (4.3.49) 有一简单特征值序列

$$0 < \mu_1(\alpha) < \mu_2(\alpha) < \cdots < \mu_n(\alpha) < \cdots.$$

所以 $I - \lambda L$ 的谱由特征值 $\lambda_{ik}(\alpha_0) = \pm[\mu_i(k\alpha_0)/2k^2\alpha_0^2]^{1/2}$ 组成. 为确保 (4.3.48) 有简单特征值，我们注意到函数 $\mu_k(\alpha)$ 是 α 的实解析函数. 令 $\Lambda_i(k\alpha) = \lambda_{ik}(\alpha)$，函数 $\Lambda_{ikrs}^{(\alpha)} = \Lambda_i(k\alpha) - \Lambda_r(s\alpha)$ 对 α 实解析(因对 $i \neq r$ 不恒为 0 故不难证明). 于是 $\Lambda_{ikrs}^{(\alpha)}$ 的零点可数，因此集合

$$\Sigma = \{\alpha \mid \Lambda_{ikrs}^{(\alpha)} = 0;\ r, s = 1, 2, \cdots;\ r, s \neq i, k\}$$

也可数. 显然 Σ 的余集中的正数 α 给出 L 的简单特征值，对这样的 α，

$$\dim \ker (I - \lambda(\alpha)L) = 1, \quad \ker (I - \lambda L) \cap \text{Range } (I - \lambda L) = \{0\}.$$

根据 (4.1.12)，这时 $(0, \lambda(\alpha))$ 是 (4.3.40) 的歧点.

在讨论复流形理论中的分歧现象之前（关于复流形在 1.1 节中曾提到过），建议读者先看附录 B 中对复流形分析的简单介绍.

4.3D 紧复流形上复结构的分歧问题

复流形经常决定性地依赖于某些参数，即是说，当确定结构的参数变化时，这些流形相应的**复结构**也发生变化. 当我们限于考虑"平凡"族时(从分歧理论的观点来看)，解析依赖于复参数 ω 的复结构族 M_ω 的每个成员都复解析同胚. 现在考虑这样一个问题：求给定复结构非平凡的变形. 即找一个复结构族 M_ω，它解析地依赖于参数 ω，但是 M_ω 的成员不复解析同胚. 我们用 1.1 节提过的非线性偏微分方程来处理这个问题，这里比较详细地探讨这个问题的某些解析形式(至于更完整的讨论，建议读者看 Koda-

ira 和 Morrow 的专著 (1971)).

我们这样来建立这个问题和非线性偏微分方程的联系. 设 $\mathfrak{M}_0$ 是复 N 维的紧复解析流形, 用 4.1 节的分歧理论构造 $\mathfrak{M}_0$ 上复结构的非平凡族 $\mathfrak{M}_t$, 当 t 充分小时它连续依赖于有限个复参数 t, 并且 $\mathfrak{M}_0$ 对应于 $t=0$. 如果复结构 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 的局部全纯坐标为 $\xi^1, \cdots, \xi^n$, 而 $d\xi^j$ 可以用 $\mathfrak{M}_0$ 适当的局部全纯坐标 $z^1, \cdots, z^n$ 表示为

$$(4.3.51) \qquad d\xi^j = dz^j + \sum_{k=1}^{n} \varphi_{jk}(z^1, \cdots, z^n) d\bar{z}^k,$$

其中的 φ_{jk} 在公共的坐标卡上很小, 那么在同一流形 $\mathfrak{M}$ 上定义的两个复结构 $\mathfrak{M}_0$ 和 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是接近的.

复结构 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 定义一个分裂: 把 $\mathfrak{M}$ 上一个复一阶微分形式分裂成一个 n 维子空间 T 和它的复共轭空间的直接和, 并定义 $\mathfrak{M}$ 的一个殆复结构. 如果 $\widetilde{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上一个满足(4.3.51)的殆复结构, 那么型 $\omega = \Sigma \omega_k d\bar{z}^k$ 是 $\mathfrak{M}_0$ 上有意义的向量 (0, 1) 微分形式. 根据 Newlander-Nirenberg 定理(参看第三章附注 D), 已知当且仅当"可积性条件"

$$(4.3.52) \qquad \bar{\partial}\omega - [\omega, \omega] = 0$$

成立时, 这个殆复结构定义 $\mathfrak{M}$ 上一个复结构. 在 (4.3.52) 中, 对任意向量值 $(0, p)$ 和 $(0, q)$ 形式 ω 和 σ, $[\sigma, \omega]$ 是一个 $(0, p+q)$ 形式, 它的第 i 个分量是

$$[\sigma, \omega] = \frac{1}{2} \sum_i (\sigma^j \wedge \partial_i \omega^i + (-1)^{\sigma'} \omega^j \wedge \partial_i \sigma^i),$$

其中 $\partial_i = \partial/\partial z_i$, $\sigma' = pq + 1$. 于是双线性算子 $[\sigma, \omega]$ 满足如下恒等式

$$(4.3.53) \quad \text{(i)} \quad [\sigma, \omega] = (-1)^{\sigma'}[\omega, \sigma],$$

$$\text{(ii)} \quad \bar{\partial}[\sigma, \omega] = [\bar{\partial}\sigma, \omega] + (-1)^p[\sigma, \bar{\partial}\omega];$$

$$\text{(iii)} \quad [[\sigma, \sigma], \sigma] = 0.$$

在这个意义下, 确定复流形非平凡族的问题可以化成对 (4.3.52) 的研究. 事实上, $\mathfrak{M}$ 上的复结构可以由求解方程 (4.3.52) 来构造. 我们在 $\omega=0$ 附近求 (4.3.52) 的解族. 更清楚些, 下面证明

(取材自 Kuranishi (1965))

(4.3.54) **定理** 设m是向量空间 $H^1(\mathfrak{M}, \Theta)$ 的维数，其中$H^1(\mathfrak{M}, \Theta)$ 是紧复解析流形 $\mathfrak{M}$ 上的第一同调群，系数是在全纯向量场 (Θ) 的芽层中取的。那么，方程 (4.3.52) 在$\omega=0$附近有解族，这个解族依赖于m个复参数，并位于 C^m 中原点附近的一个上同调复解析集上。进一步，如果上同调群 $H^2(\mathfrak{M}, \Theta)$ 为 0，那么 $H^1(\mathfrak{M}, \Theta)$ 中每个元素都有非平凡变形族。

证明：结果由下面一系列步骤得出。考虑扩大了的偏微分方程组

(4.3.55) (i)$\bar\partial\omega=[\omega, \omega]$; (ii) $\bar\partial^T\omega=0$,

以及在$\omega=0$附近的线性化(遵照 Kuranishi)

(4.3.56) (i) $\bar\partial\omega=0$; (ii) $\bar\partial^T\omega=0$

的解，这里算子 $\bar\partial^T$ 是 $\bar\partial$ 的 L_2 共轭。

如附录 B 中所述，(4.3.56) 的解恰是向量 Laplace 方程

(4.3.57) $\Box\omega=0$, 其中 $\Box=\bar\partial^T\bar\partial+\bar\partial\bar\partial^T$

的解。于是从 Hodge 理论推出，(4.3.56) 的解和定义在一个复解析流形 $\mathfrak{M}$ 上的复向量值调和 (0, 1) 形式 $H_{0,1}(\mathfrak{M}, \Theta)$ 重合，这些形式依次对应于 $H^1(\mathfrak{M}, \Theta)$ 的元素。

第一步．变形：为把 4.1 节的分歧理论用于这个问题，我们首先用 Hodge-Kodaira 分解定理(附录 B)改写方程组 (4.3.55)。用$\mathfrak{M}_0$上固定的 Hermite 度量在$\Lambda_{0,p}$上引进一个L_2数量积，对 $\omega, \sigma\in\Lambda_{0,p}$，此数量积记作 $\langle\omega, \sigma\rangle$。那么，根据定义，

$$\langle\bar\partial\sigma, \omega\rangle=\langle\sigma, \bar\partial^T\omega\rangle.$$

设H是 $\Lambda_{0,p}\to H_{0,p}(\mathfrak{M})$ 的投影，$G\Box$ 是 $\Lambda_{0,p}\to[H_{0,p}(\mathfrak{M})]^\perp$ 的投影。那么G和$\bar\partial$, $\bar\partial^T$ 可换。同时如果置 $Q=\bar\partial^TG$，对 $\omega\in\Lambda_{0,p}$ 就得到(因为H和$G\Box$ 是互余投影)

(4.3.58) $$\omega=H\omega+\bar\partial Q\omega+Q\bar\partial\omega$$

或 $$\omega=H\omega+\Box G\omega.$$

于是从 (4.3.55) 推出ω满足

(4.3.59) $$\omega=H\omega+Q[\omega, \omega].$$

这里我们已经用到如下事实：因为 $\bar\partial^T\omega=0$，故

$$\bar\partial Q\omega=\bar\partial G\bar\partial^T\omega=0.$$

反之，我们要证明

(*) 如果 ω 满足 (4.3.59) 且充分小，那么只要 $H[\omega,\omega]=0$，ω 在 $\mathfrak{M}$ 上也满足方程组 (4.3.55)，其中 H 是从 $A_{0,2}$ 到向量值 (0, 2) 调和形式 $H_{0,2}(\mathfrak{M},\Theta)$ 的投影。

作为准备，我们首先注意到，如果 ω 满足 (4.3.59)，那么因为 $\bar\partial^TQ$ 和 $\bar\partial^TH$ 两者都恒为 0，所以 $\bar\partial^T\omega=0$；其次，用 $\bar\partial$ 作用于 (4.3.59)，再用 (4.3.58) 可得

$$\begin{aligned}(4.3.60)\qquad \bar\partial\omega&=\bar\partial Q[\omega,\omega]=\Box G[\omega,\omega]-\bar\partial^T\bar\partial G[\omega,\omega],\\ \bar\partial\omega-[\omega,\omega]&=-H[\omega,\omega]-Q\bar\partial[\omega,\omega].\end{aligned}$$

此外，稍后我们将证明从 $H[\omega,\omega]=0$ 可推出 $Q\bar\partial[\omega,\omega]=0$.

为讨论 (4.3.59) 解的光滑性，考虑定义在 $\mathfrak{M}_0$ 上的半线性椭圆型方程

$$(4.3.61)\qquad \Box\omega-\bar\partial^T[\omega,\omega]=0.$$

首先注意到这个方程的光滑解包含 (4.3.59) 的光滑解，从而后者的正则性可从 (4.3.61) 的性质导出. 事实上，如果 ω 满足 (4.3.59)，那么

$$(4.3.62)\qquad \Box\omega=\Box Q[\omega,\omega]=\Box G\bar\partial^T[\omega,\omega]=\bar\partial^T[\omega,\omega].$$

于是可以断言，如果 ω 是 (4.3.59) 在 Sobolev 空间 W_k (在 k 次可微 (0, 1) 形式上) 中的任一已知解，只要 k 选得足够大，就可从二阶非线性强椭圆方程组的正则性理论导出 ω 的光滑性. 事实上 ω 可以当作 C^∞ 函数(更详细的请看 Kodaira 和 Morrow (1971)).

现在可把方程 (4.3.59) 改写成 W_k 中如下算子方程

$$(4.3.63)\qquad L\omega+B\omega=0,$$

其中

$$L\omega=\omega-H\omega,$$

$$B\omega=Q[\omega,\omega].$$

有界双线性算子 B 满足如下估计：对任意 ω, $\varpi\in H$ 和充分大的 k,

$$\|B(\omega)-B(\varpi)\|_k \leqslant c(\|\omega\|_k, \|\varpi\|_k)\|\omega-\varpi\|_k,$$

其中当 $|x|+|y|\to 0$ 时 $c(x, y)\to 0$. 这个事实是如下例行的但是冗长的估计的推论:

$$\|[\omega, \sigma]\|_{k-1} \leqslant C\|\omega\|_k\|\sigma\|_k;$$

$$\|Q\omega\|_{k+1} \leqslant C\|\omega\|_k,$$

其中 C 是绝对常数, k 选得充分大使得由 Sobolev 不等式(1.4.12)可得出逐点的估计. 此外我们还指出,因为 W_k 是 Hilbert 空间,映射 B 复解析.

第二步. 分歧理论的应用: 把定理 (4.1.5) 用到(4.3.63),我们看到 (4.3.59) 在 $\omega=0$ 附近的解和有限维方程组

(4.3.64) $$PB(\omega_0+g(\omega_0), \omega_0+g(\omega_0))=0$$

的解相重合, 其中 P 是从 W_k 到 $\ker L$ 的投影, ω_0 是 $\ker L$ 中任一元素, g 是 W_k 中 $\ker L\to[\ker L]^{\perp}$ 的复解析映射. 显然, $\ker L$ 和调和 (0, 1) 形式重合,从而 $P=H$. 因为

$$PB=HQ=QH=0,$$

方程 (4.3.64) 自动满足. 于是从(4.3.60)推出,如果

(4.3.65a) $$H[\omega_0+g(\omega_0), \omega_0+g(\omega_0)]=0,$$

(4.3.65b) $$Q\bar{\partial}[\omega_0+g(\omega_0), \omega_0+g(\omega_0)]=0,$$

那么 (4.3.52) 成立.

第三步. 扼要的说明: 最后, 由指出当 ω_0 充分小时, 可由 (4.3.65a) 推出 (4.3.65b) (于是, 为在 $\omega=0$ 附近求解 (4.3.59) 形若 $\omega=\omega_0+g(\omega_0)$ 的解, 方程 (4.3.65a) 就成为唯一的障碍了),从而就把结果串到一起了. 为证此,假定 ω 满足 (4.3.59) 和 (4.3.65a), 由 (4.3.53),

$$\begin{aligned}Q\bar{\partial}[\omega, \omega] &= 2Q[\bar{\partial}\omega, \omega]-2Q[\bar{\partial}Q[\omega, \omega], \omega]\\ &= 2Q\{[[\omega, \omega], \omega]-[Q\bar{\partial}[\omega, \omega], \omega]\}\ (\text{由}(4.3.58))\\ &= -2Q[Q\bar{\partial}[\omega, \omega], \omega].\end{aligned}$$

令 $\sigma=Q\bar{\partial}[\omega, \omega]$, 我们得到 $\sigma=-2Q[\sigma, \omega]$. 因而, 根据 (4.3.63) 下面的不等式,有某绝对常数 $\bar{c}>0$, 使

$$\|\sigma\|_H \leqslant \bar{c}\|\sigma\|_H\|\omega\|_H.$$

故当 $\|\omega\|_H$ 充分小时，$\|\sigma\|_H = 0$，使得对充分小的 ω，由 (4.3.59) 和 (4.3.64) 可推出 (4.3.65b)，这就完备了第一步中 (*) 式的证明。

于是我们得到，如果 $H^2(\mathfrak{M}, \Theta) = 0$，则投影映射 $H \equiv 0$（在 (4.3.65a) 中），对每个 $\omega_0 \in H^1(\mathfrak{M}, \Theta)$，方程 (4.3.52) 在 $\omega = 0$ 附近有一个解族。更一般地，如果 $H^2(\mathfrak{M}, \Theta) \neq 0$，对固定的 ω_0，方程 (4.3.52) 可解的必要且充分条件是方程 (4.3.65a) 成立．可以把后边这个方程组解释为一个依赖于 $m_1 = \dim H^1(\mathfrak{M}, \Theta)$ 个复参数的"解析集"．这是因为，如在 $\ker L$ 中固定一组基 u_i，并令 $\omega_0 = \Sigma t_i u_i$，我们就得到 (4.3.65a) 解析依赖于复变量

$$t = (t_1, \cdots, t_{m_1}).$$

此外还可指出，刚才证明了存在性的变形 $\mathfrak{M}_t$ 在如下意义下不复解析同胚，而且"局部完备"：在 $\mathfrak{M}_0$ 近旁的任何其它变形都等价于上面构造的某个 $\mathfrak{M}_t$．至于这个证明的细节，我们再次建议读者去看 Kodaira 和 Morrow 的专著 (1971)。

4.4 渐近展开和奇异扰动

4.4A 一些启发

设 $f_\varepsilon(x)$ 是从 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的 C^1 映射，连续依赖于小的实参数 ε．在有关求解算子方程 $f_\varepsilon(x) = 0$ 的物理问题中，经常会遇见如下的一般情形：有一个序列 $x_n(\varepsilon) \in X$，($n = 0, 1, 2, \cdots, N$) 使得

(i) 对固定的 n，当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\|f_\varepsilon(x_n(\varepsilon))\| = O(\varepsilon^{n+1})$；

(ii) 对小的 $\varepsilon \neq 0$*)，$f_\varepsilon(x) = 0$ 有解 $\bar{x}(\varepsilon)$，对固定的 n，当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\|\bar{x}(\varepsilon) - x_n(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{n+1})$.

这时，我们称 $x_n(\varepsilon)$ 渐近逼近于解 $\bar{x}(\varepsilon)$．显然，对充分小的 ε 和固定的 n，渐近解 $x_n(\varepsilon)$ 可提供解 $\bar{x}(\varepsilon)$ 的一个近似，具有事先给定的任意精确度．虽然在很多重要的应用中，对固定的

---

*) 指 ε 的绝对值小，下同——译者注．

$\varepsilon \neq 0$，当 $n\to\infty$ 时 $\{\|x_n(\varepsilon)\|\}$ 甚至发散（参看 1.2B 中（1.2.12）的讨论）。因为满足（i）的数值格式是熟知的，所以，我们需要确定那些条件，当给定的序列 $\{x_n(\varepsilon)\}$ 满足（i）时，它们保证渐近逼近具有性质（ii）。

作为这方面的一个具体问题，考虑半线性 Dirichlet 问题

$$(\Pi_\varepsilon)\qquad \varepsilon^2\Delta u + u - g^2(x)u^3 = 0,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

其中 $u(x)$ 定义在 $\mathbb{R}^N$ 中区域 Ω 上，$g(x)$ 是 Ω 上严格正的光滑函数。希望对小的 ε 讨论这个方程的解，特别，我们想检验这样一个有启发性的想法：在 (Π_ε) 中令 $\varepsilon=0$ 得到的单符号解（即 $u_0(x)=\pm 1/g(x)$）应是小 ε 时 (Π_ε) 的解的"零阶"近似。当然在 $\partial\Omega$ 附近，要适当修改它以满足 $\partial\Omega$ 上的 Dirichlet 边界条件。对 $N=1$，$g(x)\equiv 1$，$\Omega=(0,1)$，这个验证是相对容易的。在这时，用 Jacobi 椭圆函数[1] $\mathrm{sn}\,(x,k)$，一个显式解是

$$u_1 = \left(\frac{2k^2}{1+k^2}\right)^{1/2}\mathrm{sn}\,(K(k)x,k),$$

其中 $1/\varepsilon = 2(1+k^2)K(k) > x$。因为

$$\xi = \int_0^v \frac{d\omega}{\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{1-k^2\omega^2}}$$
$$\leqslant \int_0^v \frac{d\omega}{1-\omega^2} = \mathrm{arc\ tanh}\ v,$$

有
$$\tanh\xi \leqslant \mathrm{sn}\,(\xi,k) \leqslant 1,\quad 对\ 0\leqslant\xi\leqslant K(k).$$

令 $\delta(\varepsilon)=(1-k^2)^{1/2}$，当 $\varepsilon\downarrow 0$，$k\uparrow 1$ 时 $\delta\sim 4\exp\,(-1/\alpha\sqrt{2}\,\varepsilon)$，那么

$$\tanh\frac{x}{\varepsilon\sqrt{2-\delta^2}} \leqslant \left(1+\frac{\delta^2}{2(1-\delta^2)}\right)u_1 \leqslant 1,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}.$$

于是当 $\varepsilon\downarrow 0$，x 被 0，1 界定时，函数 u_1 与 1 的差按 ε 的指数变小，而且

---

1) Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{sn}\,(\xi-\xi_0,k)$ 是微分方程 $v_\xi^2=(1-v^2)(1-k^2v^2)$ 的解。$\mathrm{sn}\,(\xi,k)$ 是 ξ 的周期函数，其周期是 $4K(k)$，和 $\sin\xi$ 有同样的对称性，在 $\xi=K(k)$ 处取到极大值 1. 而且，$\mathrm{sn}\,(\xi,0)=\sin\xi$，$K(0)=\frac{\pi}{2}$，当 $k\uparrow 1$ 和 ξ 固定时，

$$\mathrm{sn}\,(\xi,k)\sim\tanh\xi,$$
$$K(k)\sim\ln\{4(1-k^2)^{-\frac{1}{2}}\},$$

$K(k)$ 是 $[0,1)$ 上的递增函数.

$u_1 < 1$. 在 $x=0, 1$ 附近，有宽度为 $O(\varepsilon)$ 的边界层，在其中

$$u_1 \sim \tanh(x/\sqrt{2}\varepsilon).$$

但是当 $N>1$ 时，不可能象刚才那样来验证，从而需要一个定性的讨论．为此，我们在下一节要证明一个一般结果，然后把它用于 (Π_ε).

4.4B 形式渐近展开的合法性

显然，和本章前一部分分歧理论中所谈到的那些问题不同，上面的例子是奇异扰动的例子．这类问题可以归结为：设 $f_\varepsilon(x)$ 是刚才所讲的那类 C^1 映射，有 X 的元素列 $\{x_n(\varepsilon)\}$ $(n=0, 1, 2, \cdots, N)$ 使得 (i) 对固定的 n，当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\|f_\varepsilon(x_n(\varepsilon))\| = O(\varepsilon^{n+1}),$$

但是(ii)线性算子 $f'_\varepsilon(x_n(0))$不必对一切 n 有逆．在什么条件下 $x_n(\varepsilon)$是 $f_\varepsilon(x)=0$ 的解 $x(\varepsilon)$的一个**渐近近似**(在 4.4A 的定义下)?

一般地说，渐近近似 $x_n(\varepsilon)$ 通常可以写成 ε 的幂级数

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varepsilon^i,$$

其中 α_i 可以与 ε 有关，但是 $\|\alpha_i\|$ 有与 ε 无关的界．这种截短的幂级数叫做渐近展开式．我们假定满足下面的条件 (I)—(III)，以便对刚才提出的奇异扰动问题给出一个回答．

(I) 存在与 ε 和 $x, y, \rho \in X$ 无关的常数 M，使 (a) 对任意 $x, y, \|x\|, \|y\| \leqslant R$,

$$\|f_\varepsilon(x+y) - f_\varepsilon(x) - f'_\varepsilon(x)y\| \leqslant M\|y\|^2;$$

(b) 对任意的 $\|\rho\| \leqslant R$,

$$\|(f'_\varepsilon(x) - f'_\varepsilon(y))\rho\| \leqslant M\|x-y\|\|\rho\|.$$

如果映射 $f_\varepsilon(x)$ 有一致有界的二阶导数，这个条件自然满足．

(II) 对一切整数 $n \leqslant N$ (N 是一个给定正整数)，有元素 $x_n(\varepsilon) \in X$，使得

$$x_n(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \varepsilon^i$$

满足 $\|f_\varepsilon(x_n(\varepsilon))\| = O(|\varepsilon|^{n+1})$，其中 $\|\alpha_i\| \leqslant A_i < \infty$，$A_i$(不必

α_i) 与 ε 无关。

(III) 有与 ε 和 ρ 无关的常数 c, $p>0$, 使得对某个 $i\geqslant p$, 对 $\varepsilon>0$, $f_\varepsilon'(x_i)$ 有逆,并且

$$\|f_\varepsilon'(x_i)\rho\|\geqslant c\varepsilon^p\|\rho\|.$$

(附注: 为简便起见,我们用符号 $\|\cdot\|$ 同时记 X 或 Y 中范数)

(4.4.1) 定理 设 $f_\varepsilon(x)$ 是映 X 到 Y 的单参数连续可微映射族,对于小的非负 ε, $f_\varepsilon(x)$ 满足条件 (I)—(III). 那么,当 $N\geqslant 2p$ 和 $n\leqslant N-p$ 时,对每个 n 和 $(0,\varepsilon_0)$ 中的一切 ε (其中 ε_0 是某个小正数) $f_\varepsilon(x)=0$ 有解 $\bar{x}_\varepsilon=x_n(\varepsilon)+\rho_n(\varepsilon)\in X$, 且

$$\|\rho_n(\varepsilon)\|=O(\varepsilon^{n+1}).$$

这个解 $\bar{x}_\varepsilon$ 和 n 无关,而且是 $f_\varepsilon(x)=0$ 的使 $\|x-x_p\|=O(\varepsilon^{p+1})$ 的唯一解。

证明思路: 证明分为如下四步:

(i) 把方程 $f_\varepsilon(x_n+\rho_n)=0$ 的解 ρ 改写成 $\rho_n=T_\varepsilon\rho_n$,其中 T_ε 是映 X 到自身的有界映射。

(ii) 对任意整数 $n\geqslant N-p$ (特别对 $n=N$), 把压缩映射原理用到方程 $\rho=T_\varepsilon\rho$, 得出唯一解 ρ_n, 满足 $\|\rho_n\|=O(\varepsilon^{n-p+1})$.

(iii) 对任意整数 $n\leqslant N-p$, 证明由 (ii) 可得出

$$\rho_n=\rho_N+\sum_{j=n+1}^{N}\alpha_j\varepsilon^j$$

满足 $\rho=T_\varepsilon\rho$, 并且 $\|\rho_n\|=O(\varepsilon^{n+1})$.

(iv) 设 ρ_n, ρ_n' 是 $\rho=T_\varepsilon\rho$ 的任意两个解,两者的阶均为 $O(\varepsilon^{n+1})$ ($n\geqslant p$), 那么它们的差 $\delta_n=\rho_n-\rho_n'$ 满足方程 $\delta=T_\varepsilon(\rho_n+\delta)-T_\varepsilon\rho_n$, 由此推得 $\delta_n=0$.

我们指出,一旦得到 (i)—(iii), 那么,对

$$0\leqslant n\leqslant N-p,\ \bar{x}_\varepsilon=x_n(\varepsilon)+\rho_n$$

和 n 无关. 这是因为,如果对 $0\leqslant m$, $n\leqslant N-p$, $\bar{x}_\varepsilon=x_n(\varepsilon)+\rho_n$,

$$\bar{x}_\varepsilon'=x_m(\varepsilon)+\rho_m,$$

根据 (iii) 给出的 ρ_n 和 ρ_m 的定义,直接推出 $\bar{x}_\varepsilon=\bar{x}_\varepsilon'$.

证明: (i): 首先指出,根据定理条件, 只要 $n\geqslant i$ 和 ε 充分小,就有

$$(4.4.2)\qquad \|f_\varepsilon'(x_n)\rho\| \geqslant \frac{1}{2} c\varepsilon^p \|\rho\|.$$

事实上，

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon'(x_n)\rho\| &\geqslant \|f_\varepsilon'(x_i)\rho\| - \|(f_\varepsilon'(x_n) - f_\varepsilon'(x_i))\rho\| \\ &\geqslant c\varepsilon^p\|\rho\| - M\|x_n - x_i\|\|\rho\| \quad (\text{由 (I), (III)}) \\ &\geqslant \left(c\varepsilon^p - \sum_{j=i+1}^{n} A_j\varepsilon^j\right)\|\rho\| \qquad (\text{由 (II)}) \\ &\geqslant \frac{1}{2} c\varepsilon^p\|\rho\| \quad (\varepsilon\text{充分小})\ (\text{因为 } i \geqslant p).\end{aligned}$$

因而对 $n \geqslant i$，$f_\varepsilon'(x_n)$ 是有逆的线性映射，

$$(4.4.3)\qquad \|f_\varepsilon'^{-1}(x_n)\| \leqslant \frac{2}{c}\varepsilon^{-p}.$$

把尝试解记作 $\bar{x}_\varepsilon = x_n + \rho_n$ 和 $f_\varepsilon(x_n) = -\varepsilon^{n+1}g_n(x, \varepsilon)$，其中 $\|g_n\| \leqslant \hat{c}_n$，$\hat{c}_n$ 是与 ε 无关的常数．我们希望决定出 ρ_n 使

$$f_\varepsilon(x_n + \rho_n) = 0,$$

即解方程

$$(4.4.4)\qquad f_\varepsilon(x_n + \rho_n) - f_\varepsilon(x_n) = \varepsilon^{n+1}g_n.$$

根据条件 (I)，方程 (4.4.4) 可以改写成

$$(4.4.5)\qquad f_\varepsilon'(x_n)\rho_n + R_\varepsilon(x_n, \rho_n) = \varepsilon^{n+1}g_n,$$

其中

$$(4.4.6)\qquad \|R_\varepsilon(x_n, \rho_n)\| \leqslant M\|\rho_n\|^2.$$

由 (4.4.3)，(4.4.5) 可以改写成

$$(4.4.7)\qquad \rho_n = f_\varepsilon'^{-1}(x_n)\{\varepsilon^{n+1}g_n - R_\varepsilon(x_n, \rho_n)\}.$$

(ii)：为给出 (4.4.7) 的一个解 ρ_n，我们把压缩映射原理 (3.1.1) 用于算子

$$T_\varepsilon\rho = f_\varepsilon'^{-1}(x_n)\{\varepsilon^{n+1}g_n - R_\varepsilon(x_n, \rho)\}.$$

这个算子作用在球 $S(\delta, s) = \{\rho \mid \rho \in X, \|\rho\| \leqslant \delta\varepsilon^s\}$ 上，其中 δ，s 待定，以保证 T_ε 映 $S(\delta, s)$ 到自身．为此，对 $\rho \in S(\delta, s)$，我们作出如下的估计：

$$\|\varepsilon^{n+1}f_\varepsilon'^{-1}(x_n)g_n\| = O(\varepsilon^{n+1-p}) \quad (\text{由 (4.4.3)});$$

$$\|f_\varepsilon'^{-1}(x_n)R_\varepsilon(x_n, \rho)\| = O(\varepsilon^{2s-p}) \text{ (由 (4.4.6))}.$$

于是，如果选取 s 使得 (a) $n+1-p \geqslant s$ 和 (b) $2s-p > s$，对充分大的 $\delta(\delta > 2\tilde{c}_n^2/c)$ 和充分小的 ε，T_ε 便映 $S(\delta, \varepsilon)$ 到自身. 由 (a) 和 (b)，可以取 s 满足 $n+1-p \geqslant s > p$. 对任何 $n \geqslant 2p$，令 $s = n-p+1$（因为 $N \geqslant 2p$，这样的 n 存在）。另一方面，对任意 ρ，$\rho' \in S(\delta, n-p+1)$，

$$\|T_\varepsilon\rho - T_\varepsilon\rho'\| \leqslant \|f'^{-1}(x_n)\|\|R_\varepsilon(x_n, \rho) - R_\varepsilon(x_n, \rho')\|.$$

因为

$$(4.4.8) \qquad \begin{aligned} &R_\varepsilon(x_n, \rho) - R_\varepsilon(x_n, \rho') \\ &= f_\varepsilon(x_n+\rho) - f_\varepsilon(x_n+\rho') - f_\varepsilon'(x_n)(\rho-\rho') \\ &= \int_0^1 [f_\varepsilon'(x_n + t\rho + (1-t)\rho') \\ &\quad - f_\varepsilon'(x_n)](\rho-\rho')dt, \end{aligned}$$

应用中值定理和条件 (1) 得出，对某个 $t_0 \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon\rho - T_\varepsilon\rho'\| \leqslant \|f_\varepsilon'^{-1}(x_n)\|\{M(t_0\|\rho\| \\ + (1-t_0)\|\rho'\|)\|\rho-\rho'\|\}.\end{aligned}$$

于是，因为 $\|\rho\|$，$\|\rho'\| \leqslant \delta\varepsilon^{n-p+1}$，根据 (4.4.3)，

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon\rho - T_\varepsilon\rho'\| &\leqslant \left(\frac{1}{2}c\varepsilon^p\right)^{-1}(M\delta\varepsilon^{n-p+1})\|\rho-\rho'\| \\ &\leqslant \frac{2}{c}M\delta\varepsilon^{n-2p+1}\|\rho-\rho'\|,\end{aligned}$$

其中 $n \geqslant 2p$. 选取 $\varepsilon < c/2M\delta$，则 T_ε 是映 $S(\delta, n-p+1)$ 到自身的压缩映射，故有唯一不动点 ρ_n，$\|\rho_n\| = O(\varepsilon^{n-p+1})$. 特别，对 $n = N$，我们有

$$(4.4.9) \qquad \|\rho_N\| = O(\varepsilon^{N-p+1}).$$

(iii): 现在设 $n \leqslant N-p$，我们来找一个 ρ_n 使

$$f(x_n + \rho_n) = 0,$$

且 $\|\rho_n\| = O(\varepsilon^{n+1})$. 事实上，如令

$$\rho_n = \sum_{i=n+1}^{N} \alpha_i\varepsilon^i + \rho_N,$$

那么

$$f(x_n+\rho_n)=f\left(x_n+\sum_{i=n+1}^{N}\alpha_i\varepsilon^i+\rho_N\right)=f(x_N+\rho_N)=0.$$

而且

$$\|\rho_n\|\leqslant\left\|\sum_{i=n+1}^{N}\alpha_i\varepsilon^i\right\|+\|\rho_N\|$$

$$\leqslant\sum_{i=n+1}^{N}A_i\varepsilon^i+O(\varepsilon^{N-p+1})\quad(\text{由 (4.4.9)}),$$

因而 $\|\rho_n\|=O(\varepsilon^{n+1})+O(\varepsilon^{N-p+1})$. 并且当 $n\leqslant N-p$ 时有

(4.4.10) $$\|\rho_n\|=O(\varepsilon^{n+1}).$$

于是对 $n\leqslant N-p$, 我们已经求出方程 (4.4.4) 的解 ρ_n, 并且它满足所希望的估计式 (4.4.10).

(iv): 最后证明, 当 $n\geqslant p$, $\|\rho_n\|=O(\varepsilon^{n+1})$ 时 ρ_n 的唯一性. 对 $n\geqslant 2p$, 这是 T_ε 是压缩映射的直接推论. 对 $n\geqslant p$, 设 (4.4.5) 有两个解 ρ_n 和 $\rho_n+\delta_n$, 它们都满足估计式 (4.4.10). 那么由 (4.4.7) 和 (4.4.8), ρ_n 必然是方程

(4.4.11) $$v=f_\varepsilon'^{-1}(x_n)\int_0^1[f_\varepsilon'(x_n+\rho_n+tv)-f_\varepsilon'(x_n)]v\,dt$$

的解. ρ_n的唯一性是下面引理的推论

(4.4.12) **引理** 当 ε 充分小时,方程 (4.4.11) 有满足

$$\|v\|=O(\varepsilon^{n+1})$$

的唯一解 $v=0$.

证明: 令

$$J(v)=\int_0^1[f_\varepsilon'(x_n+\rho_n+tv)-f'(x_n)]v\,dt.$$

设 v 和 $v+\delta$ 是 (4.4.11) 的解,那么

$$f_\varepsilon'(x_n)\delta=J(v)-J(v+\delta),$$

故由 (III) 可得

(4.4.13) $$\|J(v+\delta)-J(v)\|=\|f_\varepsilon(x_n)\delta\|\geqslant\frac{1}{2}c\varepsilon^p\|\delta\|.$$

另一方面,经过适当重排,令 $y_n = x_n + \rho_n$,

$$
\begin{aligned}
& J(v+\delta)-J(v) \\
& \quad = \int_0^1 \{[f_\varepsilon'(y_n+t(v+\delta))-f_\varepsilon'(y_n+tv)]v \\
& \qquad + [f_\varepsilon'(y_n+t(v+\delta))-f_\varepsilon'(x_n)]\delta\}dt.
\end{aligned}
$$

根据条件(i),

$$
\begin{aligned}
& \|J(v+\delta)-J(v)\| \\
& \quad \leqslant M\|\delta\|\|v\| + M\{\|v\|+\|\delta\|+\|\rho_n\|\}\|\delta\|.
\end{aligned}
$$

设 $\|\delta\| \neq 0$, 结合 (4.4.13) 和上面的式子,我们得到

$$\frac{1}{2}c\varepsilon^p \leqslant M\|v\| + M\{\|v\|+\|\delta\|+\|\rho_n\|\},$$

其中 $\|\rho_n\| = O(\varepsilon^{n+1})$. 这和 $\|v\| = O(\varepsilon^{p+1})$, $\|\delta\| = O(\varepsilon^{p+1})$ 相矛盾,因而 $\delta = 0$, 引理得证.

附注:

当 $X = Y$ 是 Hilbert 空间时,可用下面的条件代替 (III).

(III′) 有 Banach 空间 $X' \supset X$, 使得

(4.4.14) (a) $(f_\varepsilon'(x_l)\rho, \rho) \geqslant c_1\|\rho\|_{X'}^2$,

(b) $(f_\varepsilon'(x_l)\rho, \rho) \geqslant c_2\varepsilon^p\|\rho\|_X^2 - K\|\rho\|_{X'}^2$,

其中 c_1, c_2 和 K 是与 ε 无关的正常数.

事实上,将 (a) 乘以 K, (b) 乘以 c_1, 相加得到

$$(c_1+K)(f_\varepsilon'(x_l)\rho, \rho) \geqslant c_2c_1\varepsilon^p\|\rho\|_X^2,$$

应用 Cauchy-Schwarz 不等式得出

$$\|f_\varepsilon'(x_l)\rho\|_X \geqslant \left(\frac{c_2c_1\varepsilon^p}{c_1+K}\right)\|\rho\|_X.$$

从 Lax-Milgram 定理 (1.3.21) 就得知 $f_\varepsilon'(x_l)$ 有逆.

在 $N = 2p-1$ $(p \geqslant 1)$ 时,有一个与 (4.4.1) 类似的定理成立. 事实上,有兴趣的读者不难证明

(4.4.15) **定理** 除定理 (4.4.1) 的条件外, 还设对所有充分小的正数 ε, 都有 $c' > 4M\|f_\varepsilon(x_N(\varepsilon))\|/\varepsilon^{N+1}$, 那么对 $N = 2p-1$ 和 $n \leqslant p-1$, 定理 (4.4.1) 的结论仍然成立. 但当 $n = p-1$ 时,唯一性的结论可能不成立.

例 (一个序列 $\{x_n(\varepsilon)\}$, 对任意固定的 n, 当 $\varepsilon \to 0$ 时 $\varepsilon^{-n}f_\varepsilon(x_n) \to 0$, 但对任 $\varepsilon \neq 0$, 它不是 $f_\varepsilon(x) = 0$ 的解的近似)

考察问题

$$(4.4.16)\qquad \varepsilon^2 k\frac{d^2x}{dt^2}+x=g(t),\ 当\ t\to\pm\infty\ 时\ x\to 0.$$

其中 $k=\pm 1$，g 是给定的函数，在 $(-\infty,\infty)$ 上 $N+2$ 次连续可微，对 $r=0,1,\cdots,N+2$，当 $t\to\infty$ 时有 $g^{(r)}(t)=O(|t|^{-\frac{1}{2}-\delta})$，$\delta>0$.

对 k 的两个值，似乎都有函数 $x_N(t,\varepsilon)$ 是问题的近似解. 事实上，从 $x_0(t)=g(t)$ 开始的一个显而易见的叠代格式给出

$$(4.4.17)\quad x_{2m}(t,\varepsilon)=g(t)-\varepsilon^2kg''(t)+\cdots+\varepsilon^{2m}(-k)^m g^{(2m)}(t),$$

其中 $0<2m=N$. 由初等的计算可知，

$$(4.4.18)\qquad \varepsilon^2k\frac{d^2x_{2m}}{dt^2}+x_{2m}=g(t)+O(\varepsilon^{2m+2})$$

对 t 一致，当 $t\to\pm\infty$ 时 $x_{2m}\to 0$.

但是，对 $k=1$，这个结果导致错误. 这个微分方程的一般解是可以明确写出来的. 在此基础上，可以直接证明

(a) 对 $k=1$，$\varepsilon\neq 0$ 和 $g=e^{-t^2}$，问题 (4.4.16) 没有解；

(b) 对 $k=-1$，问题有解 $\bar{x}(t,\varepsilon)$，x_{2m} 是 $\bar{x}$ 的渐近逼近.

现在指出这两个结论和定理 (4.4.1) 一致，取 X 和 Y 为 Sobolev 空间 $W_{1,2}(-\infty,\infty)$，它是一个实 Hilbert 空间，内积为

$$(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+xy\right\}dt.$$

那么，$f_\varepsilon(x)$ 和 $f_\varepsilon'(x)$（我们将简记为 f_ε'，因为它和 x 无关）隐式定义为

$$(f_\varepsilon(x),\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\varepsilon^2k\frac{dx}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+x\varphi-g\varphi\right\}dt,\ 对一切\ \varphi\in X,$$

$$(f_\varepsilon'\rho,\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{-\varepsilon^2k\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+\rho\varphi\right\}dt,\ 对一切\ \rho\in X,$$

其中我们用了 Hilbert 空间上线性泛函的 Riesz 表现定理，以及这样一个事实：对固定的 x 和 ρ，积分是对所有 $\varphi\in X$ 定义的有界线性泛函.

马上推出，对 $M=0$ 满足条件 (I)，条件 (II) 也满足（我们可以定义 $x_{2m+1}=x_{2m}$）：用 x_{2m} 的可微性，Schwarz 不等式和 (4.4.18)（其中 O 项实际上是 $\varepsilon^{2m+2}(-k)^m g^{(2m+2)}(t)$，我们得到

$$(4.4.19)\qquad \|f_\varepsilon(x_{2m})\|=\sup_{\|\varphi\|=1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varepsilon^2k\frac{d^2x_{2m}}{dt^2}+x_{2m}-g\right)\varphi dt$$

$$\leqslant\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varepsilon^2k\frac{d^2x_{2m}}{dt^2}+x_{2m}-g\right)^2dt\right\}^{1/2}$$

$$= O(\varepsilon^{m+1}).$$

于是，剩下要证明的是，对 $k=1$ 不满足条件 (III)，而对 $k=-1$，条件 (III) 成立.

为证前者，考虑泛函

(4.4.20) $$x(t, \varepsilon, \mu) = \zeta(\mu t)\cos(t/\varepsilon),$$

其中 μ 是很小的正数，$\zeta(t)$ 定义为：$\zeta(t)\in C^\infty(-\infty, +\infty)$，对 $|t|\leqslant 1$，$\zeta(t)=1$，对 $|t|\geqslant 2$，$\zeta(t)=0$，对一切 t，$0\leqslant\zeta(t)\leqslant 1$. 显然 $x\in X$. 而且，如果我们能证明

(4.4.21) 当 $\mu\to 0$ 时 $\dfrac{\|f_\varepsilon'(x)\|}{\|x\|}\to 0$ （ε 固定，$k=1$），

那么，任何形若(III) 的不等式都不可能成立. 为证 (4.4.21)，我们有（参看 (4.4.19) 的推导）

$$\|f_\varepsilon' x\| \leqslant \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2}+x\right)^2 dt\right\}^{1/2} = O(\mu^{\frac{1}{2}}),$$

由 (4.4.20) 还有

$$\|x\|^2 > \int_{-1/\mu}^{1/\mu}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^2\right\}dt$$

$$= \int_{-1/\mu}^{1/\mu}\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\sin\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 + \cos^2\frac{t}{\varepsilon}\right\}dt$$

$$\geqslant \frac{2}{\mu}, \quad 对\ \varepsilon\leqslant 1.$$

于是 (4.4.21) 得证.

为证 $k=-1$ 时 (III) 成立，我们改用条件 (III′). 取

$$X' = L_2(-\infty, \infty),$$

对一切 $\rho\in X$ 有

$$(f_0\rho, \rho)\geqslant\|\rho\|_{X'}^2$$

和 $$(f_\varepsilon\rho, \rho)\geqslant\varepsilon^2\|\rho\|_X^2 - \|\rho\|_{X'}^2.$$

4.4C 对半线性 Dirichlet 问题 (Π_ε) 的应用

为说明定理 (4.4.1) 的应用，我们考虑前面提到过的半线性 Dirichlet 问题 (Π_ε). 可以建立下面的结论：

(A) 对充分小的 ε，在一个沿 $\partial\Omega$ 宽度为 $O(\varepsilon)$ 的窄"边界层"外，问题 (Π_ε) 有唯一光滑解 $u(x, \varepsilon)$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，

$$u(x,\ \varepsilon) \to \frac{1}{g(x)}.$$

这个结果是这样证明的：(B) 对任意整数 M，构造一个近似解

$$U_M(x,\ \varepsilon) = \sum_{m=0}^{M} \varepsilon^m u_m(x,\ \varepsilon),$$

使得在 $\bar{\Omega}$ 上 $u(x,\ \varepsilon) - U_M(x,\ \varepsilon)$ 一致为 $O(\varepsilon^{M+1})$. 然后证明，对 $M=0$，当 ε 充分小时，这个展开式的确渐近于 (Π_ε) 的真解，再考察 $U_0(x,\ \varepsilon)$ 在 ε 很小时的性状*). 为用 (4.4.1)，对 $M \geqslant 1$ 构造近似解 $U_M(x,\ \varepsilon)$，它满足

(4.4.22) $K_\varepsilon(U_M) = \varepsilon^2 \Delta U_M + U_M - g^2(x) U_M^3 = O(\varepsilon^{M+1})$,

在 Ω 中一致成立，

$$U_M|_{\partial\Omega} = 0.$$

为说明构造这个逼近的指导思想，我们讲一下建立初次近似 $U_0(x,\ \varepsilon)$ 的步骤.

(a) 在微分方程 $K_\varepsilon u = 0$ 中略去 $\varepsilon^2 \Delta u$，求得近似解

$$v_0(x) = 1/g(x),$$

期望在与 $\partial\Omega$ 有一定距离的 x 处，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 时 $v_0(x)$ 与真解 u 相差 $O(\varepsilon^2)$.

(b) 为刻画边界 $\partial\Omega$ 附近的 u，首先对 $\partial\Omega$ 的某个固定的邻域 $\Omega_* = \{x | 0 < t < t_*\}$ 中的点赋予标号 $(s,\ t)$，这里

$$s = s(x_0)\ \ (x_0 \in \partial\Omega)$$

记 $\partial\Omega$ 在点 x_0 的法向，t 表示离 $\partial\Omega$ 的距离，如图 4.6 所示. 为计算方便起见，用一个 $(N-1)$ 维曲面坐标 σ 来代替 s. 作**拉伸变换** $t = \varepsilon\tau$，然后找一个函数 $w_0(s,\ \tau)$，在"边界层"内它逼近 u；说得更明确一点，当 $\varepsilon \downarrow 0$ 和 τ 固定时(故 $t \downarrow 0$)，$u - w_0$ 为 $O(\varepsilon)$ 阶. 用 s，τ 和 ε 表示算子 K_ε，并仅保留 K_ε 中的主项，我们得到边界层问题

---

*) 这段话不太清楚，(A)的证明主要是先构造一个渐近近似解 $\{U_M\}$，然后用定理 (4.4.1)——译注.

(4.4.23a) $$\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2}+w_0-g_*^2(s,\ 0)w_0^3=0,$$

(4.4.23b) $w_0|_{\tau=0}=0,\quad w_0\to\dfrac{1}{g_*(s,\ 0)}$ （当 $\tau\uparrow\infty$）。

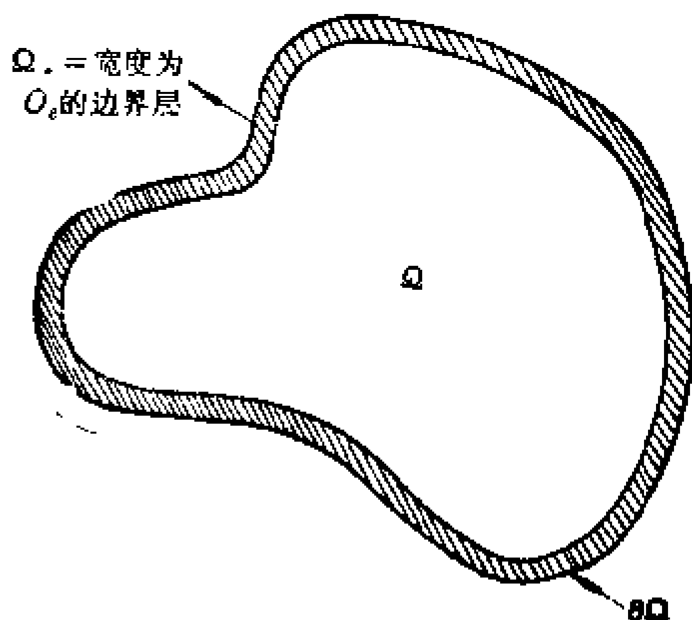


图 4.6 (π_ε) 的边界层现象之图示.

其中 $g_*(s,\ t)=g(x)$. $\tau\uparrow\infty$时的条件是由当 $t\downarrow 0$ 时

$$v_0(x)\to\frac{1}{g_*(s,\ 0)}$$

引出的"匹配条件". 问题

(4.4.23)（以 s 为参数）的解是 $w_0=\dfrac{1}{g_*(s,\ 0)}\tanh\dfrac{\tau}{\sqrt{2}}$.

(c) 因为 $\lim\limits_{t\downarrow 0}v_0(x)=\lim\limits_{\tau\uparrow\infty}w_0(s,\ \tau)$（是通常的"渐近匹配原则"的特殊情形），现在可以引用构造"复合展开"的首项的办法. 在 $\bar{\Omega}_*$ 的 $0\leqslant t\leqslant t_*$ 上，定义

(4.4.24) $$U_0^*(x,\ \varepsilon)=v_0(x)+w_0\left(s,\ \frac{t}{\varepsilon}\right)-\lim_{\tau\to\infty}w_0$$

$$=\frac{1}{g(x)}+\frac{1}{g_*(s,\ 0)}\left(\tanh\frac{t}{\sqrt{2}\varepsilon}-1\right).$$

为克服一个很平凡的困难，即在 $\Omega-\Omega_*$ 上 t 不唯一确定，我们指

出，对固定的 $t>0$，当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时，$\tanh(t/\sqrt{2}\varepsilon)-1$ 可非常小。引进软化子 $\zeta(x)\in C^\infty(\Omega)$，在 $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2}t_*$ 上，

$$\zeta(x)=1,$$

在 $\Omega-\Omega_*$ 上 $\zeta(x)=0$，在 $\bar{\Omega}$ 上 $0\leqslant\zeta\leqslant 1$。定义

(4.4.25) $$U_0(x,\varepsilon)=\frac{1}{g(x)}+\frac{\zeta(x)}{g_*(s,0)}\left(\tanh\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}-1\right),$$

不难验证，它满足$M=0$ 时的 (4.4.22)。这是因为 (4.4.24) 中最后一项的双重作用：在边界层内它消去 v_0，在离 $\partial\Omega$ 有界的点处消去 w_0 到最低阶。在由 $t=\theta(\varepsilon)$ 定义的中间区域内，U_0 比无论 v_0 或 w_0 都更精确，其中 θ 是任意的这种函数：当 $\varepsilon\downarrow 0$ 时

$$t=\theta(\varepsilon)\downarrow 0,\quad \tau=\varepsilon^{-1}\theta(\varepsilon)\uparrow\infty.$$

为了得出更高的近似 U_M，$M>1$，需要把 (4.4.24) 中的函数分别换成有限和级数

$$\sum_{m=0}^{M}\varepsilon^m v_m(x),\quad \sum_{\mu=0}^{M}\varepsilon^\mu w_\mu(s,\tau)\text{ 和 }\sum_{\mu=0}^{M}\varepsilon^\mu\sum_{n=0}^{\mu}w_{\mu,n}(s)\tau^n,$$

通过精心设计的递推关系定义 v_m，w_μ，$w_{\mu,n}$ 以完成 (4.4.22) 的证明。

现在假定近似解 $U_M(x,\varepsilon)$ 已经被构造出来，我们用这样的方法，使得定理 (4.4.1) 中的条件 (I)—(III) 可以得到验证，把 Dirichlet 问题化成从适当 Banach 空间X到Y中的算子方程

$$f(x,\varepsilon)=0.$$

2.2D 节所讲的对偶过程指出(至少对 $N\leqslant 3$)，(Π_ε) 的解可以看作算子方程

$$L_\varepsilon u+Nu=0$$

的广义解，其中 L_ε 和N是从 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 到自身的有界映射，分别由公式

$$(L_\varepsilon u,\ v)_{1,2}=\int_\Omega(\varepsilon^2\nabla u\cdot\nabla\phi-u\cdot\phi),$$

$$(Nu,\ v)_{1,2}=\int_\Omega g^2(x)u^3\phi$$

隐含定义.

如果定义 $f_\varepsilon(u)=L_\varepsilon u+Nu$，那么不难验证 (I) 和 (II). 因为 $f_\varepsilon(x)$ 的二阶导数在任何球 $\|u\|_{1,2}\leqslant R$ 中一致有界，根据 (4.4.22)，

$$\|f_\varepsilon(U_M(x,\varepsilon))\|_{1,2}=\sup_{\|v\|_{1,2}\leqslant 1}(L_\varepsilon U_M+NU_M,v)$$

$$=\sup_{\|v\|_{1,2}\leqslant 1}\left|\int_\Omega k_\varepsilon(U_M)v\right|$$

$$\leqslant O(\varepsilon^{M+1}).$$

但是条件 (III) 的验证不那么容易. 事实上，把 $\mathring{w}_{1,2}(\Omega)$ 选作 X 的动机就是因为这时积分估计式比逐点估计式容易建立. 和 $M=0$ 的情形一样，假定逼近解为

$$(4.4.26)\quad U_M(x,\varepsilon)=\frac{1}{g(x)}\left\{\zeta(x)\tanh\frac{\tau}{\sqrt{2}}+[1-\zeta(x)]\right\}\times\{1+O(\varepsilon)\}.$$

令 $f'_\varepsilon(U_M)=\mathfrak{L}_{M,\varepsilon}$，并证明下面引理中的估计式.

(4.4.27) **引理** 存在正数 $\nu(M)$ 和 $\varepsilon_0(M)$，使得对任意 $\rho\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 和 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，

$$(4.4.28)\qquad\langle\mathfrak{L}_{M,\varepsilon}\rho,\rho\rangle=\int_\Omega\{\varepsilon^2(\nabla\rho)^2+(3g^2U_M^2-1)\rho^2\}$$

$$\geqslant\varepsilon^2\nu^2\int_\Omega(\nabla\rho)^2,$$

其中 ν 和 ε,ρ 无关.

证明: 证明中的基本步骤首先是改进了的 Poincaré 不等式，其次是对函数 U_M 的简单逼近.

(i) 把沿 $\partial\Omega$ 的内法线的线积分记作 ρ，应用 Schwarz 不等式有

$$\rho^2=\left\{\int_0^t\rho_{t'}(s,t')dt'\right\}^2\leqslant t\int_0^t\rho_{t'}^2dt'.$$

在由 $0\leqslant t\leqslant l$ 决定的子集 $\bar{\Omega}_*$ 上积分，得到

$$(4.4.29)\qquad\int_{t\leqslant l}\rho^2\leqslant H(l)\frac{l^2}{2}\int_{t\leqslant l}\rho_t^2,$$

其中 $H(l)$ 是由 $\partial\Omega$ 的曲率产生的连续函数，当 $l\to 0$ 时 $H(l)\to 1$.

(ii) 定义

$$h_M(x, \varepsilon) = 3 - 3g^2U_M^2.$$

可以证明(利用（4.4.25）前定义的软化子 $\zeta(x)$)

$$\frac{1}{3}h_M - \zeta(x)\mathrm{sech}^2\frac{\tau}{\sqrt{2}} = \zeta(1-\zeta)\left(1 - \tanh\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)^2 + O(\varepsilon).$$

而且,在使 $\zeta(1-\zeta)\neq 0$ 的点 t 上 $(t_*/2 < t < t_*)$,函数 $1-\tanh\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)$ 在 $\varepsilon\downarrow 0$ 时按指数递减. 于是

$$(4.4.30)\quad h_M(x, \varepsilon) = 3\zeta(x)\mathrm{sech}^2\frac{\tau}{\sqrt{2}} + r_M, \quad |r_M| \leqslant k\varepsilon,$$

其中 $k = k(M)$ 是与 x 和 ε 无关的常数.

(iii) 现在来估计泛函

$$\langle \mathfrak{L}_{M,\varepsilon}\rho, \rho\rangle = \int_\Omega \{\varepsilon^2(\nabla\rho)^2 + (2 - h_M)\rho^2\}.$$

根据（4.4.29),对 $l = a\varepsilon$（其中 a 待定),

$$\int_L \varepsilon^2(\nabla\rho)^2 \geqslant \frac{2}{a^2H(a\varepsilon)}\int_{t\leqslant a\varepsilon}\rho^2,$$

由（4.4.30),

$$-\int_\Omega h_M\rho^2 \geqslant -3\int_{t\leqslant a\varepsilon}\rho^2 - 3\mathrm{sech}\frac{a}{\sqrt{2}}\int_{t\geqslant a\varepsilon}\rho^2 - k\varepsilon\int_\Omega\rho^2,$$

其中 $t\geqslant a\varepsilon$ 是 $t < a\varepsilon$ 在整个区域 Ω 中的余集(虽然在 $\Omega-\Omega_*$ 上 t 不唯一确定). 那么

$$\langle \mathfrak{L}_{M,\varepsilon}\rho, \rho\rangle \geqslant \left(\frac{2}{a^2H(a\varepsilon)} - 1 - k\varepsilon\right)\int_{t\leqslant a\varepsilon}\rho^2 + \left(2 - 3\mathrm{sech}^2\frac{a}{\sqrt{2}} - k\varepsilon\right)\int_{t\geqslant a\varepsilon}\rho^2.$$

当 $a<\sqrt{2}$ 时, $\frac{2}{a^2}H(0)-1>0$, 当 $a>\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 时, $2-3\mathrm{sech}^2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)>0$.

取

$$a = \frac{5\sqrt{2}}{6} = a_0,$$

再取 ε_0 那样小,使得当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ 时,

$$\min\left\{\frac{2}{a_0^2H(a_0\varepsilon)} - 1,\ 2 - 3\mathrm{sech}^2\frac{a_0}{\sqrt{2}}\right\} - k\varepsilon_0 \geqslant \mu^2 > 0,$$

其中 $\mu(M)$ 和 ε 无关. 那么

(4.4.31) $\langle \mathfrak{L}_{M,\varepsilon}\rho, \rho\rangle \geqslant \mu^2\int_\Omega \rho^2$, 对 $0<\varepsilon\leqslant \varepsilon_0$.

(iv) 因为从 (4.4.30) 推出 $2-h_M\geqslant -1-k\varepsilon$, 我们还有 (对 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$)

$$\langle \mathfrak{L}_{M,\varepsilon}\rho, \rho\rangle = \int_\Omega \{\varepsilon^2(\nabla\rho)^2+(2-h_M)\rho^2\}$$

$$\geqslant \varepsilon^2\int_\Omega (\nabla\rho)^2-(1+k\varepsilon_0)\int_\Omega \rho^2.$$

用 $\mu^2/(1+k\varepsilon_0)$ 乘以上式再和 (4.4.31) 相加,并定义

$$\nu^2 = \mu^2/(1+k\varepsilon_0+\mu^2),$$

我们就得到结论 (4.4.27).

于是定理 (4.4.1) 的条件全部满足. 因为在$M=2$时近似解 $U_M(x, \varepsilon)$ 可以算出,在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 的范数下, $U_0(x, \varepsilon)$ 是真解的一个渐近逼近. 但是还留下一个问题, 即在逐点的意义下验证 (A). 只要我们能证明 $U_0(x, \varepsilon)$ 是在 $C(\bar{\Omega})$ 的范数下的渐近逼近,就可以直接从 (4.4.25) 中讨论的 $U_0(x, \varepsilon)$ 的形式得到(A). 对 $N=1$, 这个事实从 Sobolev 不等式 (1.4.1) 得出. 事实上,

$$\|v_0(x, \varepsilon)\|_{C(\Omega)}\leqslant R\|U_0(x, \varepsilon)\|_{1,2},$$

其中常数R和ε无关. 对 $N=2$, 3, 结果从 (4.4.1) 证明的细节以及 1.5 节中线性椭圆型方程的 L_2 正则性定理得出. 事实上,用定理 (4.4.1) 的记号和结果,

(4.4.32) $$u(x, \varepsilon)=U_0+\sum_{i=1}^{3}U_i\varepsilon^i+\rho_4,$$

其中 $\|\rho_4\|_{1,2}=O(\varepsilon^3)$. L_2 正则性定理指出,对$N=3$, ρ_4 是线性方程 $\varepsilon^2\Delta u=f(\rho_4)$ 的广义解,其中 $f\in L_2(\Omega)$ 且 $\|f\|_{0,2}=O(\varepsilon^3)$. 于是 $\|\rho_4\|_{2,2}=\varepsilon^{-2}\|f(\rho_4)\|_{0,2}=O(\varepsilon)$. 由 Sobolev 嵌入定理,得出估计 $\|\rho_4\|_{C(\Omega)}=O(\varepsilon)$, 于是从 (4.4.32) 推出

$$\|u(x, \varepsilon)-U_0\|=O(\varepsilon).$$

附注:

当$N>3$和非线性增长超过u^3时,有一个与(A)完全相似的结论,可以参看本章末的附注和证明的思路.

4.5 古典数学物理中的某些奇异扰动问题

在数学物理中的很多问题 P_ε 可以这样处理：让 P_ε 光滑地依赖于一个小的实参数 ε，当 $\varepsilon=0$ 时 P_0 的解 x_0 可以明显得出，然后证明，当从 P_ε 过渡到 P_0 发生了小的改变时，对 P_ε 的解 $x(\varepsilon)$ 只产生小的影响，亦即当 $\varepsilon\to 0$ 时，问题 P_ε 有解 $x(\varepsilon)=x_0+o(1)$. 在一大类由方程 $f_\varepsilon(x)=0$ 定义的重要问题中，实际发生的是

$$f_\varepsilon(x)=0$$

有一个形式解

$$x(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i\varepsilon^i,$$

其中 $x(0)=\alpha_0$ 满足方程 $f_0(x)=0$. 但是对 $\varepsilon\neq 0$，由于系数 α_i 的值不趋于 0，这样一个级数实际上常常发散. 不过，人们期望，如果 $x(\varepsilon)$ 被截成

$$x_n(\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\varepsilon^i,$$

那么 $x_n(\varepsilon)$ 将渐近(在 4.4A 节的意义下) 于 $f_\varepsilon(x)=0$ 的真解 $\tilde{x}(\varepsilon)$. 在这一节我们要举出三个这类问题，并在定理 (4.4.1) 的基础上，证明这些问题中的形式解的渐近性质. 在下面考虑的所有情形里，我们注意到，都由 (4.4.1) 把问题归结为寻求某些线性算子范数的精确的界.

4.5A 瞬时力作用下非谐振荡的扰动

考虑常微分方程

(4.5.1) $\ddot{x}+x=f(x)+\varepsilon g(t)$，在 $x=0$ 处 $f(x)=O(|x|^2)$，

其中 $g(t)$ 是 $(-\infty,\ \infty)$ 上连续函数，在∞处按指数衰减，ε 是小参数. 我们讨论(4.5.1)零初值条件 Cauchy 问题的解 $x(t)$，特别有兴趣的是 $x(t)$ 在 $t\to\infty$时的性状. 一般讲，当 $t\to\infty$时此解不趋于 0，至少对小的 $|\varepsilon|$ 是如此. 事实上，可以证明如下的结论

(4.5.2) 对于充分小的 ε 和在 $x=0$ 附近实解析的 $f(x)$，当 $t\to\infty$

时，(在 $x=0$ 附近)解 $x(t)$ 渐近趋于方程 $\ddot{x}+x=f(x)$ 的周期解 $u(t)$.

我们不准备给出这个结果的证明，也许在 4.4A 节中讨论它更为恰当．如果采用强级数法，用 ε 的幂级数

$$x(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(t)\varepsilon^n$$

去解 (4.5.1)，那么将发现，在区间 $[0,\infty)$ 上系数 $a_n(t)$ 是 t 的无界函数．另一个成功的方法是：把(4.5.1)可能的解 $x(t)$ 表成 $x(t)=u(t,\lambda,b)+y(t)$，其中 $u(t,\lambda,b)$ 是 (4.5.1) 周期为 λ，相位为 b 的解，而 $y(t)$ 满足 $t\to\infty$ 时 $y(t)\to 0$．接着把周期 $\lambda(\varepsilon)$，相位 $b(\varepsilon)$ 和余量 $y(t)$ 形式地渐近展开，然后据 (4.4.1) 证实这些渐近展开式．事实上，这正是 Ter-Krikorov (1969) 的文章中所采用的方法．有兴趣的读者可以在那里找到详尽的证明．

4.5B 非线性弹性理论中的薄膜逼近

决定弹性薄板平衡状态的偏微分方程自然包含一个小参数 ε^4，即板的厚度(参看(1.1.12))．在给定的体力下，对决定平衡状态的问题作薄膜逼近在于，在上面的方程中令 $\varepsilon^2=0$ 并求这个退化系统的解．更清楚些，设 Ω 是 R^2 中一个有界域，边界为 $\partial\Omega$，那么，定义在 Ω 上的偏微分方程可以写成如下形式

$$(4.5.3)\qquad \Delta^2F+\frac{1}{2}[w,w]=0,$$
$$\varepsilon^2\Delta^2w-[w,F]=g,$$

其中双线性型 $[f,g]=f_{xx}g_{yy}+f_{yy}g_{xx}-2f_{xy}g_{xy}$．至于物理量 F，w 和 g，以前已经解释过了．为简单起见，我们假定板是夹紧的，于是所给问题由边界条件

$$(4.5.4)\qquad D^\alpha w\big|_{\partial\Omega}=0,\qquad 对\ |\alpha|\leqslant 1,$$
$$F_{\tau\tau}\big|_{\partial\Omega}=T,\quad F_{\nu\tau}\big|_{\partial\Omega}=S$$

决定．

我们在6.2节证明这个方程组总有解，这个解使与该物理问题相应的位能取极小值．现在考虑这样一个问题：把解 $(w_\varepsilon, F_\varepsilon)$ 和如下退化方程组 (Π_0) 的解进行比较．在(4.5.3)中令 $\varepsilon = 0$，再加上边界条件

(4.5.5) $$w\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad F_{\tau\tau}\Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad 和 \quad F_{n\tau}\Big|_{\partial\Omega} = S$$

就得到 (Π_0)．这个问题的主要困难之一是方程组(4.5.3)—(4.5.4)解的非唯一性．不过我们将讨论一种情形，即 (Π_0) 的解是(4.5.3)一类特殊的解的渐近逼近的首项．薄膜逼近的渐近性质是下列事实的推论：当 $|\alpha| = 1$ 时边界条件 $D^\alpha w\Big|_{\partial\Omega} = 0$ 被略去了．事实上，可以期望(和4.4C中的例子 (Π_ε) 完全一样)，当 $\varepsilon \to 0$ 时，除了在边界 $\partial\Omega$ 附近，(4.5.3)—(4.5.4)的解将一致趋近于(4.5.3)—(4.5.4)当 $\varepsilon = 0$ 时的解．而在 $\partial\Omega$ 附近，则就显示出边界效应(或边界层)，也就是说，在 $\partial\Omega$ 附近，函数 w 的梯度或 $D^\alpha w$ 急剧改变．

为检验薄膜逼近，已知必须限制作用在弹性体上的力．为此，我们只考虑那样的方程组，它的退化方程组 (Π_0) 有正解 (w_0, F_0)，也就是说，使 $F_{0,xx}$ 和 $[F_0, F_0]$ 在 Ω 中大于零的解．不难证明(如果存在的话)，这样的正解唯一．事实上，用第III部分的方法可以证明，对很大一类弹性问题这种解都存在．更重要的是已有如下的结果：

(4.5.6) **定理**　假定方程组(4.5.3)—(4.5.5)有正解 (w_0, F_0)，那么对充分小的 $\varepsilon > 0$，方程组(4.5.3)—(4.5.4)有唯一正解 $(w_\varepsilon, F_\varepsilon)$，使得除了 Ω 中 $\partial\Omega$ 附近的一个窄区域外，$(w_\varepsilon, F_\varepsilon) \to (w_0, F_0)$ 一致成立．

可以完全平行于4.4C节的(A)写出(4.5.6)的证明．首先，构造函数 $w_m(x, \varepsilon)$ 和 $F_m(x, \varepsilon)$ 形式上的渐近展开式，使得它们严格满足边界条件(4.5.4)，而且除了一个 $O(\varepsilon^{m+1})$ 阶的项外就满足方程．然后，和(2.5.7)中完全一样，把(4.5.3)—(4.5.4)的求解化为解 Sobolev 空间 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中的一个算子方程

$$f_\varepsilon(x) = 0,$$

它的解记作 $x = (w, F)$. 由 Sobolev 不等式推出，二阶导数 $f_{\varepsilon xx}(x)$ 在集合 $\{x \mid \|x\| = (\|w\|_{2,2}^2 + \|F\|_{2,2}^2)^{1/2} \leqslant R\}$ 上一致有界，于是，为用定理（4.4.1），只剩下证明 $\|f'_\varepsilon(x_k)\|$ 有下界．为此注意到，在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中算子 $f_\varepsilon(x)$ 可以写成$\left(F_* + \frac{1}{2}C(w, w),\right.$ $\left.\varepsilon^2 w - C(w, F)\right)$，其中 $F_* = F(x, y) - g$，g 是满足 $\Delta^2 g = 0$ 和（4.5.4）后两个边界条件的唯一函数．于是当 $y = (\bar{w}, \bar{F})$ 时，

$$f'_\varepsilon(x)y = (\bar{F} + C(w, \bar{w}), \varepsilon^2\bar{w} - C(\bar{w}, F) - C(w, \bar{F})),$$

因而

$$(f'_\varepsilon(x_k)y, y) = \int_\Omega \{|\Delta F|^2 + \varepsilon^2|\Delta w|^2\}$$
$$+ \int_\Omega \{F_{k,xx}w_y^2 + F_{k,yy}w_x^2 - 2F_{k,xy}w_x w_y\}.$$

由 x_0 的正性，$(f'_\varepsilon(x_0)y, y) \geqslant \varepsilon^2\|y\|^2$. 事实上，有一个与 ε 无关的正常数 c，使上面最后一个积分大于 $c\int_\Omega |\nabla w|^2$. 进一步，由逼近解 F_k 的构成，对 $|\alpha| = 2$ 和 $k \geqslant 0$,

$$\sup_\Omega |D^\alpha(F_k - F_0)| = O(|\varepsilon|).$$

于是当 $|\varepsilon|$ 充分小时，

$$(f'_\varepsilon(x_k)y, y) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2\|y\|_{2,2}^2.$$

因而和（4.4.14）后面一段的论证一样，由 Lax-Milgram 定理 $f'_\varepsilon(x_k)$ 有逆，且

$$\|f'_\varepsilon(x_k)\| \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

于是，只要注意到 (w_0, F_0) 是 F_k 和 w_k 的渐近展开式中的首项，（4.4.1）的条件就全部满足，从而定理（4.5.6）得证．更详细的可参看 Srubshchik (1964).

4.5C 粘性流体中受扰动的 Jeffrey-Hamel 流

描述两个斜交平面（交角为 2α）间粘性不可压流体稳态平面径向流的 Navier-Stokes 方程可精确求解．这些解称作 Jeffrey-Hamel 流 $G(\alpha, R)$ 对于 Reynolds 数 R 的一切值它都存在，一般说来，对给定的参数（α 和 R）解不唯一． 大多数 Jeffrey-Hamel 流描述了沿着截面流进与流出的混合． 于是用下面的观点来研究这些流动的几何条件的扰动是有意义的，即证明在特殊的 Jeffrey-Hamel 流当中存在一个流，它是扰动问题的解的首次逼近．如 L. E. Fraenkel 所观察到的，二维对称水道问题是一个有趣的扰动问题．这时，相对于峡道 C 的局部宽度来说，峡道壁的曲率半径一致地大．Fraenkel 证明了，存在唯一的 Jeffrey-Hamel 流 $G_0(\alpha, R)$，满足在 $\alpha=0$ 附近解析地依赖于 α． 借助于峡道壁小的曲率 ε，他还构造了 Navier-Stokes 方程在 C 中的一个形式解[1]

$$u(x, \varepsilon)=G_0+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\phi_n.$$

对于物理参数 R, α 的适当的值，这个形式解描述了分离现象．即流的速度场划分为不同的区域，向前流的水流和向后倒流的水流由零速度曲线分开．这曲线本身与峡道壁是分离的．

这个方向上一个重要的数学问题是（它可用 (4.4.1) 的方法解决）把形式解 $u(x, \varepsilon)$ 当作物理问题真解的近似的合理性． 在 $\varepsilon\neq 0$ 时，不能期望上面提到的形式解 $u(x, \varepsilon)$ 收敛．这是因为，在 $u(x, \varepsilon)$ 的构成中出现的某些函数的反复微分使 ε^n 的系数大致和 $n!$ 同阶．于是，这时自然想证明在 4.4A 一节的意义下截短的形式解是 Navier-Stokes 方程真解的一个渐近近似．

为了从数学上描述这个问题，我们这样进行：设管道 C 是窄带 $\Omega=\mathbf{R}^1\times(-1, 1)$ 在保角映射 $z=z(w, \varepsilon)$ 下的像，其中

1) 在 Jeffrey-Hamel 问题中，α 是固定参数，但在扰动问题中，它是变化缓慢的函数——原注．

$z(w, \varepsilon)$ 由方程 $dz/dw = he^{i\theta}$ 和定义

$$\alpha(\varepsilon, w) = (d/dw)(\log(dz/dw))$$

确定．于是对 $z = x + iy$，$w = u + iv$，$|dz| = h|dw|$，并且 $\alpha(\varepsilon w)$ 近似于上管道壁和 x 轴构成的角． 那么，Navier-Stokes 方程的“涡度形式”就可以写成

$$\left[\Delta + R\left(\phi_u \frac{\partial}{\partial v} + \phi_v \frac{\partial}{\partial u}\right)\right]\frac{1}{h^2}\Delta\phi = 0, \tag{4.5.7}$$

其中 ϕ 与流函数成比例，Δ 是对 (u, v) 的 Laplace 算子． 令 $h_u = hk$ 和 $h_v = h\lambda$，利用 $\Delta(\log h) = 0$，(4.5.7) 可以改写成

$$\begin{aligned}(4.5.8)\quad f_\varepsilon(\phi) \equiv &\left\{\Delta - 4\left(k\frac{\partial}{\partial u} + \lambda\frac{\partial}{\partial v}\right) + 4(k^2 + \lambda^2)\right\}\Delta\phi \\ &- R\left\{\phi_v\left(\frac{\partial}{\partial u} - 2k\right) - \phi_u\left(\frac{\partial}{\partial v} - 2\lambda\right)\right\}\Delta\phi \\ = 0.&\end{aligned}$$

对这个方程再加上边界条件

(4.5.9) 对 $v = \pm 1$，$\phi = \pm 1$，$\phi_v = 0$，

(4.5.10) 当 $|u| \to \infty$ 时 $\phi_u \to 0$．

如果 α 是实常数，$k = \alpha$，$\lambda = 0$，ϕ 与 u 无关，那么 (4.5.8) 成为

$$\phi_{vvvv} + (4\alpha^2 + 2R\alpha\phi_v)\phi_{vv} = 0. \tag{4.5.11}$$

两点边值问题 (4.5.9) 和 (4.5.11) 的解显然就是前面提到的 Jeffrey-Hamel 流． 为确定形式解 $u(x, \varepsilon)$，在 (4.5.8) 中令 $u = \sigma/\varepsilon$，并设 $|\phi_u| = O(\varepsilon)$，于是当 $\lambda = O(\varepsilon)$ 时，

$$k = \alpha(\sigma) + O(\varepsilon^2).$$

那么 (4.5.8) 可以写成

$$\phi_{vvvv} + 4\alpha^2\phi_{vv} + 2R\alpha\phi_v\phi_{vv} = O(\varepsilon).$$

如果假定

$$\phi(x, \varepsilon) = G_0(v, R, \alpha(\sigma)) + \sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n\phi_n,$$

那么 ϕ_n 可以叠代算出，每一个都是方程组

$$L\phi = \phi_{vvvv} + 4\alpha^2\phi_{vv} + 2R\alpha\left(\frac{\partial G_0}{\partial v}\phi_v\right)_v$$

$$= F_n(G_0, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1}),$$

$$\phi = \phi_v = 0 \text{ 对 } v = \pm 1$$

唯一的奇的解．其中 F_n 是从精确方程(4.5.8)求出的．现在我们指出(不予证明)，在4.4A的注释的意义下，如上构造的截短的形式解

$$\phi_N = G_0 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^n \phi_n$$

是(4.5.8)的一个近似：

(i) $f_\varepsilon(\phi_N) = O(\varepsilon^{N+1})$ 在 Ω 上一致成立；

(ii) ϕ_N 满足边界条件(4.5.9)，(4.5.10)；

(iii) 对充分小的 ε，$\|f_\varepsilon(\phi_N)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant k_N(R, \alpha)\varepsilon^{N+\frac{1}{2}}$．现在叙述一个结论

(4.5.12) 对充分小的 ε 和适当限制的 R，α，(4.5.7)有古典解

$$\phi = G_0 + \rho_0.$$

而且 ϕ 是使 $\|\phi - G_0\|_{W_{2,2}(\Omega)} = O(\varepsilon)$ 的唯一解．这里

$$G_0 = G_0(\alpha, R)$$

是4.5C节开始处提到的 Jeffrey-Hamel 流．

证明：我们对 $p = 0$，$n = 1$，$N = 1$ 用(4.4.1)把(4.5.8)改写为闭子空间 H 中的算子方程，H 由 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中的奇函数组成，范数定义为

$$\|u\|_H^2 = \sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |D^\alpha u|^2.$$

在(4.5.8)中用 $G_0 + \rho$ 去换 ϕ，可以假定 ρ 满足零边界条件．显然，类似于2.2D中的论证，方程(4.5.8)可以改写成 H 中的算子方程

$$\tilde{f}_\varepsilon(\rho) = L_\varepsilon\rho + RN_\varepsilon\rho = O(\varepsilon),$$

其中 L_ε 和 N_ε 是从 H 到自身的有界连续映射，线性算子 L_ε 由

$$(L_\varepsilon\phi, \varphi) = \int_\Omega [\Delta\phi\Delta\varphi + \Delta\phi(4k\varphi_u + 4\lambda\varphi_v)$$

$$+ 4(k^2 + \lambda^2)\varphi\Delta\phi] + O(\varepsilon)$$

隐式地确定，N_ε 由方程 $f_\varepsilon(G_0 + \rho) = f_\varepsilon(G_0) + L_\varepsilon\rho + N_\varepsilon(\rho)$ 定义．显然，

存在某个与ψ和φ无关的常数 k，使

$$\|N_\varepsilon\psi - N_\varepsilon\varphi\| \leqslant k(\|\psi\| + \|\varphi\|)\|\psi - \varphi\|,$$

N_ε 满足（4.4.1）的条件 (I)．于是据（4.4.1），为证

(4.5.12)，只需证明

(＊) L_ε 有逆，$\|L_\varepsilon\psi\| \geqslant k_1\|\psi\|$，其中 k_1 是与 ε 无关的常数．

根据（1.3.21），一旦找到一个与 ε 无关的正数 k_1，使

$$(L_\varepsilon\psi, \psi) \geqslant k_1\|\psi\|_H,$$

那么就得到(＊)．对 $p = 4\alpha + R(\partial G_0/\partial v)$ 和 $q = 4\alpha^2 + 2R\alpha(\partial G_0/\partial v)$，由简单的计算可知

$$(L_\varepsilon\psi, \psi) = \int_\Omega \{|\Delta\psi|^2 + (p\psi_u + q\psi)\Delta\psi + q_v\psi\psi_u + P_{vv}\psi\psi_u\} + O(\varepsilon)\|\psi\|_H^2.$$

分部积分，用上 $\alpha = \alpha(\varepsilon u)$ 得到

(†) $$(L_\varepsilon\psi, \psi) = \int_\Omega \{|\Delta\psi|^2 + R(\partial^2 G_0/\partial v^2)\psi\psi_{uv} - q(\psi_u^2 + \psi_v^2)\} + O(\varepsilon)\|\psi\|_H^2$$

于是，只要对(†)右端的第一个二次型找到一个适当的下界就行了．为此适当限制R和α，我们来找与 ε 无关的常数 $\lambda = \lambda(R, \alpha) > 0$，使对一切奇(对 v 而言)函数 $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$，

(4.5.13) $$Q_1(\psi) = \int_{-1}^1 (2\psi_{uv}^2 + \psi_{vv}^2 + RG_{vv}\psi\psi_{uv} - q(\psi_u^2 + \psi_v^2))dv \geqslant \lambda\int_{-1}^1 (2\psi_{uv}^2 + \psi_{vv}^2)dv.$$

如果得到了这个不等式，在（4.5.13）的两端加上 ψ_{uu}^2 并对 u 积分，就立刻得到（＊)．为证（4.5.13)，我们指出，如果适当限制R和α，可得到不等式

(4.5.14) $$\int_{-1}^1 (\varphi_{vv}^2 - q\varphi_v^2)dv \geqslant \mu\int_{-1}^1 \varphi_v^2 dv,$$

对一切 $\varphi \in \mathring{W}_{2,2}(-1, 1)$ 成立．

并且，如果φ是v的奇函数，μ可以增大到某个 μ_1．把这个不等式用到ψ和 $\int_{-1}^v \psi_u dv$，我们得出

$$\int(\psi_{vv}^2 - q\psi_v^2) \geqslant \mu_1\int\psi_v^2,$$

$$\int(\psi_{uv}^2 - q\psi_u^2) \geqslant \mu_1\int\psi_u^2.$$

然后和（4.4.14）的证明一样，从这两个不等式推出存在正常数 $\mu_2 < \mu_1$ 使

$$\int_{-1}^{1}(\phi_{uv}^2 + \phi_{vv}^2 - q(\phi_u^2 + \phi_v^2))dv$$

$$\geqslant \int_{-1}^{1}(\mu_2\phi_{uv}^2 + \mu_3\phi_{vv}^2)dv.$$

从 (4.5.13) 和

$$\int_{-1}^{1}\phi^2 \leqslant c\int_{-1}^{1}\phi_{vv}^2,$$

对任意 $\delta > 0$,

$$Q_1(\phi) \geqslant \int_{-1}^{1}(\phi_{uv}^2 + \mu_2\phi_{uv}^2 + \mu_3\phi_{vv}^2)dv$$

$$- \beta\left(\delta\int\phi_{uv}^2 dv + \frac{1}{\delta}\int\phi_{vv}^2\right)$$

$$\geqslant (1 + \mu_2 - \beta\delta)\int_{-1}^{1}\phi_{uv}^2 dv + (\mu_3 - \beta/\delta)$$

$$\times \int_{-1}^{1}\phi_{vv}^2 dv.$$

剩下的只是取 δ 使 $1 + \mu_2 - \beta\delta > 0$ 和 $\mu_3 - \beta/\delta > 0$. 显然,限制 R 和 α 使 $\beta^2 < (1 + \mu_2)\mu_3$ 就可作到这点. 还需要证明对某个固定的 $\mu > 0$,(4.5.14) 成立. 为此必须讨论线性特征值问题

$$w^{(iv)} + (qw')' + \lambda w'' = 0,$$

$$w = w' = 0,\quad v = \pm 1$$

的最小特征值. 由连续性论证可以得知,对所有 $R \geqslant 0$,只要 α 属于下面这样一个区间就有 $\mu > 0$. 在该区间内,形式的近似 $G_0(\alpha)$ 是唯一的 Jeffrey-Hamel 流,它解析地依赖于 α.

细节请看 Fraenkel (1973).

注　　记

A　分枝解的线性稳定性

如在 4.1 节中所谈到的,在物理系统中,当经过一个歧点时经常会发生"稳定性的改变". 在弹性问题的结果 (4.3.36) 中,我们通过考虑能量论证了这点. 一般说来,对于非 Hamilton 系统,4.1 节中的线性稳定性判别法虽不够精细,但还是有用的. 这个判别法基于从线性算子 $f_x(\bar{x}, \bar{\lambda})$ 的谱得到的信息,其中 $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ 是 $f(x, \lambda) = 0$ 的解. 在这方面, Leray-Schauder

度理论常常有用．例如在有穷维系统中，只要 $f_x(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ 的特征值的实部都是负的，那么就是线性稳定的；而由任何具正实部的特征值则得出不稳定．于是，如果我们计算 $f(x,\lambda)$ 在零点的 Brouwer 度，把它作为 λ 的函数，当 λ 通过歧点时，我们就可以查明有关 f_x 在 $(\tilde{x},\tilde{\lambda})$ 处的谱的情况，其中 $(\tilde{x},\lambda)$ 是 $f(\tilde{x},\tilde{\lambda})=0$ 的解．这是因为，由在非奇异解处的线性化，可由可加性计算 Brouwer 度．在无穷维情形有类似的结果成立．关于进一步的介绍，有兴趣的读者可以看 Sattinger（1971）的文章．

B 一般算子方程在奇重特征值处的分歧

设 $f(x,\lambda)$ 是 C^1 映射，映 Banach 空间 $X\times R$ 中（0，0）点的某个邻域到 Y，使（i）对 0 附近所有的 λ，$f(0,\lambda)=0$，（ii）$f_{\lambda x}(x,\lambda)$ 是 x 的 C^1 函数，（iii）线性算子 $f_x(0,0)$ 是零指标的线性 Fredholm 映射，且 Ker $f_x(0,0)$ 的维数是奇数，（iv）对任 $x\in \mathrm{Ker} f_x(0,0)$，

$$f_{\lambda x}(0,0)x\bar{\in}\mathrm{Range} f_x(0,0).$$

那么，作为（4.1.12）和（4.2.3）的推广，可以证明（0，0）是算子方程 $f(x,\lambda)=0$ 的歧点．这个结果是这样得到的：象在（4.1.12）中那样，把 Banach 空间进行分解，再把 Brouwer 度的性质用到相应的分歧方程上去．在 Westreich（1973）中给出了证明的细节．

C 在对称假定下分歧方程的化简

在很多分歧问题中，利用对称性可以减少分歧方程中方程以及未知变元的个数．于是，在 Navier-Stokes 方程的第二稳态流中，观察到的第二个解有六边形的多孔型，该 Navier-Stokes 方程与底部加热的水平流中的对流有关（所谓 Bénard 问题）．可以从 4.1 节的分歧理论得出这个结果：即在一个向量值函数的 Banach 空间中求相应的非线性边值问题的解，该空间的函数本身具有“六边形”对称性．这首先在 Judovitch（1968）中实现，这种情形的一般研究由 Loginov 和 Tregonin（1972）给出．

D 半线性 Dirichlet 问题的边界分层现象

对定义在 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的边值问题

$$(\dagger)\qquad \varepsilon^2\Delta u+f(x,u)=0,\quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

可以推广 4.4C 节的结果，其中 $f(x,u)$ 是其变元的 C^∞ 函数，具有如下性

质：(i) 存在一个定义在 $\bar{\Omega}$ 上的 C^∞ 正函数 $T(x)$，使得在 $\bar{\Omega}$ 上有

$$f(x, T(x)) = 0,$$

以及

(ii) 对固定的 $v \in [0, T(x)]$，在 $\bar{\Omega}$ 上有

$$f_u(x, T(x)) < 0 \text{ 且 } \int_v^{T(x)} f(s, v)dv > 0,$$

其中 $f(x, u)$ 不受任何增长限制约束．那么，除去边界 $\partial\Omega$ 的一个小边界层外（当 $\varepsilon \to 0$ 时，它的宽度为 $O(\varepsilon)$），为对正解 $f(x)$ 验证逼近 $u_0 = T(x)$ 的合法性，我们可以在 Hölder 空间 $C^{m,\mu}(\Omega)$ 中用 4.4B 节的程序．但是，为得到线性算子 $L = [f_u(u_0)]^{-1}$ 形式的关键估计，Sobolev 空间是本质的．一旦对 L 得到某种估计，当把 L 看作适当的 Hölder 空间间的映射时，Sobolev 不等式就给出对 L 的逐点估计．如想了解整个详情，有兴趣的读者可看 De Villiers (1973)，也可看 Fife (1973)．

E 参考文献

4.1 节：Poincaré 关于分歧理论最早的文章是 Poincaré (1885)．这篇文章讨论旋转的理想流体的平衡状态，他从 Kelvin 和 Tait (1879) 的文章的许多猜测中得到不少启发．后来关于这个问题的论述有 Liapunov (1906—1914)，Lichtenstein (1933) 和 Appell (1921)．现在仍缺少一个综合的现代研究．在前面的评注中提到过 Liapunov 判别法 (4.1.4) 一般是用强函数法证明的．关于现代的处理可以看 Siegel 和 Moser (1971)．象在 (4.1.5) 中那样，把分歧问题化为有限维的问题，一般称作 Liapunov-Schmidt 方法．它属于 Liapunov (1906) 和 Schmidt (1908) 奠基性的文章．关于这个课题有一本现代的书，是由 Vainberg 和 Tregonin (1974) 写的．我们关于简单重数的处理 (4.1.12) 属于 Duistermatt．这里还要指出奇异性现代理论的技巧在更困难的分歧问题中的重要性．单重情形的分歧问题的其它现代论述有 Crandall 和 Rabinowitz (1971) 以及 Westreich (1972)．Krasnoselski 的书 (1964) 对这个问题提供了很详尽的材料．在 Berger (1969) 中讨论了分歧理论和非线性正规模型之间的关系，在 Berger 和 Westreich (1974) 中还可找到 4.1D 节的叠代技术．在 Sather (1973) 以及其它一系列的文章和书中，对多重情形的构造性方法都作了综述．令人遗憾的是，这些方法在实际中常常失效．因为那些结果都加上了很多不易验证的条件．

4.2 节：在 Krasnoselski (1964)，Berger (1970a) 以及 Cronin (1964) 中

都很好地描述了超越方法在分歧理论中的作用，特别，映射度的运用属于 Krasnoselski (1964)．为得到关于歧点的进一步的结果（这些结果与重数无关)，他还指出梯度算子的重要性．Prodi (1971) 看来是在分歧问题中运用 Morse 理论的第一篇文章，也可看 Berger (1973)．至于 (4.2.4) 的复解析映射的分歧理论，在 Cronin (1953) 中讲述了进一步的结果，我们的证明是依循 Schwartz 的文章 (1963)．Berger (1969, 1970) 的文章中讲述了 Liusternik Schnirelmann 范畴理论在分歧理论中的应用．在 Ize (1975) 中，把较高的球面同伦群应用到分歧问题，这些问题涉及多于一个的参数，得到一些现代的有意思的结果．关于这个问题可看美国数学会专题报告 174 号．

4.3 节：关于在平衡点 L_1-L_5 附近的限制三体问题的周期解有一个很好的综述材料，即 Deprit 和 Henrard 的文章 (1969)．这里关于非线性弹性体中弯曲现象的论述是根据 Berger 的文章 (1967)．按照 Judovitch (1966, 1967)，我们把粘性流体的湍流问题当作分歧现象来讨论．其它有用的结果包括 Kirchgassner 和 Sorger (1969) 以及 Gortler (1968)等．Taylor (1923) 中首次提出 Taylor 旋涡，但是，通过完全非线性 Navier-Stokes 方程对它们进行数学研究是在 Velte (1966) 和 Judovitch (1966) 的文章中开始的．关于高维复流形上复结构分歧问题的讨论遵循 Nirenberg (1964) 和 Kuranishi (1965) 的工作．最近，利用 Nash-Moser 隐函数定理，Kuranishi 已经得到了关于带奇异性的形变的结果．在 Forster (1975) 的文章中，可以找到把非线性泛函分析应用于这个问题的另一方法．至于讨论这个问题的纯代数方法，由于所构造的形式幂级数解一般发散，从而受到影响．

4.4 节：结果 (4.4D) 取材自 Berger 和 Fraenkel (1969, 1970)．Fife (1973) 进一步发展了处理更一般的椭圆型边值问题的方法．

4.5 节：Friedrichs (1955) 的文章是数学物理中奇异扰动问题的一篇极好综述．关于非谐振荡周期解的扰动的结果属于 Ter-Krikorov (1969)．我们关于非线性弹性体中薄膜逼近有效性的讨论取自 Schrobshik 的文章 (1964)．在 Fraenkel 的文章 (1962, 1973) 中可以找到受扰动的 Jeffrey-Hamel 流的讨论．

F　非线性 Hamilton 方程组的正规方式

设给出一个线性自治 Hamilton 系统，它是一个常微分方程组，要讨论在高阶非线性 Hamilton 扰动下其正规方式的保持问题．如 4.2 节所述，在建立一般结果时，分歧理论的超越方法是关键性的．在 Berger (1969, 1970a,

1971）的工作中对二阶方程组进行了讨论．在 Westreich 的尚未发表的文章中，又把 Berger 的方法加以修改，使之适用于一阶方程组．虽然这时由于 Siegel 的例子（请看 Siegel 和 Moser（1971），109—110 页），需要加上某些限制条件．在 Weinstein（1974）和 Moser（1976）中可以找到对一阶方程组处理这个问题的有趣的有穷维方法，他们两人都采用了和 Berger（1970a）类似的 Ljusternik-Schnirelmann 超越方法，请看 6.7 节．在 Berger（1973）中指出了对双曲型偏微分方程的可能推广．

第三部分 大范围分析

第三部分的目的是把已讲过的局部结果推广到全局去，使得可以成功地处理第一章中所讨论的那些具体问题．为达到这个目标，把分析和拓扑结合起来的方法已被证明是十分有效的．对于第四章中的分歧理论来说，这种抽象方法已经非常有价值．然而对于全局性问题，如要真正理解非线性现象，这种结合经常是本质的．在本学科中，分析方法和拓扑方法的这种结合已经取得了重大的成果．

在实际项目中，基于两个主要的理由，从局部到全局的推广特别重要．首先，对给定问题的解给出充分精确的首次逼近可能是作不到的；其次，虽然这个近似存在，但很多问题要求把所给问题解的总体 $\mathfrak{S}$ 看作一个整体，而事实上，在不同的情况下，集合 $\mathfrak{S}$ 经常被分成不同的类 $\{\mathfrak{S}_\alpha\}$，它们具有各自的重要特性．

我们不打算提出很一般的全局理论，而宁愿满足于描述这样一个范围，即介于古典线性泛函分析与一般无穷维流形上的非线性泛函分析理论之间的领域．

现在把要讨论的问题总结一下．

要讨论的问题：为统一记号，用 U 记 Banach 空间 X 中的开区域，f 是定义在 U 上，在另一 Banach 空间 Y 中取值的有界映射．我们提出如下问题：

(i)（映射问题） 在什么条件下，f 是满射(即 $f(U)=Y$)?单射？或是从 U 到 $f(U)$ 的同胚?

(ii)（线性化问题） f 的哪些全局性质可以由它的局部性质导出？特别，如果 $f\in C^1(X,Y)$，从 $f'(x)$ 可以推出 f 的哪些全局性质?

(iii)（可解性问题） 类似于经典线性 Fredholm 理论，对固定的

$y \in Y$，给出算子方程 $f(x)=y$ 有解的必要和充分条件。

(iv)（与解的整体结构有关的问题） 对于固定的 $y \in Y$，可对算子方程 $f(x)=y$ 解的集合进行描述吗？特别，在什么条件下，方程至少有给定数目的解？

(v)（和解的分类有关的问题） 决定算子方程 $f(x)=y$ 解的一个分类，当映射 f 有适当限制的小扰动时，这个分类不变。

(vi)（变形问题） 在哪些情形，由把所给映射 $f \in M(U, Y)$ 光滑地变形成较简单的映射 $f_1 \in M(U, Y)$，可对上面的任一问题给出解答？

(vii)（参数相依性问题） 假定所给 f 连续依赖于参数 λ，那么 $f(\lambda)=0$ 的解与参数 λ 的关系怎样？

(viii)（逼近问题） 在哪些情形，作用于无穷维空间的映射 f 的性质可由对 f 值域的有限维逼近导出？

(ix)（一般算子理论） 经典泛函分析中线性算子理论的哪些部分可以直接推广到非线性的情形？

(x)（非线性影响问题） 算子 f 的哪些性质影响上面这些问题的解答？

(xi)（无穷维的影响问题） 上面这些问题的部分回答涉及到 Banach 空间 X 和 Y 的无穷维特性？

我们要考虑的典型情形是 $Ax=\lambda Bx$ 的非线性特征值问题，其中算子 A 和 B 至少有一个是非线性的。问题是找出这个方程的非平凡解 (x, λ) 的全体，如果可能，用线性特征值理论，用一个统一的方法对这些解进行分类。因为我们要找的解在性质上不是局部的，第二部分所介绍的方法应该由更完备的方法来补充。于是，与这些问题有关的有趣的非线性现象（例如"连续谱"(参看第 458 页的图 6.3)）启发人们发展更深刻的研究方法。

第五章　一般非线性算子的全局性理论

研究一般非线性算子的映射性质需要新的方法，这些方法与第二部份的理论完全不同．这里讨论三种一般的方法．首先是线性化方法，它基于由考察值域 $f(X)$ 的几何性质，把映射 $f\in C^1\cdot(X, Y)$ 的 Fréchet 导算子 $f'(x)$ 的局部信息汇集在一起；其次是逼近法，设算子 f 作用于两个无穷维 Banach 空间 X 和 Y 之间，用 $\{f_n\}$ 来逼近 f，其中 $\{f_n\}$ 作用于 X 和 Y 的有限维子空间．最后，考虑映射 $f\in C(X, Y)$ 的无穷维同伦理论．在这个理论中，试图用同伦来回答有关 f 的映射性质的问题，即把 f 连续变形成较简单的 $\tilde{f}$，而 $\tilde{f}$ 的映射性质较容易确定．在很多情形，最后这个理论导致各种数值拓扑不变量和 f 的联系．我们以这些不变量对各类具体问题的应用作为这一章的结束．第六章介绍可以用于梯度映射的另外的方法．

用第一章中介绍的确定流体运动的偏微分方程能很好解释这个区别．对于与理想稳定流有关的问题来说，相应的 Euler 方程一般确定适当的 Banach 空间间的一个梯度映射．的确，这个事实也可用于大范围旋涡环问题(在 6.4 节讲述)．但是，对稳定的粘性流，更一般的 Navier-Stokes 方程并不确定一个梯度映射，在研究与这种流有关的问题时，就要用到与本章理论有关的研究方法．在 5.5 节，我们通过解周期理想流动的经典问题来表明这些方法的威力．

5.1　线性化方法

设 $f(x)$ 是定义在 Banach 空间 X 的区域 D 上，在 Banach 空间 Y 中取值的 C^1 算子，亦即 $f\in C^1(D, Y)$．在第二部分中，算子 $f(x)$ 在点 $x_0\in D$ 附近的各种局部性质是从 Fréchet 导算子

$f'(x_n)$ 的性质导出来的. 很自然想把这些信息汇集在一起，并考虑映射 $f(x)$ 的哪些整体性质可由 $f'(x)$ 在每点 $x\in D$ 的性质决定。

简单的例子指出，甚至当对每个 $x\in D$，Fréchet 导算子 $f'(x)$ 是线性同胚或满射时(作为从 X 到 Y 的线性映射)，$f(x)$ 都可能不具有这些性质. 在这一节，在同胚和 $f(D)$ 连通的情形，基于与覆盖空间有关思想的简单拓扑考虑，我们对满射性阐明这个情形.

5.1A 整体同胚

假定对任 $x\in X$，算子 $f\in C^1(X,Y)$ 的 Fréchet 导算子 $f'(x)$ 是从 X 到 Y 的线性同胚，那么由第三章的反函数定理推出，f 是从每个点 x 的邻域 U_x 到 $f(U_x)$ 上的同胚. 于是要问：为使 f 是从 X 到 Y 的同胚，f 应具有什么性质? 解决这个问题很自然的拓扑工具是覆盖空间的概念. 事实上，从总结下面的定义和性质不难推出，f 是从 X 到 Y 的同胚的必要且充分条件是 (X,f) 是 Y 的覆盖空间，这可由 Banach 空间 Y 的单连通性推出.

定义：设 X 是连通的，局部连通的 Hausdorff 拓扑空间，Y 是连通 Hausdorff 拓扑空间. 如果

(i) f 是从 X 到 Y 上的连续映射；

(ii) 每个 $y\in Y$ 都有开邻域 U_y，使得 $f^{-1}(U_y)$ 是 X 中不交开集 O_i 的并，每个 O_i 在 f 的作用下和 U_y 同胚，

那么称 (X,f) 为 Y 的覆盖空间。

今后要用到覆盖空间的如下性质. 事实上，对分析上的应用来说，这些性质是关键.

设 (X,f) 覆盖 Y，那么覆盖映射 f 有性质：

(i) 唯一道路提升 设 $f(x_0)=y_0$，$L(t)$ 是 Y 中连续道路，$L(0)=y_0$. 那么在 X 中有且仅有一条连续道路 $p(t)$，$p(0)=x_0$，使对 $t\in[0,1]$ 有 $fp(t)=L(t)$.

(ii) 覆盖同伦性 设 $L_1(t)$ 和 $L_2(t)$ 是 Y 中有固定其点的连续道路，$L_1(t)$ 和 $L_2(t)$ 同伦，那么这些道路可以提升成 X 中

连续道路 $\mathfrak{L}_1(t)$ 和 $\mathfrak{L}_2(t)$，$\mathfrak{L}_1(t)$ 和 $\mathfrak{L}_2(t)$ 有固定基点且彼此同伦。

(iii) 对每个 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 中点的数目是常数。

(iv) 如 Y 单连通，那么 f 是同胚.

关于这些结果的证明，建议读者去看 Hu 的书 (1959)，也可看 Spanier 的书 (1966).

于是，为回答同胚的问题，我们将推出同胚成为覆盖映射的必要且充分条件. 为此我们证明

(5.1.1) **定理** 设 D 是 X 的区域，$f \in C(D, Y)$，那么 (D, f) 覆盖 $f(D)$ 的必要且充分条件是:

(i) f 是局部同胚且

(ii) f 提升线段. 即对连接 $y_0 = f(x_0)$ 和 $y_1 \in f(D)$ 的任何有限直线段 $L(t) \in f(D)$，其中 $x_0 \in D$ 任意，都存在曲线 $x(t)$ 使 $f(x(t)) = L(t)$，$x(0) = x_0$（参看图 5.1).

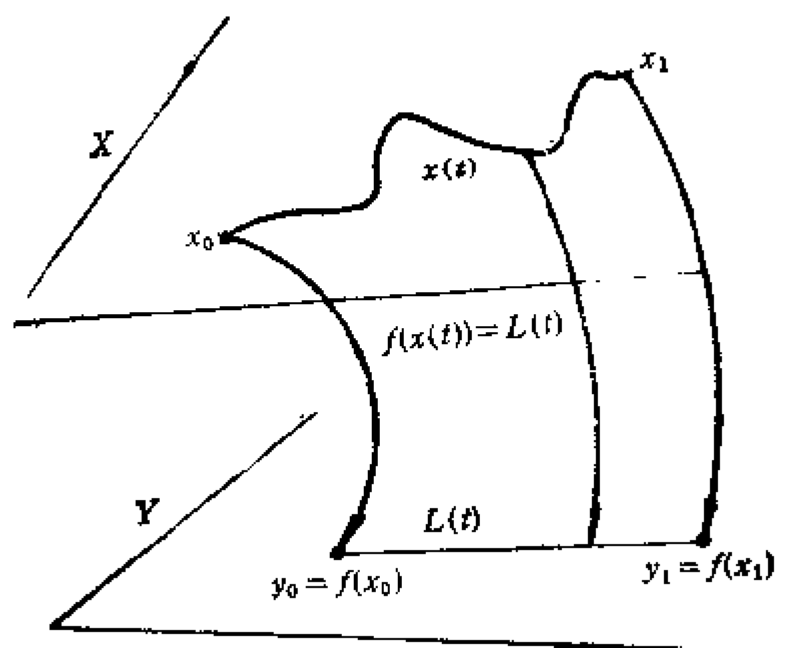


图 5.1 求曲线 $x(t)$，它被提升成线段 $\{L(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

证明 (R. Plastock): 从上面谈到的关于覆盖空间的结果不难推出 (i) 和 (ii) 的必要性.

为证 (i) 和 (ii) 的充分性，我们这样进行. 因为 f 局部同胚，

又是开映射，对直线段有唯一提升性质. 因而，如果 $y\in f(D)$ 和 $\{x_\alpha\}=f^{-1}(y)$，那么必存在一个开球 $B(y,r)=\{z\mid\|z-y\|<r, z\in Y\}$，它整个包含于 $f(D)$ 之中，且对范数为 1 的任何元素 $\bar{z}$，从 x_α 出发的曲线集

$$O_{x_\alpha}=\{x_\alpha(t)\mid t\in[0,1),\ x_\alpha(t)\in X,\ x_\alpha(0)=x_\alpha,\ f(x_\alpha(t))=y+tr\bar{z}\}$$

有定义(根据假设条件(ii)，曲线 $x_\alpha(t)$ 存在). 现在证明集 O_{x_α} 是不交开集，它们都同胚于 $B(y,r)$，且

$$f^{-1}(B(y,r))=\bigcup_\alpha O_{x_\alpha}.$$

显然，一旦有了这个事实，我们就证明了 (D,f) 覆盖 $f(D)$. 根据作法还推出

$$\bigcup_\alpha O_{x_\alpha}=f^{-1}(B(y,r)).$$

在进一步证明充分性之前，我们先指出以下几点，假定 f 满足 (i) 和 (ii)，则

(a) O_{x_α} 中不同道路映成 $B(y,r)$ 中不同半径.

(b) 如 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 是任意两条相交道路，那么，或者 $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 都被映成同一半径，或者仅在 $t=0$ 时相交.

(c) 如果 $f: D\to f(D)$ 是局部同胚，M_1 和 M_2 是 D 的开子集，其交不空，在每个 M_i 上 f 是同胚映射. 那么，当 $f(M_1)\cap f(M_2)$ 连通时，f 是 $M_1\cup M_2$ 到 $f(M_1\cup M_2)$ 上的同胚映射. 于是，如果 $f(M_1)$ 和 $f(M_2)$ 是球，则 $f(M_1)\cap f(M_2)$ 是凸集，因而连通.

从 O_{x_α} 的构造和上面的 (a) 可以断定，每个 O_{x_α} 被一对一的映成 $B(y,r)$，又因 f 是开映射，从而是同胚映射. 剩下来只需证明 O_{x_α} 是不交开集以及它们的并为 $f^{-1}(B(r,y))$. 这可由(b)推出它们不相交. 如果 $P_1(t_1)=P_2(t_2)=\bar{x}\in O_{x_1}\cap O_{x_2}(x_1\neq x_2)$，那么，如能证明 $P_1(0)=P_2(0)$ 就得到所要的矛盾. 但是，如果 P_1 和 P_2 被映成同一半径，必然有 $t_1=t_2$，从而 $s=\{t\mid P_1(t)=P_2(t),\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$ 是非空集，既开且闭，因而 $s=[0,1]$. 特别，$P_1(0)=$

$p_1(0)$.

下面证明每个 O_{x_α} 都是开集. 设 $u\in O_{x_\alpha}$, $f(u)=v$, $f(p(t))=(1-t)y+tv$ 和 $p(0)=x_\alpha$. 根据紧性，可用有限多个开集 D_i 覆盖 $p(t)$，每个 D_i 在 f 下的像都是一个球. 那么根据上面的 (c)，$\Delta=\bigcup_i D_i$ 被同胚映到 $f(\Delta)$ 上. 现在可以断定，存在某个 $\varepsilon>0$，当 $\|v-w\|<\varepsilon$ 时，连接 y 和 w 的直线属于 $f(\Delta)$. 设若不然，将有序列 $w_n\to v$ 使 $y(t_n)=(1-t_n)y+t_nw_n\bar{\in}f(\Delta)$，而 $y(t_n)\to(1-\bar{t})y+\bar{t}v\in f(\Delta)$，因为 $f(\Delta)$ 是开集，这就得出矛盾. 于是，当把 f 限制在 Δ 上时，我们看到 $f^{-1}|_\Delta(w\,|\,\|w-v\|<\varepsilon)$ 是 O_{x_α} 中包含 u 的开集.

最后证明 $f^{-1}(B(r,y))=\bigcup\limits_{x\in f^{-1}(y)}O_x$. 只需证明右端包含左端. 设 $x\in f^{-1}(B(r,y))$，令 $L(t)=(1-t)f(x)+ty\subsetneq B(y,r)$，由假设条件，有道路 $P(t)$ 使 $P(0)=x$ 和 $f(P(t))=L(t)$，特别 $P(1)\in f^{-1}(y)$. 如令 $\tilde{L}(t)=L(1-t)$ 和 $\tilde{P}(t)=P(1-t)$，那么 $f(\tilde{P}(t))=\tilde{L}(t)$，$\tilde{P}(0)\in f^{-1}(y)$，$\tilde{P}(1)=x$，于是 $x\in O_{P(1)}$.

(5.1.1) 定理证完.

于是为证 C^1 映射 $f: X\to Y$ 是整体同胚，我们只需证明 f 是局部同胚，以及对任 $y\in Y$，$x_0\in X$，有曲线 $x(t)\in X$ 使

(5.1.2) $\quad f(x(t))=ty+(1-t)y_0,\ 0\leqslant t\leqslant 1;\ x(0)=x_0$

（这要求我们预先知道 f 的满射）. 在这个意义下，同胚问题化成较简单的一维问题.

有一个有用的明确的方法，可用于构造满足 (5.1.2) 的曲线 $x(t)$，它基于 Banach 空间中的常微分方程理论. 事实上，对 t 微分 (5.1.2) 式，我们得到曲线 $x(t)$ 应满足初值问题

(5.1.3) $$\frac{dx}{dt}=[f'(x)]^{-1}(y-y_0),\quad x(0)=x_0.$$

反之，如果 (5.1.3) 有解 $x(t)$，且对一切 $t\in[0,1]$，$x(t)$ 都存在，那么曲线 $x(t)$ 将满足 (5.1.2). 由于有 Peano 定理 (3.1.28)，

这个想法对有限维问题是有用的，而对无穷维问题来说，(5.1.3)的用处则较少。

但是不难把基于常微分方程的论证一般化.在下面的 Banach 和 Mazur 的结果的证明中就可以清楚看到这一点。

(5.1.4) 定理:

(i) 当 $f\in C(X,Y)$ 时，f 是 X 到 Y 上同胚的必要且充分条件是：f 局部同胚且是正常映射。

(ii) 当 $f\in C^1(X,Y)$ 时，f 是微分同胚的必要且充分条件是 f 是正常映射，且对每个 $x\in X$，$f'(x)$ 是线性同胚映射。

证明: (i) 如果 $f\in C(X,Y)$，所述条件的必要性是明显的.

现证充分性，我们首先注意到 f 映 X 到 Y 上。事实上，因为 f 是局部同胚，所以 $f(X)$ 是开集；同时，从 f 是正常映射推出 $f(X)$ 又是闭集，从而由 Y 的连通性推出 $f(X)=Y$。根据(5.1.1)，我们仅需证明存在一条曲线 $x(t)$ 满足(5.1.2)。由 f 是局部同胚推出，对某个小的 $\varepsilon>0$ 和 $t\in[0,\varepsilon)$，有曲线 $x(t)$ 满足 $f(x(t))=ty+(1-t)y_0$。令 $\beta>0$ 是下面这种数中最大者：对它们，$x(t)$ 可以连续延拓使 $f(x(t))=ty+(1-t)y_0$ 对 $0\leqslant t<\beta$ 成立。再假定 $t_i\to\beta$。因为 $L=\{y(t)\,|\,y(t)=ty+(1-t)y_0, t\in[0,1]\}$ 紧，f 是正常映射，所以 $f^{-1}(L)$ 紧，故 $x(t_i)$ 有收敛子序列 $x(t_{i_n})$，当 $t_{i_n}\to\beta$ 时，$x(t_{i_n})\to\bar{x}$。由连续性可得 $f(\bar{x})=\beta y+(1-\beta)y_0$。由 f 是局部同胚，$x(t)$ 可连续延拓到 $t>\beta$，而这与 β 的最大性相矛盾。于是可以断定，对 $t\in[0,1]$，$x(t)$ 存在且与 $x_0\in X$ 和 $y\in Y$ 无关。

(ii) 如果 $f\in C^1(X,Y)$ 是微分同胚，其逆为 g，那么对每个 $x\in X$，$f'(x)$ 必定是线性同胚，这是由于 $fg(y)=y$ 和 $gf(x)=x$ 都可微的缘故。于是所述条件的必要性是显然的。为证条件的充分性，我们用反函数定理和上面的(i)证明 f 同胚，现记其逆为 g。那么，因为对每个 $y\in Y$，$fg(y)=y$，由 f 可微就推出 g 可微。

下面的定量准则在有限维时属于 Hadamard。

(5.1.5) 定理 (Hadamard)：设 $f\in C^1(X,Y)$ 是局部同胚映

射，$\zeta(R)=\inf\limits_{\|x\|<R}\frac{1}{\|[f'(x)]^{-1}\|}$，那么，如果 $\int_0^\infty\zeta(R)dR=\infty$，则 f 是 X 到 Y 上的同胚．特别，如果对所有 $x\in X$，$\|[f'(x)]^{-1}\|\leqslant M$，则 f 是 X 到 Y 上的同胚．

证明： 我们证明 (X, f) 覆盖 $f(X)$，而且 $f(X)=Y$．根据 (5.1.1)，当且仅当 f 提升线段时 (X, f) 覆盖 $f(X)$．为建立这个事实，我们象 (5.1.4) 的证明中那样作．令 $x_0\in f^{-1}(y_0)$ 和 $y\in Y$．我们找一条曲线 $x(t)$ 使 $f(x(t))=ty+(1-t)y_0$．因为 $f(x)$ 是局部同胚，对于小的 $t>0$，$x(t)$ 存在．令 β 是使 $x(t)$ 可以连续延拓到 $0\leqslant t<\beta$ 并满足 $f(x(t))=ty+(1-t)y_0$ 的 β 中的最大者，我们将证明 $\lim\limits_{t\to\beta}x(t)$ 存在且有限．暂时先承认这个事实，那么和 (5.1.4) 的证明一样，对一切 $t\in[0, 1]$，$x(t)$ 存在，使得 f 提升线段．因为 $y\in Y$ 任意，这就证明了 $f(X)=Y$．

于是我们只需用定理的假设条件去证明 $\lim\limits_{t\to\beta}x(t)$ 存在且有限．如果 $\|[f'(x)]^{-1}\|\leqslant M$，不难建立这个事实．事实上，如果 $t<\beta$，$x(t)$ 满足方程

$$(*)\qquad x'(t)=[f'(x(t))]^{-1}(y-y_0),$$

从而对任意 $t_1, t_2<\beta$，

$$\|x(t_2)-x(t_1)\|\leqslant\left\|\int_{t_1}^{t_2}[f'(x(t))]^{-1}(y-y_0)\right\|$$
$$\leqslant M\|y-y_0\||t_2-t_1|.$$

于是对 $t<\beta$，$x(t)$ 满足 Lipschitz 条件，又因 X 完备，所以

$$\lim_{t\to\beta}x(t)$$

存在且有限．

更一般地，如果 $\int_0^\infty\zeta(t)=\infty$，刚才给出的证明可以修改如下：定义 $x(t)$ $(0\leqslant t<\beta)$ 关于权 $g(x)=\frac{1}{\|[f'(x)]^{-1}\|}$ 的长度为

$$L_g(x(t), [0, \beta))=\int_0^\beta g(x(t))\|x'(t)\|dt.$$

那么，如能证明，当 $\int_0^\infty \zeta(t) = \infty$ 时上面定义的 X 的距离在如下意义完备：如 $L_g(x(t), [0, \beta)) < \infty$，那么 $\lim\limits_{t\to\beta} x(t)$ 存在且有限，我们就得到所要的结论．令 $0 < s < \beta$．根据上面的估计，因为 $d\|x(t)\|$ 是有界变分，

$$\infty > \int_0^s g(x(t))\|x'(t)\|dt \geqslant \int_0^s g(x(t))d\|x(t)\|$$

$$\geqslant \int_0^s \zeta(\|x(t)\|)d\|x(t)\| \geqslant \int_{\|x(0)\|}^{\|x(s)\|} \zeta(\tau)d\tau.$$

于是由 $\int_0^\infty \zeta(t)\,dt = \infty$ 可知，对 $t \in [0, \beta)$，$\|x(t)\|$ 一致有界．另一方面，因为 $\zeta(t)$ 不增，$\int_0^\infty \zeta(t)\,dt = \infty$，$\sup\{t|\zeta(t)>0\} = \infty$，所以在任何有界集上 $g(x)$ 有下界．特别，在 $0 \leqslant t < \beta$ 上 $g(x(t))$ 有下界，譬如说 $\|g(x(t))\| \geqslant G$．现令 $t_i \uparrow \beta$，那么

$$(**)\quad \sum_{i=1}^n \|x(t_{i+1}) - x(t_i)\| \leqslant \sum_{i=1}^n \sup_{t\in[t_i, t_{i+1}]} \|x'(t)\|(t_{i+1} - t_i)$$

$$\leqslant \int_0^\beta \|x'(t)\|dt \leqslant \frac{1}{G}\int_0^\beta g(x(t))\|x'(t)\|dt < \infty.$$

于是从(**)推出 $\sum_{i=1}^n \|x(t_{i+1}) - x(t_i)\| < \infty$，所以 $\{x(t_i)\}$ 是 X 中 Cauchy 序列，从而 $\lim\limits_{t_i\to\beta} x(t)$ 存在且有限．

作为(5.1.4)的应用，我们证明

(5.1.6) 设 $f(x)$ 是从自反 Banach 空间 X 到它的共轭空间 X^* 中的连续映射，有性质：

(†) $\qquad (f(x) - f(y), x - y) \geqslant \eta(\|x - y\|)\|x - y\|$，

其中 $\eta(r)$ 是满足 $\eta(0) = 0$ 的正函数，当 $r \to \infty$ 时 $\eta(r) \to \infty$．那么 f 是 X 到 X^* 的同胚．

证明：我们证明 f 是正常映射和局部同胚．为证 f 是正常映射，请注意从(†)可推出，只要 $x_n \to x$ 弱收敛和 $f(x_n) \to z$，那么 $f(x) = z$ 和 $x_n \to x$ 强收敛．设 $\{f(x_n)\}$ 在 X^* 中收敛，那么

由(†)和X的自反性推出$\{x_n\}$有界。必要时取子序列后可设x_n在X中弱收敛到某个$\bar{x}$，故由性质(†)，$\{x_n\}$强收敛。

为证f局部同胚，我们看到根据(†)，f一对一映X到它的值域。另外，如果$x_1=f^{-1}(z_1)$和$x_2=f^{-1}(z_2)$，那么从(†)也推出$\|z_1-z_2\|\geqslant\eta(\|f^{-1}(z_1)-f^{-1}(z_2)\|)$，因而$f^{-1}$连续。于是由(5.1.4)，$f$是$X$到$Y$上的整体同胚。

在实际应用 Hadamard 定理时，经常要求把适当的 Banach 空间X和Y进行分解，以及利用映射f对这个分解的特殊性质。微分几何中的一个问题就是一个例子。这个问题是：设$(\mathfrak{M}, g)$是一个光滑的二维 Riemann 流形，它有负的 Euler-Poincaré 特征数$\chi(\mathfrak{M})$，要在$(\mathfrak{M}, g)$上求具有常值 Gauss 曲率为-1的 Riemann 度量。在 1.1A 一节谈到代数曲线的单值化问题时曾提到过这个问题。根据那里的讨论(参看方程(1.1.5))，这样一个度量的存在性可由求解偏微分方程

$$(5.1.7)\qquad \Delta u-K(x)-e^{2u}=0$$

在$\mathfrak{M}$上的光滑解来保证。

对此问题，我们用 Hadamard 定理证明

(5.1.8) **定理**：(5.1.7)可解的必要且充分条件是$\int_{\mathfrak{M}}K(x)dV_g<0$。于是，如果$K(x)$记$(\mathfrak{M}, g)$的 Gauss 曲率，$\chi(\mathfrak{M})<0$，根据 Gauss-Bonnet 定理，方程(5.1.7)总有解。

证明：证明分三步。首先把问题变形为定义在 Sobolev 空间$W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$上的适当的算子方程，并做到算子方程任何一个广义解u自动是(5.1.7)的光滑解。其次，为用 Hadamard 定理，应该把所得到的抽象算子方程进行分解以对应于这样一个事实：Laplace 算子Δ在$(\mathfrak{M}, g)$上有核，这个核由常数函数构成。事实上，所要的结论本身断定，如果不修改相应的映射，必然不是整体同胚的。最后一步在于估计适当修改f后的 Frechet 导算子的大小。这个修改是按这样的要求作的，即要满足 Hadamard 定理(5.1.5)的假设条件。

第一步：只要我们采用 2.2D 一节的共轭方法，所要的(5.1.7)的变形是不难的．事实上，可由下面的公式隐式定义算子 L 和 N 为：

$$(Lu, v) = \int_{\mathfrak{M}} \nabla u \cdot \nabla v, \quad (Nu, v) = \int_{\mathfrak{M}} e^{2u} v.$$

L 是有界自共轭映射，映 Sobolev 空间 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 到自身，同时，根据估计式 (1.4.6)，N 是作用于此空间的 C^1 映射．于是偏微分方程 (5.1.7) 可以写成

$$(*) \qquad Lu + Nu = f, \quad \text{其中} \ (f, v) = -\int_{\mathfrak{M}} K(x) v.$$

这个算子方程在 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 中的解自动足够光滑（可能要在一个 Lebesgue 零测集上改变定义），并且逐点满足 (5.1.7)．关于这两点的验证是 1.5B 节所讲的 L_p 正则性理论和估计式 (1.4.6) 的推论．

第二步：现在对算子方程(*)进行分解．令 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g) = H$，分解 $H = \mathrm{Ker}\, L \oplus H_1$，用 P 记 H 到 H_1 上的标准投影．那么，如果给出了(*)关于这个分解的一个尝试解 $u = w + c$，(*) 就等价于一对方程

$$(**) \qquad Lw + PN(c + w) = Pf;$$

$$e^{2c} \int_{\mathfrak{M}} e^{2w} = -\int_{\mathfrak{M}} K(x) dV_g.$$

因为 H_1 是 H 的子空间，它的元素是在 $(\mathfrak{M}, g)$ 上均值为 0 的函数，于是就得出这个结果．从第二个方程推出，当且仅当 $\int_{\mathfrak{M}} K < 0$ 时可决定出常数 c（它是 w 的函数）．在(**)的第一个方程中用这个值 $c = c(w)$，我们看到，问题就化成证明(**)中第一个方程左端的算子是 H_1 到自身的整体同胚．

第三步：我们用证明下面一点来结束整个证明：当看作 H_1 到自身的 C^1 映射时，算子 $\mathfrak{f}(w) = Lw + PN(c(w) + w)$ 有 Frechet 导数 $\mathfrak{f}'(w)$，对所有 $w \in H_1$，它都是有逆的线性算子，并且 $[\mathfrak{f}'(w)]^{-1}$ 一致有界．如能证得这一点，那么从 Hadamard 定

理(5.1.5)推出，正如所要求的，f 是 H_1 到自身的整体同胚。为此应该计算和估计 $\tilde{f}'(w)$。在现在的情形这是容易作到的。回想起 L 和 N 的隐式定义并估计如下的二次型(定义在 H_1 上)，对 $v \in H$，

$$(\tilde{f}'(w)v, v) = \int_{\mathfrak{M}} |\nabla v|^2 + 2[e^{2c(w)}e^{2w}]v^2$$

$$\geqslant \int_{\mathfrak{M}} |\nabla v|^2 = \|v\|_{H_1}^2.$$

注意到在 H_1 上，范数化成 Dirichlet 积分。于是从 Lax-Milgram 引理(1.3.21)推出，$\tilde{f}'(w) \in L(H_1, H_1)$ 是有逆线性算子，而且 $\|[\tilde{f}'(w)]^{-1}\| \leqslant 1$，这正是所要找的一致的界。这就证明了定理。

5.1B 具奇异值的映射

甚至当 C^1 算子 f 有奇异值时，我们刚才得到的整体同胚的结果仍然有用。事实上，当从值域和定义域中剔除某些有限余维的集合时，f 仍可以是整体同胚。我们将看到，这把对 f 映射性质的研究化成了有限维的问题。

下面来说明这个想法，考虑最简单的情形，即问题中的集合是线性子空间。首先，我们给出一个一般结果，然后把它用于决定具体的半线性椭圆微分算子(带 Dirichlet 边界条件)值域的确切结构。(在5.3节还要给出这个基本思想另外的应用)。这个一般结果可以陈述为如下的

(5.1.9) **简化引理** 设 X，Y 是 Banach 空间，$L \in (X, Y)$ 是具非负指标 p 的 Fredholm 算子，$N \in C^1(X, Y)$。此外，还假定对某固定的数 $\varepsilon > 0$，除了一个有限维子空间 $W = \operatorname{Ker} L \oplus V$ 外(即对一切 $x \in W^{\perp}$)，下面的结果成立：

(5.1.10) $Lx + PN'(u)x$ 有逆，

$$\|Lx + PN'(u)x\| \geqslant \varepsilon\|x\|,$$

其中 P 是 Y 到 $L(W^{\perp})$ 上的标准投影。那么，$f \in \operatorname{Range}(L + N)$ 的必要充分条件是下面的方程组(5.1.12)有解，这个方程组共有 $\dim W - p$ 个方程，$\dim W$ 个未知数。并且 $Lx + Nx = f$ 的

解对应于(5.1.12)的解.此外,如果 $Lx+Nx=f$, $x=w_0+w_1$, $w_0\in W$, $w_1\in W^{\perp}$, 那么当 $N'(x)$ 一致有界时,有下面的估计式成立

(5.1.11) $\|w_1\|\leqslant c_1\|w_0\|+c_2$ (c_1, c_2 是绝对常数).

证明: 把X分解成直和 $X=W\oplus W^{\perp}$, $Y=L(W^{\perp})\oplus Y_0$, 用 P_0 记 Y 到 Y_0 上的标准投影. 那么,对 $x=w_0+w_1$ 和 $f\in Y$, 方程 $Lx+Nx=f$ 可以改写成方程组

(5.1.12) (i) $Lw_0+P_0Nx=P_0f$,

(ii) $Lw_1+PNx=Pf$.

当看作从 $W^{\perp}$ 到 $L(W^{\perp})$ 的 C^1 映射时,根据不等式(5.1.10), $Aw_1=Lw_1+PNx$ 有 Fréchet 导算子 $A'(u)w_1$, 其下界为

$$\|A'(u)w_1\|=\|Lw_1+PN'(u)w_1\|\geqslant\varepsilon\|w_1\|,$$

从而 $A'(u)$ 有逆,且其逆一致有界*. 于是从 Hadamard 定理(5.1.5)推出 (5.1.12.(ii)) 可以唯一解出,其解 $w_1=w_1(w_0, Pf)$ 光滑地依赖于 w_0 和 Pf. 此外,把 w_0 看作 w_1 的参数(Pf 固定),在方向 v 上对 w_0 微分 (5.1.12(ii)), 我们得到

$$Lw_1'(w_0[v])+PN'(x)\{v+w_1'(w_0[v])\}=0.$$

由(5.1.10)以及 $N'(x)$ 的一致有界性及一个简单的估计式推出,对所有的 v, $\dfrac{\|w_1'(w_0)[v]\|}{\|v\|}$ 一致有界. 于是

$$\varepsilon\|w_1\|\leqslant K_0\|w_0\|+K_1,$$

其中 K_1 和 K_0 是绝对常数. 由这个估计就推出(5.1.11).

最后注意到,由于 x 可以写成 $x=w_0+w_1(w_0, Pf)$, 所以可把方程组(5.1.12(i))看作 $\dim W$ 个未知数, $\dim Y_0$ 个方程的方程组. 因为L是指标为p的 Fredholm 算子,故知 $\dim Y_0=\dim N-P$. 引理证毕.

(5.1.11′) 如果算子 $N(x)$ 一致有界,那么当 w_0 变化时,函数 $w_1=w_1(w_0, Pf)$ 也一致有界.

---

* 此处译文略有更动——译注.

证明：设N一致有界，从(5.1.12)推出

$$(*)\qquad \|Lw_1\| \leqslant \|Pf\| + \|PN(w_0 + w_1)\| \leqslant K,$$

其中K是正常数。因为作为 $W^\perp$ 和 $L(W^\perp)$ 间的线性算子时 L 有逆，于是从(*)推出 $\|w_1\|$ 一致有界。

现在来看简化引理一个简单的，但是有助益的应用（在这个应用中，一个无穷维问题化成了一维问题）。考虑映射 A，它由半线性椭圆偏微分算子

$$(5.1.13)\qquad Au \equiv \Delta u + f(u),\quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

定义，该算子定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上（在 $\partial\Omega$ 上取零 Dirichlet 边界条件）。其中Δ记关于Ω的 Laplace 算子，Δ有特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3$，$\lambda_1 > 0$，$f$ 是 C^1严格凸函数，满足 $f(0) = 0$ 和渐近关系式

$$(5.1.13')\qquad 0 < \lim_{t\to-\infty} f'(t) < \lambda_1,\quad \lambda_1 < \lim_{t\to+\infty} f'(t) < \lambda_2.$$

在这些条件下，我们证明一个类似于解实数的二次方程的定理。

(5.1.14) 当看作由 $X = \mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 到 $Y = W_{-1,2}(\Omega)$ 的映射时，映射A的值域有如下性质：

(a) A的奇异值构成Y中一个连通的余一维流形M，使$Y - M$恰好有两个分支 O_0，O_2（看图 5.2）。

(b) 对 $g \in O_j$，方程 $Au = g$ 恰有 j 个解 $(j = 0, 2)$，对 $g \in M$，方程 $Au = g$ 恰有一个解。

(c) 对给定的 $g \in L_2$，$Au = g$ 解的个数完全由g在一维子空间S_1上投影的大小决定，其中S_1是Δ相应于λ_1的特征子空间。如果用 $u_1 \in S_1$ 记 L_2 范数为1的正特征函数，$g = \alpha u_1 + g_1$，且 $u_1 \perp g_1$（在L_2意义下），有g_1的连续实值函数 $\alpha(g_1)$，使得，如果 $\alpha(g_1)g \in M$，那么当 $\alpha < \alpha(g_1)$ 时，$g \in O_0$，当 $\alpha > \alpha(g_1)$ 时，$g \in O_2$。

(d) A所有的奇异值都可以写成 $g = \alpha(g_1)u_1 + g_1$ 的形式。

附注：

如果去掉 $f(t)$ 的凸性条件，仍然可由 (5.1.14)(c) 决定

(5.1.13) 是否有解，但是这时不能确定解的个数.

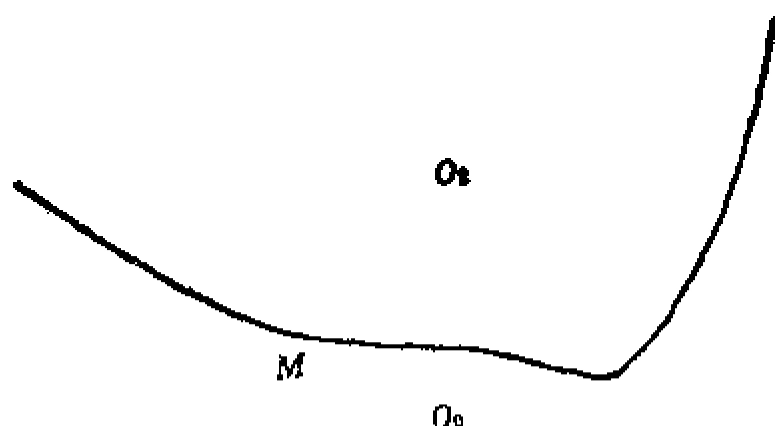


图 5.2 (5.1.13) 可解性结果的图示.

证明: 证明分为三步: 首先把问题变形为一个抽象算子方程; 再应用简化引理把问题转化为对含一个未知数方程的解的研究; 最后，由简单的图形考虑解决定义在 S_1 上的一维问题.

第一步 (变形): 首先用共轭方法 (2.2D (iii)), 以 $Lu - Nu = -g$ 表示方程 $Au = g$, 其中 $g \in H$ (一个 Hilbert 空间). 算子 L 和 N 由公式

$$(Lu, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda_1 uv),$$

$$(Nu, v) = \int_\Omega [f(u) - \lambda_1 u]v$$

隐式地定义. 此外，对所有 $v \in C_0^\infty(\Omega)$, 我们注意到, 只要令 $H = \mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 和由 $\int_\Omega gv = (g, v)$ 定义 g, (5.1.13) 的弱解就满足(5.1.12). 显然，由上面公式定义的算子 L 是自共轭 Fredholm 映射, 它映 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 到自身, $\dim \operatorname{Ker} L = 1$, 而且对一切 $u \in H$, $(Lu, u) \geq 0$. 此外，N 是映 H 到自身的有界映射，它的 Frechet 导算子 $N'(u)$ 一致有界, $N'(u)$ 由 $(N'(u)w, v) = \int_\Omega (f'(u) - \lambda_1)wv$ 隐式地定义. 验证这些性质只是常规的事. 事实上，上面定义的 N 是 C^1 映射(今后这个事实是有用的). 为检验这件事，我们注意到，从渐近性质(5.1.13′)推出: 当 $|t| \to \infty$ 时 $f''(t) \to 0$. 故 $f''(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致有界. 此外，如果在 H 中 $u_n \to u$, 则 $f'(u_n)$ 在 Ω 上依测度收敛到 $f'(u)$. 于是由 Lebesgue 控制收敛定理得出，从 N 的隐式定义中直接算出的 $N'(u)$ 存在且对 u 连续.

第二步 (化成一维问题): 我们把简化引理用到算子 $f = L - N$. 在现

时，因为 L 自共轭，所以 $p=0$. 此外，简化引理中所述的子空间 W 和一维子空间 $\mathrm{Ker}L=\{v\mid \Delta v+\lambda_1 v=0,\ v\in H\}$ 直合（这里我们用到一个事实：Δ 在 Ω 上的最小特征值总是简单特征值）. 事实上，对 $v\perp \mathrm{Ker}L$，由 (5.1.13) 和 f 的性质有

$$(Lv-PN'(u)v,v)=\int_\Omega[|\nabla v|^2-f'(u)v^2]$$

$$\geqslant(1-(\lambda_2-\theta_+)/\lambda_2)\int_\Omega|\nabla v|^2.$$

在 H 中定义 u 的范数为 $\|u\|_H^2=\int_\Omega|\nabla u|^2$，再应用(1.3.20)，就可以把 $\mathrm{Ker}\ L$ 选成 W. 于是根据简化引理，只需研究一维问题 $-P_0N(tu_1+w(t,g_1))=-\int_\Omega gu_1$，其中 u_1 是 Δ 的正的规范特征函数. 将上式两端反号，再分别记为 $h(t)$ 和 K，我们只需研究方程

$$h(t)=-\lambda_1 t+\int_\Omega f[tu_1+w(t,g_1)]u_1=K \tag{5.1.15}$$

的解. 此外，由(5.1.11)，有估计式 $\|w(t,g_1)\|\leqslant c_1 t+c_2$ 成立.

第三步：我们证明由(5.1.15)定义的函数 $h(t)$ 有如下两个性质，就可推出(5.1.14)中提到的结论 (a)—(d).

(α) 当 $|t|\to\infty$ 时 $h(t)\to\infty$；

(β) $\inf\limits_t h(t)>-\infty$ 是 $h(t)$ 唯一的临界值，且只在某个 t_1 处达到一次. 此外，t_1 由 g_1 唯一确定，是 g_1 的连续函数.

暂时假定 (α) 和 (β) 成立，我们注意到，在 (5.1.14) 中所讲的 (a)—(d) 是令 $\alpha(g_1)=h(t_1)$ 的直接推论. 于是，为证 A 的奇异值 $A(S)$ 确实是形若 $g=h(t_1)u_1+g_1$ 的点（g 在 $(\mathrm{Ker}L)^\perp$ 上变化），首先将方程

$$A(tu_1+w(t,g_1))=h(t)u_1+g_1$$

对 t 微分，并令 $t=t_1$，得到

$$A'(t_1u_1+w(t_1,g_1))(u_1+w'(t_1))=0,$$

所以 $t_1u_1+w(t_1,g_1)\in S$. 反之，假定 $u\in S$ 和 $A(u)=c_1u_1+g_1\in A(S)$. 根据迄今已得到的结果，$u=t_1u_1+w(t_1,g_1)$，且对某个 $v=\alpha u_1+w_1$，$A'(u)v=0$. 若用 P 记 H 到 $(\mathrm{Ker}L)^\perp=H_1$ 上的投影，则 $PA'(u)(\alpha u_1)=-PA'(u)w_1$；因为 $-PA'(u)$ 在 H_1 上有逆，

$$w_1=-(PA'(u))^{-1}PA'(u)(\alpha u_1)=\alpha w'(t_1,g_1).$$

于是 $v=\alpha u_1+\alpha w'(t_1,g_1)$，且因从 $(I-P)A'(u)v=0$ 推出 $h'(t)=0$，

由 (β) 求得 $t = t_1$，故如所要求，$u = t_1 u_1 + w(t_1, g_1)$.

最后，我们来证明 (α) 和 (β). 基本问题是验证这样一个简单的想法：如果 $w(t_1, g_1)$ 对 $h(t)$ 的影响可略去不计，那么这两个事实都是不难得到的. 给定一个子集 $\{t\}$，$|t|\to\infty$，我们指出，只需证明对任意两个序列 $t = t_n \to +\infty$ 和 $t = s_n \to -\infty$，都有 $h(t) \to +\infty$ 就行了. 如果找到一个绝对常数 $c_1 > 0$ 使得

$$(*) \qquad \lim_{t_n\to+\infty} \frac{h(t_n)}{t_n} \geqslant c_1 \quad \text{和}$$

$$(**) \qquad \lim_{t_n\to-\infty} \frac{h(t_n)}{t_n} \leqslant -c_1,$$

则就得出证明.

这里我们只证明($*$)，因为($**$)的证明完全类似，为此先指出，从第二步末提到的先验估计推出，对充分大的 t，$\{w(t)/t\}$ 一致有界. 故可假定有弱收敛子列 $\{w(t_n)/t_n\}$. 不失一般性，可以设它在 $L_2(\Omega)$ 中强收敛和几乎处处按点收敛到某个元素 $\bar{w} \in H$.

其次，根据 $u_1 + w(x)$ 为正、为负或零，把 Ω 分成三个集合 Ω_+，Ω_- 和 Ω_0. 令 $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = \lambda_2 - \varepsilon_+$ 和 $\lim\limits_{t\to-\infty} f'(t) = \lambda_1 - \varepsilon_-$，从(5.1.15)得出

$$(5.1.16) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{h(t_n)}{t_n} = -\lambda_1 + (\lambda_2 - \varepsilon_+)\int_{\Omega_+} (u_1 + w) u_1 + (\lambda_1 - \varepsilon_-)\int_{\Omega_-} (u_1 + w) u_1.$$

这里我们已经用到了 Lebesgue 有界收敛定理并注意到，当 $n\to\infty$ 时

$$f(t_n u_1 + w(t_n))/t_n$$

在 Ω_0 上的积分也趋于零. 因为在 H 中的弱收敛下这个结果自然成立，所以 $\int_\Omega w u_1 = 0$. 于是

$$\int_{\Omega+} (u_1 + w) u_1 + \int_{\Omega-} (u_1 + w) u_1 = \int_\Omega (u_1 + w) u_1 = \int_\Omega u_1^2 = 1.$$

从而我们可以由改变负部积分的系数由 $\lambda_1 - \varepsilon_-$ 为 $\lambda_2 - \varepsilon_+$ 来估计(5.1.16)的右端的下界. 综合(5.1.16)和上面列出的等式，再由在 L_2 的意义下 $w \perp u_1$，我们得到

$$\lim_{t_n\to\infty} \frac{h(t_n)}{t_n} = -\lambda_1 + (\lambda_2 - \varepsilon_+)\int (u_1 + w) u_1 = c_1,$$

其中 $c_1 = \lambda_2 - \lambda_1 - \varepsilon_+ > 0$. 于是，**在由 f 的渐近线性得到 u_1 和 $w(t)$ 的**

正交性后，就得到所要的结果 (α).

将要看到，由于不能运用由 (5.1.13) 中确定的 f 的渐近线性，(β) 的证明更依赖于 f 的凸性的复杂应用.

下面证明，当函数 $h(t)$ 两次可微时，$h(t)$ 在临界点 t_0 有性质

$$(\overline{*}) \qquad h''(t_0) = \int_\Omega f''(u(t_0))(u_1 + w'(t_0))^3.$$

然后再用特征函数 u_1 的正性证明 $\operatorname{sgn}(u_1 + w'(t_0)) > 0$，从而 $h''(t_0) > 0$. 为此改写 (5.1.15) 成 $h(t) = PA(u(t))$，其中 P 是 H 到 $\operatorname{Ker} L$ 上的投影. 设 $h'(t_0) = 0$，一个形式的演算给出 $h''(t_0) = (A''(u(t_0))(u'(t_0), u'(t_0)), u'(t_0))$，于是得到 ($\overline{*}$). 此外，$u'(t) = u_1 + w'(t)$ 满足线性方程 $A'(u(t))u'(t) = 0$. 在现时，由它推出 $v = u'(t)$ 是方程

$$(5.1.17) \qquad \Delta v + f'(u(t))v = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0$$

的特征函数，相应特征值 $\lambda = 1$. 从 $f(s)$ 满足的渐近式和特征值的极值特征推出 $\lambda = 1$ 是 (5.1.17) 的最小特征值，此外还推出 $\operatorname{sgn} u'(t) = \operatorname{sgn}(u_1 + w'(t))$ 在 Ω 中是常数. 因为 $\int_\Omega u_1 w'(t) = 0$，对 Ω 的某个开子集 Ω'，$w'(t) > 0$，于是如所希望的，在 Ω 上有 $\operatorname{sgn}(u_1 + w'(t)) > 0$. 在 $h(t)$ 二次可微的情形 (β) 得证. 但是一般说来，$h(t) \bar{\in} C^2$，必须对刚才给出的想法进行修改. 为此我们指出，只要当 $|t - t_0|$ 充分小时有 $h(t) > h(t_0)$，或等价地，

$$\operatorname{sgn} h'(t) = \operatorname{sgn}(t - t_0)$$

就行了. 为得到这个式子，我们用 $A'(u(t))u'(t) = 0$ 求出

$$\int_\Omega f'(u(t))u'(t)w'(t_0) = \int_\Omega f'(u(t_0)u'(t)w'(t_0)).$$

一个简短的计算给出

$$(5.1.18) \quad h'(t) - h'(t_0) = \int_\Omega \{f'(u(t)) - f'(u(t_0))\} u'(t)u'(t_0).$$

现在不直接计算 $h''(t_0)$，而把上面右端的积分分成两部分. 一个是在 $\Omega_1 = \{x \mid u'(t_0) \leqslant 1\}$ 上的积分，另一个是在 $\Omega - \Omega_1$ 上的积分. 在 Ω_1 上把 Lebesgue 控制收敛定理用到 (5.1.18)，不难证明，因为 f' 一致有界，所以

$$\lim_{t \to t_0} (h'(t) - h'(t_0))/(t - t_0)$$

存在并等于 ($\overline{*}$) 的右端，从而是个正数. 于是剩下的只是在 $\Omega - \Omega_1$ 上讨论 (5.1.18). 因为在 $L_2(\Omega)$ 中 $u(t) \to u(t_0)$，我们首先注意，任何序列 $t_n \to t_0$ 都有子序列 (仍记作 t_n)，使得对 $n \geqslant n_0$ 和某个 $\varepsilon > 0$，有

$$u'(t_n) \geqslant \frac{1}{2} \quad (a.e.) \text{ 和 } (u(t_n) - u(t_0))/(t_n - t_0) \geqslant \theta.$$

于是对 $n \geqslant n_0$，在 $\Omega - \Omega_1$ 上 $f(u(t_n)) \geqslant f(u(t_0))$，且 $u'(t_n) > 0$. 因而当 $t > t_0$ 时，(5.1.18)中在 $\Omega - \Omega_1$ 上的积分为正，这就得出了所要的结果.

关于(5.1.14)的推广可参看本章末的注记B.

5.2 有穷维逼近

设算子方程 $f(x) = 0$ 定义在 Banach 空间X上，我们可用映射列 $\{f_n\}$ 逼近 f，空间列 $\{X_n\}$ 逼近X来研究该方程的解的性质. 假定在某种确定的意义下，(f_n, X_n) 收敛到 (f, X)，一个想法是研究当 $n \to \infty$ 时 $f_n(x) = 0$ 在 X_n 上的解 $\{x_n\}$ 的情况，指出 $\{x_n\}$ 有适当的子序列收敛于 $f(x) = 0$ 在X上的解. 设 $\dim X = \infty$，我们用有穷维子空间列 X_n 逼近 X，由限制 f 的定义域到 X_n 得出序列 $\{f_n\}$（它们有有限维值域），用 $\{f_n\}$ 逼近 f 来讨论这一系列想法.

5.2A Galerkin 逼近

更清楚些，设X是实可分自反 Banach 空间（其共轭空间为 X^*），设 $\{X_n\}$ 是X的固定的有限维子空间序列，$X_n \subset X_{n+1}$，$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ 在X中稠密. 我们统一记号，用 P_n 记X到 X_n 上的投影，P_n^* 记其共轭算子，$X_n^* = P_n^* X^*$. 如果 f 是X到 X^* 的有界连续映射，$g \in X^*$，那么，对定义在X上的方程 $f(x) = g$，它的有限维逼近序列可以记作

$$(5.2.1)_n \qquad P_n^* f(x) = P_n^* g, \quad x \in X_n.$$

$(5.2.1)_n$ 通常称作方程 $f(x) = g$ 的 Galerkin 逼近. 我们这里仅限于考虑定义在自反 Banach 空间X上的方程，这是为了可以利用X中有界集的弱紧性. 为从 $(5.2.1)_n$ 的可解性（对充分大的 n）导出 $f(x) = g$ 在X上的可解性，我们只需要

(i) 确定 $(5.2.1)_n$ 的解 $\{x_n\}$ 先验的界，$\|x_n\| \leqslant M$，其中M与 n 无关. 从而可以假定 $\{x_n\}$（如有必要就取子序列）弱收敛于

其唯一的弱极限 $\bar{x}$.

(ii) 用 f 的性质和 Galerkin 构造本身证明 $f(\bar{x})=g$. 于是(在最简单的情形),如果作为从 X 到 X^* 的映射 f 弱序列连续,从(i)就直接推出 $f(\bar{x})=g$.

实际上,对逼近格式 $(5.2.1)_n$ 的仔细研究可以大大降低刚才提到的关于弱连续的要求. 为此,我们注意到 Galerkin 逼近解 $\{x_n\}$ 有两个特性,这些特性可用两列方程表示:

(5.2.2) (a) $(f(x_n), x_n)=(g, x_n)$;

(b) $(f(x_n), z)=(g, z), \quad z\in X_n$.

这些结果是由 $(5.2.1)_n$ 分别和 x_n, z 取内积得到的. 于是,对考虑收敛性而言,一旦(i)成立,我们不仅可以假定 x_n 弱收敛于 $\bar{x}$,还可以假定 $f(x_n)$ 弱收敛于 ξ(因为 f 有界). 而且,由(5.2.2b)推出 $\xi=g$,同时由(5.2.2a)得到 $(f(x_n), x_n)\to(g, \bar{x})$,因而算子 f 确保从(i)推出(ii)的关键性质可以叙述如下:

条件 (G) 如果在 X 中 x_n 弱收敛到 x,在 X^* 中 $f(x_n)$ 弱收敛到 y,并且 $(f(x_n), x_n)\to(y, x)$,那么 $f(x)=y$.

有限维 Banach 空间间的一切连续映射,一切弱序列连续映射,以及我们将看到的,与拟线性椭圆型偏微分方程有关的一大类映射,都满足这个条件.

现在我们可以证明如下的

(5.2.3) **定理** 设 X 是实可分自反 Banach 空间, X^* 是其共轭空间, f 是从 X 到 X^* 的有界映射,满足条件

(I) 当 $\|x\|\to\infty$ 时, $(f(x), x)\|x\|^{-1}\to\infty$,

(II) f 满足条件(G).

那么, f 是从 X 到 X^* 上的满射,对任意 $g\in X^*$,可从 Galerkin 逼近 $(5.2.1)_n$ 的解中选择适当的子序列,使其弱极限是 $f(x)=g$ 的解.

证明: 主要的想法是用条件(I)同时保证两件事: $(5.2.1)_n$ 的解 x_n 存在以及序列 $\{x_n\}$ 一致有界. 然后,如同上面提到的,用(II)证明对任意 $g\in X^*$, $\{x_n\}$ 的某个弱收敛子序列收敛到

$$f(x)=g$$

的解。

现设 g 是 X^* 中任意一个元素，那么，为证对每个 n，(5.2.1)$_n$ 有解，我们证明，当看作从 X_n 到 $P_n^*X_n$ 的映射时，有穷维映射 $f_n=P_n^*f$ 是满射．为此注意到，对任意 $x\in X_n$，由条件 (I) 可推出，当 $\|x\|_{X_n}\to\infty$ 时，

$$\|x\|_{X_n}^{-1}(f_n(x),x)=(f(x),x)\|x\|_X^{-1}\to\infty.$$

从而在 $P_n^*X_n$ 中任一固定的元素 $\tilde{g}$ 处，f_n 关于充分大的球 $\{x\mid\|x\|\leqslant R\}$ 的 Brouwer 度是 1，故 $f_n(x)=\tilde{g}$ 在 X_n 中有解，于是有 $x_n\in X_n$ 满足 (5.2.1)$_n$． 进一步，根据 (5.2.2a) 和 Schwarz 不等式，

$$(f_n(x_n),x_n)=(f(x_n),x_n)=(g,x_n)\leqslant\|g\|\|x_n\|.$$

故由条件 (I) 还可推出序列 $\{x_n\}$ 一致有界．

适当选取子序列后，可以假定 $\{x_n\}$ 在 X 中弱收敛到某个 $\bar{x}$．根据 f 的有界性，$f(x_n)$ 在 X^* 中弱收敛到 g．而且，重复 (5.2.2) 后面的论证，我们又可以假定 $(f(x_n),x_n)\to(g,\bar{x})$．因为 f 满足条件 (G)，所以 $f(\bar{x})=g$．由 g 的任意性知 f 满射，定理得证．

上述结果的效用可通过 (i) 确定一大类满足条件 (G) 的映射 f，(ii) 对 Galerkin 逼近的收敛性证明某些条件（如条件 (G)）的必要性得以阐明．

(5.2.4) **例**（如果去掉条件 (II)，定理 (5.2.3) 不真） 令 $X=l_2$，即平方可和序列 Hilbert 空间．元素 $x\in l_2$ 记作 $x=(x_1,x_2,\cdots)$，$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2$．如果 $\|x\|\leqslant1$，令 $Tx=(\sqrt{1-\|x\|^2},x_1,x_2,\cdots)$；如果 $\|x\|\geqslant1$，令 $Tx=(\sqrt{1-\|x\|^{-2}},x_1\|x\|^{-2},x_2\|x\|^{-2},\cdots)$．那么，$T$ 是 $l_2\to l_2$ 的连续映射，对所有 $x\in l_2$ 有 $\|Tx\|=1$．再令 $f(x)=x-Tx$，我们注意到 f 连续，且

$$(f(x),x)=\|x\|^2-(Tx,x)\geqslant\|x\|^2-\|Tx\|\|x\|,$$

于是当 $\|x\|\to\infty$ 时 $(f(x),x)/\|x\|\geqslant\|x\|-1$．另一方面，因为 $f(x)=0$ 没有解，故 f 不满值．事实上，如果 $f(y)=0$，那么因为

$\|Ty\|=1$，所以 $\|y\|=1$。于是，如果 $y=(y_1, y_2, \cdots)$ 和 $y=Ty$，那么 $y_1=0$，对一切 i，$y_{i+1}=y_i$，因而 $y=0$，此与 $\|y\|=1$ 相矛盾。

现在来确定一些映射类，它们满足条件（G），但不必弱序列连续。为此我们证明

(5.2.5)下面的映射类满足条件（G）：

(i) $X\to X^*$ 的连续单调映射 T。指对一切 x，$y\in X$，都有 $(T(x)-T(y), x-y)\geqslant 0$；

(ii) 单调映射的全连续扰动；

(iii) 形若 $T(x)=Px+Rx: X\to X^*$ 的映射，其中映射 T，P 和 R 可以写成 $Tx=T(x,x)$，$T(x,y)=P(x,y)+R(x,y)$：$X\times X\to X^*$ 满足

(a) $(y-z, P(x,y)-P(x,z))\geqslant 0$。

(b) 如果 x_n 弱收敛到 x，$(P(x_n,x_n)-P(x_n,x), x_n-x)\to 0$，那么 Rx_n 弱收敛到 Rx。

(c) 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 在 X 中弱收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$，那么 $(Rx_n, y_n)\to 0$。

(d) 对固定的 $x\in X$，$R(y,x)$ 和 $P(y,x)$ 是从 X 到 X^* 的全连续映射。

(e) 对固定的 $y\in X$，映射 $P(y,x)$ 和 $R(y,x)$ 是从 X 的强拓扑到 X^* 的弱拓扑的有界连续映射，且在每一变元的有界集上一致。

证明：(i) 设 T 单调，w 是 X 中任意元素，那么对任意 n，

$$(x_n-w, Tx_n-Tw)\geqslant 0. \tag{5.2.6}$$

如果 $x_n\to x$，$Tx_n\to y$ 弱收敛，且 $(Tx_n, x_n)\to(y,x)$，在(5.2.6)中令 $n\to\infty$ 得出

$$(x-w, y-Tw)\geqslant 0. \tag{5.2.7}$$

对 $\lambda>0$ 和任意 $z\in X$，在(5.2.7)中令 $w=x-\lambda z$，得到 $(z, y-T(x-\lambda z))\geqslant 0$。令 $\lambda\to 0$，我们看到对任 $z\in X$，

$(z, y-Tx)\geqslant 0$，于是 $Tx=y$，正如所求。

(ii) 单调映射 P 和它的全连续扰动 R 满足条件 (iii)，其中 $P(x,y)=P(x)$，$R(x,y)=R(y)$。因而 (ii) 可从更一般的情形 (iii) 导出。

(iii) 所用的证明是 (i) 的证明的推广。对任意 $w\in X$ 和每个 n，由条件 (a)，

$$(5.2.8)\qquad \begin{aligned}&(x_n-w, T(x_n,x_n)-T(x_n,w))\\ &\geqslant (x_n-w, R(x_n,x_n)-R(x_n,w)).\end{aligned}$$

对任意 $x\in X$，令 $R(x,x)=R(x)$ 和 $P(x,x)=P(x)$。那么，如果 $x_n\to x$，$Tx_n\to y$ 弱收敛，同时 $(Tx_n,x_n)\to(y,x)$，令 $n\to\infty$，应用假设条件 (c) 和 (e)，我们有 $(x_n-x, Tx_n-Tx)\to 0$ 和 $(x_n-x, Rx_n-Rx)\to 0$。相减得到 $(Px_n-Px, x_n-x)\to 0$。由条件 (d)，$(x_n-x, P(x_n,x_n)-P(x_n,x))\to 0$，因而由条件 (b)，$Rx_n$ 弱收敛到 Rx；再根据条件 (c)，$(Rx_n,x_n)\to(R(x),x)$。在 (5.2.8) 中随着 $n\to\infty$，由条件 (d)，对任意的 w 有

$$(5.2.9)\quad (x-w, y-T(x,w))\geqslant(x-w, R(x,x)-R(x,w)).$$

在 (5.2.9) 中对 $\lambda>0$ 令 $w=x-\lambda z$，和 (i) 一样，用 λ 除再令 $\lambda\to 0$，我们得到 $(z, y-T(x,x))\geqslant 0$，于是如所要求的，$y=T(x)$。

5.2B 对拟线性椭圆型方程的应用

在研究散度形式的一般拟线性椭圆型微分方程时，很自然地出现了满足条件 (G) 的算子。事实上，设微分算子

$$Au=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)$$

定义在有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上，和 2.2 节 (iii) 一样，假定系数 $A_\alpha(x,u,\cdots,D^m u)$ 满足适度的连续性和增长限制条件，我们可以把 A 和一个抽象算子 T：$\mathring{W}_{m,p}(\Omega)\to W_{-m,q}(\Omega)$ 联系起来，T 由下式隐式定义

$$(Tu, \varphi) = \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u)D^\alpha\varphi.$$

我们可以这样看，A 的椭圆性依赖于 $2m$ 阶导数的项，而 A 的低阶导数项可以看作是“紧”扰动，于是很自然要把 Tu 对 u 的 m 阶导数的相依性和对较低阶导数项的相依性区分开来。为此，我们把 Tu 记作主部 Pu 和余项 Ru 之和，定义

(5.2.10) $(P(u, v), \varphi) = \sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^{m-1}u, D^m v)D^\alpha\varphi,$

(5.2.11) $(R(u, v), \varphi) = \sum_{|\alpha|\leq m-1}\int_\Omega A_\alpha(x, u, \cdots, D^{m-1}u, D^m v)D^\alpha\varphi.$

那么，至少在形式上 $T(u, u) = P(u, u) + R(u, u)$，其中 $T(u, v) = P(u, v) + R(u, v)$，$P(u, u) = Pu$，等等。

受上一节的启发，现在我们可以用具体的微分算子 A 的语言解释 (5.2.5(iii)) 的条件 (a)—(e)。条件 (a) 是 A 的椭圆性的表现，而 (d) 是下面这个事实的抽象描述：低于 m 阶的项是 A 的紧扰动。如同上面提到的，条件 (e) 是对 A 的系数 A_α 的增长限制和光滑性要求。对条件 (b) 和 (c) 要稍微多作一些解释。由方程 (5.2.11) 和 Hölder 不等式推出，对于适当的待定的共轭指数 p_α，q_α，

(5.2.12) $|(R(u_n), y_n)| \leq$

$$\sum_{|\alpha|\leq m-1}\|A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^m u_n)\|_{q_\alpha}\|D^\alpha y_n\|_{p_\alpha}.$$

如果 y_n 在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛到 0，那么对 $|\alpha| \leq m-1$，$D^\alpha y_n$ 在 $L_{p_\alpha}(\Omega)$ 中强收敛到 0，其中 $p_\alpha < \dfrac{Np}{N-(m-\alpha)p}$. 于是，因为 $\{u_n\}$ 弱收敛，$\|u_n\|_{m,p}$ 一致有界。由 (5.2.12)，条件 (c) 可以看成纯粹是对 $A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u)$ 的增长限制，其中 $|\alpha| \leq m-1$. 下面的结果对说明条件 (b) 是有用的。

(5.2.13) 设 u_n 在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛到 u，又设定义在 $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^q$ 上的函数 $A_\alpha(x, y, z)$ 满足 Carathéodory 条件和椭圆性条件

$$\sum_{|\alpha|=m} \{A_\alpha(x, y, z) - A_\alpha(x, y, z')\}(z_\alpha - z'_\alpha) > 0$$

对一切 $z \neq z'$ 在 Ω 中几乎处处成立．那么，如果当 $n \to \infty$ 时，

$$\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \{A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^m u_n) - A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^{m-1} u_n, D^m u)\} \\ \times (D^\alpha u_n - D^\alpha u) \to 0,$$

则在 Ω 上 $D^\alpha u_n$ 依测度收敛到 $D^\alpha u$（对 $|\alpha| = m$）．

这个结果不难证明．首先证明，如在 L_p 中 $u_n \to u$ 弱收敛且对 $y > 0$ 有 $f(y) > 0$，那么由 $\int_\Omega f(u_n) \to \int_\Omega f(u)$ 推出在 Ω 上 $u_n \to u$ 依测度收敛．

综合 (5.2.11) 和 (5.2.13)，我们注意到，对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ 和 $|\alpha| \leqslant m-1$，如果 u_n 在 $\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛到 u，那么

$$A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^m u_n) D^\alpha \varphi \to A_\alpha(x, u, \cdots, D^m u) D^\alpha \varphi$$

在 Ω 上依测度收敛．于是，因为函数 A_α 满足适当的增长条件，

$$\lim_{n\to\infty} (R(u_n), \varphi) = \lim_{n\to\infty} \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} \int_\Omega A_\alpha(x, u_n, \cdots, D^m u_n) D^\alpha \varphi \\ = (Ru, \varphi),$$

所以 Ru_n 弱收敛于 Ru，由 (b) 推出的对 A 的限制同时又是对 A_α ($|\alpha| \leqslant m-1$) 增长的限制．

5.2C 取消强制性条件

在某些情形，(5.2.3) 可得到实质性的改进，即把强制性条件：当 $\|x\| \to \infty$ 时 $(f(x), x)\|x\|^{-1} \to \infty$ 换成较弱的条件．但一个仅仅满足条件 (G) 的算子 $f \in B(X, X^*)$ 可能把 X 映成 X^* 的真子集，从而不是满射．

在 (5.2.3)中，刚才提到的强制性条件是用于证明：(a) Galerkin 逼近 $(5.2.1)_n$ 的可解性；(b) 给出这些逼近方程的解的先验估计．在某些情形，我们现在讲的改进将同时推出 (a) 和 (b)．

(5.2.14) **定理** 设 f 是有界连续映射，映一个实可分自反 Banach 空间 X 到 X^*，满足如下条件：

(I) f 是奇映射，即对一切 $x \in X$，$f(-x) = -f(x)$．

(II) 条件 (G')：如果 x_n 在 X 中弱收敛到 x，$f(x_n)$ 在 X^* 中

弱收敛到 y，且 $(f(x_n), x_n) \to (y, x)$，则 x_n 强收敛到 x。
那么，如果对 $x \in \partial\Sigma_R = \{z | \|z\| = R\}$ 有 $\|f(x)\| \geq \alpha$，则对所有 $\|g\| < \alpha$，方程 $f(x) = g$ 在 Σ_R 中有解。

证明： 基本想法又是用定理的条件去保证两者：Galerkin 逼近解的存在以及对所得到的解作出先验估计。有了这两条以后，因为从条件（G′）可推出条件（G），从而我们前面的证明就推出 Galerkin 逼近解的一个子序列将收敛到 $f(x) = g$ 的解。

为证明当 n 充分大时，Galerkin 逼近 $(5.2.1)_n$ 在 $\Sigma_R \cap X_n$ 上有解 x_n，我们首先指出，如果 $g \in X$，$\|g\| < \alpha$，而对任何 $t \in [0, 1]$ 和 $x \in \partial\Sigma_R$ 都有 $f(x) \neq tg$，那么对充分大的 n，必存在常数 β 和 $N > 0$，使得对 $t \in [0, 1]$ 以及 $z \in \partial\Sigma_R \cap X_n$，当 $n \geq N$ 时，总有 $\|P^*(f(z) - tg)\| \geq \beta$。否则将有序列 $\{P^*_{n_k}\}$，$\{z_k\}$ 和 $\{t_k\}$，使得 $z_k \in \partial\Sigma_R \cap X_n$，$t_k \in [0, 1]$，当 $k \to \infty$ 时 $\|P^*_{n_k}[f(z_k) - t_k g]\| \to 0$。必要时选取子序列后，可以假定 $z_k \to z_0$ 弱收敛，$P^*_{n_k} f(z_k) \to t_0 g$ 在 X^* 中强收敛。因而对任意 $w \in X$，$(f(z_k), P_{n_k} w) = (P^*_{n_k} f(z_k), w) \to (t_0 g, w)$，还有

$$|(f(z_k) - t_0 g, P_k w - w)| \leq \|f(z_k) - t_0 g\| \|P_k w - w\| \to 0.$$

展开 $(f(z_k) - t_0 g, P_k w - w)$，我们得到 $f(z_k)$ 在 X^* 中弱收敛到 $t_0 g$，从而由条件（G′）推出 $z_k \to z_0$ 强收敛，故 $f(z_0) = t_0 g$。于是 $\|z_0\| = R$，$f(z_0) = t_0 g$ 和 $\|f(z_0)\| \leq \|g\|$。这和假设对一切 $z \in \partial\Sigma_R \cap X_n$ 都有 $\|f(z)\| \geq \alpha > \|g\|$ 相矛盾。

这个结果表明，对 $n \geq N$，首先，映射 $P^*_n(f(z) - g)$ 和 $P^*_n f(z)$ 在 $\partial\Sigma_R \cap X_n$ 上同伦。其次，对 $g = 0$，在 $\partial\Sigma_R \cap X_n$ 上 $P^*_n f(z) \neq 0$。于是由 (1.6.3)，Brouwer 度 $d(P^*_n f(z) - g, 0, \Sigma_R \cap X_n)$ 是奇数，从而不为 0。由度的同伦不变性，$d(P^*_n(f(z) - g), 0, \Sigma_R \cap X_n) \neq 0$。这意味着对 $n \geq N$，方程 $P^*_n(f(z) - g) = 0$ 在 $\Sigma_R \cap X_n$ 中有解，因而对 $n \geq N$，Galerkin 逼近 $(5.2.1)_n$ 有解 $\{z_n\}$，这些解自动满足先验估计 $\|z_n\| < R$。定理证毕。

和 5.2A 节一样，下面列举一些条件，由它们可以推出条件（G′）。

(5.2.15) 设 f 是从 X 到 X^* 的有界连续算子，如果存在一个全连续算子 $R: X \to X^*$ 使得对 $P = f - R$、对一切 $x, z \in X$ 有

(5.2.16) $(Px - Pz, x - z) + f(x - z) \geq c(\|x - z\|)$,

其中 f 上半弱连续，$f(0) = 0$, $c(r)$ 是实值正连续函数，当且仅当 $r \to 0$ 时 $c(r) \to 0$. 那么 f 满足条件 (G').

证明: 如果 $x_n \to x$, $f(x_n) \to y$ 弱收敛，且 $(f(x_n), x_n) \to (y, x)$，那么由简单的计算可知 $(Px_n - Px, x_n - x) \to 0$. 又因 $x_n \to x$ 弱收敛，故 $\overline{\lim}\,(f(x_n - x) \leq 0$. 于是从 (5.2.16) 推出 $\lim\limits_{n\to\infty} c(\|x_n - x\|) = 0$. 因为 $c(r)$ 连续，当且仅当 $\beta = 0$ 时 $c(\beta) = 0$，所以 $x_n \to x$ 在 X 中强收敛.

对 (5.2.3) 中讨论的拟线性椭圆型算子类，我们证明如下的与 (G') 类似的条件.

(5.2.17) **定理** 设 A 是满足椭圆型条件 (5.2.13) 的拟线性算子. 此外还假定

(a) 相应的抽象算子 $\mathscr{Q}: \mathring{W}_{m,p}(\Omega) \to W_{-m,q}(\Omega)$ 满足 5.2B 节提到的条件以及条件

(*)如果 $u_n \to u$ 弱收敛，那么 $(P(u_n, u_n) - P(u, u_n), u_n) \to 0$;

(b) 对固定的 y，有可积函数 $c_0(y) > 0$ 和 $c_1(y)$ 使

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x, y, z) z_\alpha \geq c_0(y) |z|^p - c_1(y).$$

那么由共轭性得到的与 A 相应的抽象算子 $\mathscr{Q}$ 满足条件 (G').

证明: 首先注意到，因为 $\mathscr{Q}$ 满足条件 (a)，由条件 (G') 的假设，$\mathscr{Q}u_n$ 在 $\mathring{W}_{-m,q}(\Omega)$ 中强收敛到 $\mathscr{Q}u$.

为证 $u_n \to u$ 在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 中强收敛，我们先证明，对 $|\alpha| = m$, (i) 积分 $\int_\Omega |D^m u_n|^p$ 等度绝对连续, (ii) $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ 依测度收敛. 那么，由 Vitali 定理就得到所希望的强收敛. 根据 (5.2.13)，从假设条件直接推出 (ii). 另一方面，为证 (i)，我们这样来用条件 (b) 和 (*):

由条件 (5.2.5) 和 $(\mathscr{Q}u_n, u_n)\to(\mathscr{Q}u, u)$，我们不难得出 $(Pu_n, u_n)\to(Pu, u)$，然后从条件(*)推出

(5.2.18) $$(P(u, u_n), u_n)\to(Pu, u).$$

根据定义和条件 (b)，

$$(P(u,u_n),u_n)=\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\gamma|<m}}\int_\Omega A_\alpha(x, D^\gamma u, D^m u_n)D^\alpha u_n$$

$$\geqslant c_0(D^\gamma u)|D^m u_n|^p-c_1(D^\gamma u),$$

所以

(5.2.18′) $$c_1(D^\gamma u)+\sum_{\substack{|\alpha|=m\\|\gamma|<m}}\int_\Omega A_\alpha(x, D^\gamma u, D^m u_n)D^\alpha u_n$$

$$\geqslant c_0(D^\gamma u)|D^m u_n|^p.$$

应用与等度绝对连续积分有关的结论，(5.2.13)，$D^\alpha u_n\to D^\alpha u$ 依测度收敛，以及 $\sum\limits_{|\alpha|=m}A_\alpha(x, y, z)z_\alpha$ 的正性，可推出函数

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha(x, D^\gamma u, D^m u_n)D^\alpha u_n$$

在 Ω 上有等度绝对连续积分。这样一来，由不等式 (5.2.18′) 推出，当 $|\alpha|=m$ 时 $|D^\alpha u_n|^p$ 的积分同样有等度绝对连续性。于是在 $\overset{\circ}{W}_{m,p}(\Omega)$ 中 $u_n\to u$ 强收敛。结论得证。

5.2D 梯度算子的 Rayleigh-Ritz 逼近

当 f 是梯度算子时，Galerkin 逼近 $(5.2.1)_n$ 取特别漂亮的形式。这时 $f(x)=F'(x)$，其中 $F(x)$ 是定义在 X 上的 C^1 实值泛函。这时 $(5.2.1)_n$ 的解恰是定义在 X_n 上的泛函 $\varphi_n(x)=F(x)-(g, x)$ 的临界点。从而可以用有限维临界点理论来研究 $(5.2.1)_n$，在 1.6 节曾简单讨论过这个强有力的方法。由于历史的原因，这个方法称作 Rayleigh-Ritz 逼近。我们在这里考虑一类非线性特征值问题，以此来说明 Rayleigh-Ritz 方法。

我们研究方程

(5.2.19) $\lambda_1\mathscr{L}'(x)=\lambda_2\mathscr{B}'(x)$，　$x\in\{x\mid\mathscr{L}(x)=\text{常数}, x\in X\}$

的解. 它可以作为 Rayleigh-Ritz 逼近解的极限而得出，这些逼近是

(5.2.20) $\lambda_1^{(n)}P_n^*\mathscr{D}'(x)=\lambda_2^{(n)}P_n^*\mathscr{B}'(x)$,

$$x\in\{x|\mathscr{D}(x)=\text{常数},x\in X_n\}.$$

首先证明一个和(5.2.19)的第一特征元逼近有关的结果.

(5.2.21) 设 $\mathscr{D}(x)$ 和 $\mathscr{B}(x)$ 是两个 C^1 实值泛函，定义在可分的自反 Banach 空间 X 上，使

(i) $\mathfrak{M}=\{x|\mathscr{D}(x)=\text{常数}\}$是 X 中有界闭集；

(ii) $Ax=\mathscr{D}'(x)$ 是有界连续映射，满足条件(G')；

(iii) $B(x)=\mathscr{B}'(x)$ 全连续，当且仅当 $x=0$ 时 $\mathscr{B}(x)=0$.

那么，可在 $\bar{x}\in\mathfrak{M}$ 达到上确界 $c_1=\sup\limits_{\mathfrak{M}}\mathscr{B}(x)$，其中 $\bar{x}$ 满足方程

(5.2.22) $$\lambda_1A\bar{x}=\lambda_2B\bar{x},$$

λ_1 和 λ_2 是两个不同时为零的实数. 而且 $c_1=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{\mathfrak{M}\cap X_n}\mathscr{B}(x)$，元素 $(\bar{x},\lambda_1,\lambda_2)$ 是序列 $(x_n,\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)})$ 的极限，该序列满足(5.2.20)并有极值性质

$$\sup_{\mathfrak{M}\cap X_n}\mathscr{B}(x)=\mathscr{B}(x_n),\quad x_n\in X_n\cap\mathfrak{M}.$$

证明： 我们首先指出，根据假设条件，集合 $\mathfrak{M}\cap X_n$ 紧，故对每个 n，可在元素 $x_n\in\mathfrak{M}\cap X_n$ 处达到 $c_{1,n}=\sup\limits_{\mathfrak{M}\cap X_n}\mathscr{B}(x)$. 于是对每个 n，有不同时为零的常数 $\lambda_1^{(n)}$, $\lambda_2^{(n)}$ 使三元组 $(x_n,\lambda_1^{(n)},\lambda_2^{(n)})$ 满足(5.2.20). 不失一般性，可设 $|\lambda_1^{(n)}|+|\lambda_2^{(n)}|=1$，使(必要时选子序列) $\lambda_1^{(n)}$ 和 $\lambda_2^{(n)}$ 收敛到某个 λ_1 和 λ_2，且 $|\lambda_1|+|\lambda_2|=1$.

因为 X 是自反 Banach 空间，且序列 $\{\|x_n\|\}$, $\{\|Ax_n\|\}$ 一致有界，故可以假定，再选适当的子序列后，$x_n\to\bar{x}$ 弱收敛，$Ax_n\to y$ 弱收敛. 设 $\lambda_1\neq0$，因为算子 A 满足条件(G')，我们得到 $x_n\to\bar{x}$ 强收敛，$y=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}Bx$，以及

$$\lambda_1^{(n)}(Ax_n,x_n)=\lambda_1^{(n)}(P_n^*Ax_n,x_n)$$
$$=\lambda_2^{(n)}(P_n^*Bx_n,x_n)\to\lambda_2(Bx,x).$$

由于 $\mathfrak{M}$ 闭，$\bar{x}$ 属于 $\mathfrak{M}$，根据 (5.2.1) 中的讨论，$\bar{x}$ 满足 (5.2.22)。

最后，我们排除 $\lambda_1=0$ 的可能性。如果 $\lambda_1=0$，那么 $\mathscr{B}'(\bar{x})=0$，故 $\bar{x}=0$。因为 $\mathscr{B}(x)$ 是弱连续泛函，由此得出

$$0=\mathscr{B}(\bar{x})=\lim_{n\to\infty}\mathscr{B}(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sup_{\mathfrak{M}\cap X_n}\mathscr{B}(x)=c_1.$$

但是这与 (5.2.21) 的条件 (iii) 相矛盾。所要的结果得证。

现在简单提提更一般的临界点的结果，它们可由有限维逼近和 Ljusternik-Schnirelmann 畴数理论得出(请参看 6.6 节)。

(5.2.23) **定理** 设泛函 $\mathscr{Q}(x)$ 和 $\mathscr{B}(x)$ 满足 (5.2.21) 的条件，此外还假定

(a) $\mathscr{Q}(x)$ 和 $\mathscr{B}(x)$ 是 x 的偶泛函，

(b) 对 $x\neq 0$，$(\mathscr{Q}'(x),x)$ 和 $\mathscr{B}(x)$ 严格正。那么实数

(5.2.24) $$c_N=\sup_{[A]_N}\inf_A\mathscr{B}(x)$$

是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{M}=\{x\mid\mathscr{Q}(x)=\text{常数},\ x\in X\}$ 时的临界值，其中

(5.2.25) $$[A]_N=\{A\mid A\subset\mathfrak{M},\ A\ \text{紧},\ \operatorname{cat}(A/Z_2,\mathfrak{M}/Z_2)\geqslant N\}.$$

而且对每个固定的 N，有序列 $(\bar{x}_{N,n},\lambda_{N,n})$ (其中 $c_{N,n}=\mathscr{B}(\bar{x}_{N,n})\to c_N$，$\bar{x}_{N,n}\in\mathfrak{M}\cap X_n$)使 $(\bar{x}_{N,n},1,\lambda_{N,n})$ 满足 Rayleigh-Ritz 逼近 $(5.2.1)_n$，且有极小极大特性 $c_{N,n}=\sup\limits_{[A\cap X_n]}\inf\limits_{A\cap X_n}\mathscr{B}(x)$。而且对每个 N，都有子序列 $(\bar{x}_{N,n_j},\lambda_{N,n_j})$ 在 $X\times\mathbf{R}^1$ 中强收敛到 $(\bar{x}_N,\lambda_N)$，其中 $\bar{x}_N\in\mathscr{B}^{-1}(c_N)\cap\mathfrak{M}$ 是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{M}$ 时的临界点，$(\bar{x}_N,\lambda_N)$ 满足方程 $\mathscr{Q}'(\bar{x}_N)=\lambda_N\mathscr{B}'(\bar{x}_N)$。

关于这个结果的证明，建议读者去看 Rabinowitz 的文章 (1973)。

5.2E Navier-Stokes 方程的稳态解

设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中有界区域，粘性不可压缩流体在 Ω 内的三维稳态流的 Navier-Stokes 方程可以写成

(5.2.26) $$-\nu\Delta u+(u\cdot\nabla)u+\nabla p=g,$$

(5.2.27) $$\operatorname{div} u = 0,$$

(5.2.28) $$u|_{\partial\Omega} = \beta(x),$$

其中 $u(x)$ 记流体的速度向量，ν 记流体的粘度，p 是压力，g 是作用在流体上的外力，$\beta(x)$ 是 $u(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上的值。我们用(5.2.1)中讲的 Galerkin 逼近格式证明，对 ν 的任意值，只要适当限制 $\beta(x)$，方程组(5.2.26)—(5.2.28)总有解存在。由极限过程可以证明，对于无界区域，方程组(5.2.26)—(5.2.28)的类似方程也有解。下面证明

(5.2.29) **定理** 只要 $g \in L_2(\Omega)$ 和 $\beta(x)$ 是某个函数 $\beta_*(x)$ 的边界值，方程组(5.2.26)—(5.2.28)总有1.5节意义下的广义解 $u(x)$，其中 $\beta_*(x)$ 是定义在 $\bar{\Omega}$ 上使 $\nabla\beta_*$ Hölder 连续的函数，$\beta_*(x)$ 满足：(i) $|\nabla\beta_*(x)|$ 或 $|\beta_*(x)|$ 充分小，或者 (ii) $\beta_*(x) = \operatorname{curl}\gamma(x)$，其中 $\gamma(x) \in C^1(\bar{\Omega})$，这时要求 $\partial\Omega$ 属于 C^2 类。当 g 在 $\bar{\Omega}$ 中 Hölder 连续时，解 $u(x)$ 还在 Ω 中和 $\partial\Omega$ 的足够光滑的部分上光滑。

证明：我们这样进行．首先用算子方程 $f(u)=g$ 的解来表示(5.2.26)—(5.2.28)的广义解，其中 f 是 Hilbert 空间 $\mathring{H}$ 上的映射，$\mathring{H}$ 的元素为无散向量 $w(x)$，$w(x)$ 的分量 $w_i(x) \in \mathring{W}_{1,2}(\Omega)$．然后证明，当适当限制 $\beta(x)$ 时，算子 f 满足(5.2.3)的条件．从1.5节提到的结果可推出广义解的正则性．

首先设 $\beta(x) \equiv 0$．那么在 $\mathring{H}$ 中的弱解一一对应于算子方程

(5.2.30) $$\nu u - \mathscr{B}(u, u) = \tilde{g}$$

的解，其中 $\mathscr{B}(u, u)$ 和 $\tilde{g}$ 定义在 $\mathring{H}$ 上，由公式

(5.2.31) $$(\mathscr{B}(u, u), \phi) = \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega u_k u \cdot D_k\phi;$$

$$(\tilde{g}, \phi) = \int_\Omega g \cdot \phi$$

确定．和4.3节中的证明一样，算子 $\mathscr{B}(u) = \mathscr{B}(u, u)$ 是映 $\mathring{H}$ 到自身的全连续映射．此外，对 $u \in C_0^\infty(\Omega) \cap \mathring{H}$，有

(5.2.32) $(\mathscr{B}(u, u), u) - \sum_{k=1}^{3} \int_\Omega u_k u \cdot D_k u = \frac{1}{2} \int_\Omega u \cdot \nabla u^2 = 0.$

因为 $\operatorname{div} u = 0$ 和 $u|_{\partial\Omega} = 0$，于是对 $0<\nu<\infty$，$f_\nu(u) = \nu u - \mathscr{B}(u, u)$ 满足条件(G).由(5.2.32)，

$$(\nu u - \mathscr{B}u, u)/\|u\| = \nu\|u\|.$$

故 $f_\nu(u)$ 强制. 由定理(5.2.3)，算子方程(5.2.30)有解 $\tilde{u} \in \mathring{H}$；从而(5.2.26)—(5.2.28)在 $\mathring{H}$ 中有广义解 $\tilde{u}$.

更一般些，如果 $\beta(x)\neq 0$，根据定理条件，可暂假定存在常数 $c, \nu>c\geqslant 0$ 和对一切 $u \in \mathring{H}$，

(5.2.33) $$|(\mathscr{B}(\beta_*, u), u)| \leqslant c\|u\|^2_{\mathring{H}}.$$

那么，如用 $u = w + \beta_*$ 表示(5.2.26)—(5.2.28)的广义解，$w \in \mathring{H}$ 就满足方程

(5.2.34) $\nu w - \{\mathscr{B}(w, w) + \mathscr{B}(w, \beta_*) + \mathscr{B}(\beta_*, w)\} = f_*,$

其中 $f_* = f - \beta_* - \mathscr{B}(\beta_*, \beta_*)$. 下面指出，可把定理(5.2.3)用于(5.2.34). 为此，注意到算子 $\mathscr{B}(w, w)$，$\mathscr{B}(w, \beta_*)$ 和 $\mathscr{B}(\beta_*, w)$都是全连续的，于是对 $0<\nu<\infty$，(5.2.34)左端的算子 $f_\nu(w)$满足条件(G). 而且可和(5.2.32)中同样证明，$(\mathscr{B}(w, \beta_*), w) = 0$，故由(5.2.33)，

$$(f_\nu(w), w)/\|w\|_{\mathring{H}} = \nu\|w\| + (\mathscr{B}(\beta_*, w), w)/\|w\|$$

$$\geqslant (\nu - c)\|w\|.$$

于是 $f_\nu(w)$ 满足(5.2.3)的强制性条件，因而方程(5.2.34)有解，方程组(5.2.26)—(5.2.28)在 $\mathring{H}$ 中有广义解.

最后，在 $\beta(x)$满足定理的限制时，我们来证明(5.2.33).先假定对 $x \in \bar{\Omega}$，或者 $|\beta_*(x)| \leqslant M_0$，或者 $|\nabla\beta_*(x)| \leqslant M_1$. 那么，由(5.2.31)，用 $|\beta_*(x)| \leqslant M_0$ 和 Sobolev 不等式有

$$|(\mathscr{B}(\beta_*, w), w)| \leqslant M_0\|w\|_{0,2}\|\nabla w\|_{0,2} \leqslant M_0 c_1\|w\|^2_{\mathring{H}};$$

用 $|\nabla\beta_*(x)| \leqslant M_1$ 得

$$|(\mathscr{B}(\beta_*, w), w)| \leqslant M_1\|w\|^2_{L_2} \leqslant M_1 c_1^2\|w\|^2_{\mathring{H}}.$$

于是，无论 $\nu > M_0 c_1$ 或 $\nu > M_0 c_1^2$，(5.2.33)都成立. 另一方面，在定理的假设条件 (ii) $\beta_*(x) = \operatorname{curl} \gamma(x)$ 的情形，我们用不等式

(5.2.35) $$\int_\Omega \frac{v^2}{\rho^2} \leqslant \bar{c}_1 \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

其中 $v \in \overset{0}{W}_{1,2}(\Omega)$，$\rho = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$. 并构造一个依赖于两个参数 k，α 的函数 $h(t) \in C^\infty[0, \infty)$，使 (i) 对 $0<t<k\alpha$，$h(t)=1$，对 $t>(1-k)\alpha$，$h(t)=0$，和 (ii) 当 $k\to 0$ 时 $th'(t)\to 0$ 且对 α，t 一致. 令

$$\rho(x) = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega),$$

$$\beta_{**} = \mathrm{curl}(h(\rho)\gamma(x)),$$

那么

$$\beta_{**} = h\,\mathrm{curl}\,\gamma - \gamma \times h'(\rho)\nabla\rho.$$

因而在 $\partial\Omega$ 上 $\beta_{**} = \beta_*$，在 $\partial\Omega$ 的某个小邻域外 $\beta_{**} \equiv 0$. 因为 $\rho^2 \in C^2$，所以 $\beta_{**} \in C^{1,\mu}(\bar{\Omega})$. 此外，对任意 $\varepsilon>0$，$|\rho\beta_{**}(x)| < \varepsilon^*$. 由 (5.2.35)，对一切 $u \in C_0^\infty(\Omega)$，

$$|(\mathscr{B}(\beta_{**}, u), u)| \leqslant \left|\left(\mathscr{B}\left(\rho\beta_{**}, \frac{u}{\rho}\right), u\right)\right|$$

$$\leqslant \varepsilon \left\|\frac{u}{\rho}\right\|_{0,2} \|\nabla u\|_{0,2}$$

$$\leqslant \varepsilon c_1 \|u\|^2.$$

于是对充分小的 $\varepsilon>0$，β_{**} 满足 (5.2.33)，这就完成了定理的证明.

5.3 同伦，映射度及其推广

5.3A 一些启发

设给定非线性算子 $f \in C(X, Y)$，很多与 f 有关的问题可由考察 f 的拓扑性质来进行研究. 特别，如用一个较简单的映射 $\tilde{f}$ 代替 f，$\tilde{f}$ 和 f 属于同一(适当定义的)同伦类，有时可把 f 的问题转化为求解较简单的映射 $\tilde{f}$ 的类似问题.

对于有限维空间间的映射来说，这种做法是众所周知的. 例如，设 $f(z)$ 是一个给定的解析函数，定义在闭圆盘 $\Sigma_R = \{z \mid |z| \leqslant R\}$ 上，那么，当在 $\partial\Sigma_R = \{z \mid |z| = R\}$ 上 $f(z) \neq 0$ 时，f 在 Σ_R 内零点的个数是拓扑不变量. 事实上，根据 Rouche 定理，定义在 Σ_R 上的两个解析函数 f 和 $f+g$，如果它们在 $\partial\Sigma_R$ 上同伦，则在 Σ_R 内有同样多个零点. 这里同伦是指对 $z \in \partial\Sigma_R$ 和 $t \in [0, 1]$，都有 $f(z) + tg(z) \neq 0$. 更一般些，由 (1.6.7) 中

* 原文如此——译注.

的 H. Hopf 定理，两个定义在 $\mathbf{R}^N$ 中球 $\Sigma_R=\{x|\|x\|\leqslant R\}$ 上的连续映射 f 和 $f+g$，如在 $\partial\Sigma_R=\{x|\|x\|=R\}$ 上有 $f\neq 0$，那么，f 和 $f+g$ 在 Σ_R 中有相同"代数"个数零点的必要且充分条件是它们同伦.

这里，我们将对定义在 Banach 空间有界区域上的算子的非线性问题讨论这个同伦方法。但是在无穷维的情形，如不修正同伦的概念，马上就会出现难以克服的障碍.

(5.3.1) 设 H 是无穷维可分 Hilbert 空间，那么任意两个映球面 $\partial\Sigma_1=\{x|\|x\|_H=1\}$ 到自身的连续映射 f 和 g 同伦，即是说，存在连续映射 $h(x, t):\partial\Sigma_1\times[0, 1]\to\partial\Sigma_1$，使 $h(x, 0)\equiv f(x)$ 和 $h(x,1)\equiv g(x)$.

证明： 基本想法是构造一个从球 $\Sigma_1=\{x|\|x\|_H\leqslant 1\}$ 到自身的没有不动点的映射 σ，并由此构造一个从 Σ_1 到 $\partial\Sigma_1$ 的保核收缩 $r(x)$，那么所要的同伦就是

$$h(x, t)=r(tg(x)+(1-t)f(x)).$$

为构造这个没有不动点的连续映射 σ，用 $(e_1, e_2,\cdots)$ 记 H 的一个规范完备正交基. H 的任一元素 x 可以写成

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}x_ie_i=(x_1, x_2, \cdots),\quad \|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2.$$

对 $x\in\Sigma_1$，定义 $\sigma(x)=(\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2,\cdots)$. 经过简单计算可知 $\|\sigma(x)\|^2=1$，故如果 σ 有不动点 $y\in\Sigma_1$，必有 $\|y\|=1$. 于是，如果 $y=(y_1, y_2,\cdots)$，那么对 $i=1, 2,\cdots$，$y_i=y_{i+1}$，同时 $y_1=0$，因而 $y=0$. 这和 $\|y\|\neq 0$ 相矛盾. 所以 σ 是 Σ_1 到 Σ_1 的没有不动点的连续映射.

为构造映 Σ_1 到 $\partial\Sigma_1$ 的保核收缩 $r(x)$，我们这样进行. 对 $x\in\Sigma_1$，因为 σ 没有不动点，连接 x 和 $\sigma(x)$ 的直线 $L(x)$ 不会退化成一个点，于是可以将 $L(x)$ 延长与 $\partial\Sigma_1$ 相交于点 $r(x)$，$r(x)$ 位于 x 与 $\sigma(x)$ 相对的一侧，映射 $x\to r(x)$ 就是所求的保核收缩. 这是因为，显然它连续地映 Σ_1 到 $\partial\Sigma_1$，由它的作法，它还保持 $\partial\Sigma_1$ 上的点不变.

5.3B 连续映射的紧扰动

由于(5.3.1)，在5.3B—5.3D 中，我们将限于讨论下面一类特殊的同伦变形。

(5.3.2) **定义** 设S是 Banach 空间X的闭子集，还设f是$X\to Y$ (Banach 空间)的固定的连续映射. 称g_0和g_1在S上(关于f)紧同伦，如果存在一个连续紧映射$h(x,t)$: $S\times[0,1]\to Y$，使$g_0(x)=f(x)+h(x,0)$，$g_1(x)=f(x)+h(x,1)$，并且在$S\times[0,1]$上，$g(x,t)=f(x)+h(x,t)\neq 0$.

显然，在f的紧扰动类$\mathfrak{C}_f(S,Y)$上，紧同伦定义一个等价关系，其中$\mathfrak{C}_f(S,Y)=\{g|g=f+K, K\text{紧}, g\in C(S,Y)\}$. 今后，我们将试图用可计算的拓扑不变量来表示所得的等价类，并借助于映射f的紧扰动的性质来解释这些不变量. 为得出这方面的第一个结果，设S是X的闭子集，用O记$X-S$的一个分支.

(i) 记号和定义 记$\mathfrak{C}_f(S,Y)=\{g|g=f+K, K\text{紧}, g\in C(S,Y)\}$，$\mathfrak{C}_f^0(S,Y)=\{g|g\in\mathfrak{C}_f(S,Y)$，在$S$上$g\neq 0\}$.

设O是$X-S$的一个分支，$g\in\mathfrak{C}_f^0(S,Y)$，如果$g$有延拓$\tilde{g}\in\mathfrak{C}_f^0(O\cup S,Y)$，那么称作$g$(关于$O$)**非本质**，反之，称作$g$**本质**. 还记

$$\mathfrak{C}_f^p(S,Y)=\{g|g\in\mathfrak{C}_f(S,Y),\ \text{在}S\text{上}\ g\neq p\}.$$

于是，如果$g\in\mathfrak{C}_f^0(S,Y)$的每个延拓$\tilde{g}\in\mathfrak{C}_f(O\cup S,Y)$在$O$中有零点，那么$g$(关于$O$)本质. 显然，为证一个给定的$g\in\mathfrak{C}_f(O\cup S,Y)$在$O$中有零点，我们只需证明$g$(关于$O$)本质. 根据下面一个结果，我们将看到，如果$g$在$S$上与某个本质映射$\tilde{g}$紧同伦，则$g$同样本质.

(5.3.3) **定理** 关于O的本质性和非本质性在紧同伦下不变.

证明: 只需对非本质映射$g\in\mathfrak{C}_f^0(S,Y)$证明这个结果. 假定$g,\tilde{g}\in\mathfrak{C}_f^0(S,Y)$在$S$上紧同伦，$g$有延拓$G\in\mathfrak{C}_f^0(O\cup S,Y)$. 我们构造$\tilde{g}$的一个延拓$\tilde{G}\in\mathfrak{C}_f^0(O\cup S,Y)$，使$G$和$\tilde{G}$在$O\cup S$上紧同伦.

因为 g 和 $\tilde{g}$ 紧同伦，故有紧连续映射 $h(x,t):S\times I\to Y$ 满足定义。令 $T_0=(S\times[0,1])\cup(S\cup O\times\{0\})$，定义 $h^*:T_0\to Y$ 如下：

$$h^*(x,t)=\begin{cases}G(x)-f(x), & x\in S\cup O,\ t=0,\\ h(x,t), & x\in S,\ t\in[0,1].\end{cases}$$

那么 h^* 在 T_0 紧连续。由紧算子的可延拓性 (2.4.4)，h^* 可被延拓成 $(S\cup O)\times[0,1]\to Y$ 的紧连续映射 $H^*(x,t)$。

为定义所要的延拓 $\tilde{G}$，我们应该保证在 $S\cup O$ 上 $\tilde{G}\neq 0$。令 $S_1=\{x|x\in S\cup O,\ f(x)=-H^*(x,t),\ t\in[0,1]\}$，$S$ 和 S_1 是不相交闭集。根据 Tietze 定理，有连续函数 $Y(x):S\cup O\to[0,1]$，在 S_1 上为 0，在 S 上为 1。在 $(S\cup O)\times[0,1]$ 上规定 $H(x,t)=H^*(x,Y(x)t)$，再令 $\tilde{G}(x)=f(x)+H(x,1)$。

下面证明，(i) $\tilde{G}$ 是 g 的延拓。这是因为，如果 $t=1$ 和 $x\in S$，则

$$H(x,1)=H^*(x,Y(x))=H^*(x,1)=h(x,1).$$

于是 $\tilde{G}(x)=f(x)+h(x,1)=g$。(ii) 对 $x\in S\cup O$，有 $\tilde{G}(x,t)=f(x)+H(x,t)\neq 0$，否则有 $x\in S_1$，从而

$$f(x)+H(x,0)=f(x)+H^*(x,0)=G(x)=0.$$

因为 $G(x)$ 在 $S\cup O$ 上没有零点，最后这个等式不可能成立。于是不仅延拓 $\tilde{G}$ 存在，而且因为 $f(x)+H(x,0)=G(x)$，G 和 $\tilde{G}$ 在 $S\cup O$ 上紧同伦。

为进一步发展这个想法，我们指出有限维同伦中的如下事实，它对理解后面理论的发展很重要。

(5.3.4) 连续映射 $f:S^n\to S^m$ 关于开球 $\sum_1=\{x|x\in R^{n+1},\ \|x\|<1\}$ 本质的必要充分条件是同伦类 $[f]\in\pi_n(S^m)$（参看 1.6 节）非平凡。

证明：设 f 非本质，于是 f 在 $\overline{\sum}_1$ 上有一个延拓 F，使 $F(x)\neq 0$。对 $t\in[0,1]$，令 $H(x,t)=F(tx)/|F(tx)|$。我们指出，由这个同伦映射 $f(x)$ 同伦于点 $H(x,0)=F(0)/|F(0)|$。于是 $[f]\in\pi_n(S^m)=0$。反之，如果 $[f]=0$，对 $t\in[0,1]$，有 $f(x)$ 的

同伦映射 $h(x,t)$，$|h(x,t)|=1$. 从而 $F(tx)=h(x,t)$ 是所要的 f 到 $\sum_1$ 的非零延拓.

为继续往下，还需建立(5.3.4)在无穷维时的类似结论，它将给出一个准则，以断定所给映射 $g\in\mathfrak{C}_f(S,Y)$ 是否本质. 在下一小节，我们将对一些特别选取的 f 着手处理这个题目以及其它问题. 首先，我们选 f 为 Banach 空间 X 到自身的恒等映射. 其次，假定 f 是映 X 到 Y，指标 p 非负的线性 Fredholm 映射 L.

例(5.3.1)指出，无穷维时类似于(5.3.4)的结果是更精细的. 事实上下面我们只考虑固定线性算子的紧同伦. 在这种情形我们来证明(5.3.4)在无穷维时的一个推广. 但是，一般说来(对 index $L>0$)，这些推广要用到相应无穷维映射稳定同伦类的概念（关于稳定这个词在这里的含义请看(1.6.8)，即对 $p>0$，同伦群 $\{\pi_{n+p}(S^n), n=1,2,\cdots\}$ 仅仅对充分大的 n 才是同构的）. 于是，一般说来，为得出我们的类中的映射的本质性，只检验充分近的有限维逼近的同伦类是不够的（参看下面 5.3D 一节）.

5.3C 恒等算子的紧扰动和 Leray-Schauder 度

用 I 记某 Banach 空间到自身的恒等映射，D 记 X 的有界区域，∂D 记 D 的边界. 和有限维情形一样，借助于称作 Leray-Schauder 度的函数，可以在 $\mathfrak{C}_I(\partial D,X)$ 的紧同伦类和整数集 Z 之间建立一一对应. 此外，我们还要建立映射 $g\in\mathfrak{C}_I(\partial D,X)$ 本质的必要且充分条件，这正是它的 Leray-Schauder 度不等于 0.

假定在 ∂D 上 $g(x)\neq p$，其中 $g=I+C$ 是恒等映射的紧扰动. 由一个类似于 5.2 节中 Galerkin 逼近的程序可以定义 g 关于点 $p\in X$ 和 D 的 Leray-Schauder 度，记作 $d(I+C,p,D)$. 假定已经知道作用于维数相同的有限维空间间连续映射的 Brouwer 度的事实 (1.6.3)，我们可以分两步定义此整值函数 $d(I+C,p,D)$:

第一步: 如果紧连续映射 $C: D\to X$ 有有限维值域（即 $C(D)\subset X_n$，X_n 是 X 的某个有限维线性子空间)，假定 $p\in X_n$，那

么对 $I+C\in\mathfrak{C}_l(\partial D,X)$，定义 $I+C$ 在 p 点关于 D 的 Leray-Schauder 度为

$$d(I+C,p,D)=d_B(I+C,p,D\cap X_n). \tag{5.3.5}$$

这时根据假设，对 $x\in\partial D\cap X_n$，$(I+C)x\neq p$，所以 Brouwer 度 d_B 是有限整数。从而只要此整数与包含 p 和 $C(D)$ 的有穷维子空间无关，Leray-Schauder 度就有定义。

第二步：对一般的紧连续映射 $C:D\to X$，由 (2.4.2)，我们可以用一个紧连续映射序列 C_n 逼近 C，C_n 有有限维值域：C_n: $D\to X_n$ (X_n 是 X 的有限维子空间)，使得 $\sup\limits_{x\in D}\|C_nx-Cx\|\leqslant 1/n$。还假定 $p\in X_n$，逼近序列的 Leray-Schauder 度存在（如第一步中所述），我们规定

$$d(I+C,p,D)=\lim_{n\to\infty}d(I+C_n,p,D). \tag{5.3.6}$$

显然，如果极限 (5.3.6) 存在且与逼近序列 C_n 无关的话，那么函数 $d(I+C,p,D)$ 有定义。

为检验刚才给出的 $d(I+C,p,D)$ 的定义，我们作出如下的

(5.3.7) **第一步的验证**：我们证明，由 (5.3.5) 定义的整数 $d(I+C,p,D)$ 与包含 p 和 $C(D)$ 的有限维线性子空间 X_n 无关。设有穷维子空间 X_n 和 X_p 两者都包含 $\{p\}\cup C(D)$。因为 $X_p\cap X_n$ 也是有穷维子空间，且包含 $\{p\}\cup C(D)$，于是只需 (i) 假设 $I+C$ 的定义域局限于 $D\cap X_p$，(ii) 假设 $X_n\subset X_p$，和 (iii) 证明

$$d_B(I+C,p,D\cap X_n)=d_B(I+C,p,D\cap X_p)$$

(一个仅与有穷维 Brouwer 度性质有关的命题). 为此，设 $\dim X_n=n$，$\dim X_p=n+k$，选取 X_p 中的基 $\mathscr{B}$ 使我们可以把 X_n 和 $\mathbb{R}^n$，X_p 和 $\mathbb{R}^{n+k}$ 等同起来。因为 Brouwer 度与基 $\mathscr{B}$ 的选取无关，所以如果一旦证明了下面的引理，(5.3.7) 就得证。

(5.3.8) **引理** 设 Δ 是 $\mathbb{R}^{n+k}$ 中有界区域，f 是 $\Delta\to\mathbb{R}^n$ 的连续映射，对于任意的 $p\in\mathbb{R}^n$，只要对一切 $x\in\partial\Delta$ 都有

$$x + f(x) \neq p,$$

那么

$$d_B(I + f, p, \Delta) = d_B(I + f, p, \Delta \cap \mathbf{R}^n).$$

证明：根据 Brouwer 度的定义，只需假定 f 是 C^1 映射以及映射 $x + f(x)$ 的 Jacobi 行列式 $J_{n+k}(x)$ 在集合 σ 上不为 0，其中 $\sigma = \{x | x \in \Delta, x + f(x) = p, p \in \mathbf{R}^n$ 固定$\}$. 那么，由 1.6 节中 Brouwer 度的性质，

$$\begin{aligned} d_B(I + f, p, \Delta) &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \det J_{n+k}(x) \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \det \begin{pmatrix} J_n(x) & 0 \\ 0 & I_k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\sigma} \operatorname{sgn} \det(J_n(x)) \\ &= d_B(I + f, p, \Delta \cap \mathbf{R}^n), \end{aligned}$$

其中 I_k 是 $\mathbf{R}^k$ 中的恒等矩阵，$J_n(x)$是映射 $x+f(x)$ 在 $\Delta \cap \mathbf{R}^n$ 上的 Jacobi 行列式.

(5.3.9) **第二步的验证**：我们从证明下面这件事开始：对充分大的 n，整数 $d(I + C_n, p, D)$（如第一步中所规定的）都有定义（亦即对一切 $x \in \partial D$，$(I + C_n)x \neq p$）. 于是，根据

$$I + C - p \in \mathfrak{C}_I(\partial D, X),$$

我们首先可以找到一个数 $\alpha > 0$，使 $\inf\limits_{x \in \partial D} \|(I + C)x - p\| \geq \alpha$. 否则将有有界序列 $\{x_i\} \in \partial D$，使 $\|x_i + Cx_i - p\| \to 0$. 由 C 的紧性（在必要时选取子序列），可以假定 Cx_i 收敛到某个 y，因而 $\{x_i\}$ 收敛到（譬如说）z. 那么，因为 ∂D 闭，所以 $z \in \partial D$，$z + Cz = p$，得出矛盾. 现在不难证明，对充分大的 n，

$$I + C_n - p \in \mathfrak{C}_I(\partial D, X).$$

这是因为对 $x \in \partial D$ 和 $n \geq n_0$（某个充分大的正整数），

$$\begin{aligned} \|x + C_n x - p\| &\geq \|x + Cx - p\| - \|Cx - C_n x\| \\ &\geq \alpha - \frac{1}{2}\alpha \geq \frac{1}{2}\alpha. \end{aligned}$$

下面证明对充分大的 n，$d_n = d(I + C_n, p, D)$ 稳定。设对任意整数 $n, m \geqslant n_0$，$\sup\limits_{\partial D} \|Cx - C_n x\| \leqslant \frac{1}{2}\alpha$，我们证明对任意整数 $n, m \geqslant n_0$ 有 $d_n = d_m$. d_n 稳定这个事实保证了极限(5.3.6)存在，且和逼近序列 C_n 无关。为此，设整数 $n, m \geqslant n_0$，$C_n(D) \subset X_n$，$C_m(D) \subset X_m$，用 X_{n+m} 记由 X_n 和 X_m 张成的子空间。那么由引理(5.3.8)，

(5.3.10) $d_B(I + C_n, p, D \cap X_n) = d_B(I + C_n, p, D \cap X_{n+m})$.

对映射 $I + C_m$ 有类似结果。对 $x \in D \cap X_{n+m}$，令

$$h(x, t) = x + tC_m x + (1 - t)C_n x - p,$$

使在 $\partial D \cap X_{n+m}$ 上，

$$\begin{aligned} \|h(x, t)\| &\geqslant \|x + Cx - p\| - t\|C_m x - Cx\| \\ &\quad - (1 - t)\|C_n x - Cx\| \\ &\geqslant \alpha - \frac{1}{2}(t\alpha + (1 - t)\alpha) \\ &\geqslant \frac{1}{2}\alpha. \end{aligned}$$

根据 Brouwer 度的同伦不变性和(5.3.8)，$d_n = d_B(I + C_n, p, D \cap X_{n+m}) = d_B(I + C_m, p, D \cap X_{n+m}) = d_m$.

现在可以叙述并证明前面曾提到过的 Leray-Schauder 度的两个主要性质。

(5.3.11)**定理** 设 $f, g \in \mathfrak{C}_I^0(\partial D, X)$，其中 D 是 X 的凸区域，那么 f 和 g 紧同伦的必要且充分条件是 $d(f, 0, D) = d(g, 0, D)$.

(5.3.12)**定理** 设 $f \in \mathfrak{C}_I^0(\partial D, X)$，那么当且仅当 $d(f, 0, D) \neq 0$ 时，f 关于 D 本质。于是，如果 $d(f, 0, D) \neq 0$，方程 $f(x) = 0$ 在 D 中必有解。

(5.3.11) 的证明：根据刚才给出的 Leray-Schauder 度的定义，如果 $f, g \in \mathfrak{C}_I(\partial D, X)$ 紧同伦，那么显然 f 和 g 在零点有相同的 Leray-Schauder 度。

反之，假定 $f, g \in \mathfrak{C}_I(\partial D, X)$ 和 $d(f, 0, D) = d(g, 0, D)$，根

据刚才所给的定义，可以假定紧算子 $c = f - I$ 和 $c_1 = g - I$ 的值域都包含于同一 X_n 之中，X_n 是X的一个有穷维线性子空间。此外，由把 f 和 g 的定义域限制到 $X_n \cap D$ 上，我们还可以假定 $d_B(I + c, 0, X_n \cap D) = d_B(I + c_1, 0, X_n \cap D)$。根据 H. Hopf 的结果(1.6.7)，$f$ 和 g 在 $X_n \cap \partial D$ 上同伦，于是有定义在闭集 $\Sigma = [X_n \cap \partial D] \times [0, 1]$ 上的连续函数 $h(x, t) = x + c(x, t)$，使 $h(x,0) = f(x)|_{X_n \cap \partial D}$ 和 $h(x,1) = g(x)|_{X_n \cap \partial D}$。在 X_n 中选取基底 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$，可以把 $c(x, t)$ 写成一组实值连续函数 $c_i(x, t)(i = 1, 2, \cdots, n)$。根据 Tietz 定理，这些连续函数的每一个都可以连续延拓到 $\partial D \times [0, 1]$ 上成函数 C_i，并且

$$\sup_{\Sigma} |C_i(x, t)| = \sup_{\partial D \times [0,1]} |c_i(x, t)|.$$

考虑函数

$$H(x, t) = x + \sum_{i=1}^{n} C_i(x, t) e_i,$$

因为 $H(x, t) - x$ 有闭的有界有限维值域，所以它在 $\partial D \times [0, 1]$ 上紧。此外，对 $x \in \partial D$，$H(x, 0) = f$，$H(x, 1) = g$，而且 $H(x, t)$ 是类 $\mathfrak{C}_I(\partial D, X)$ 中 f 和 g 间的紧同伦。这是因为，根据定义对 $t \in [0, 1]$ 和 $x \in \Sigma$ 有 $H(x, t) \neq 0$，同时对 $x \in \partial D \cap X_n$，由于 x 和 $C(x, t)$ 线性无关，所以 $H(x, t) \neq 0$。故 f 和 g 在 ∂D 上紧同伦。

(5.3.12)的证明： 首先假定 $f \in \mathfrak{C}_I(\partial D, X)$ 和 $d(f, 0, D) \neq 0$。由(5.3.11)，对恒等映射的任何紧扰动 $g = I + C$，

$$d(g, 0, D) = d(f, 0, D) \neq 0,$$

其中 g 在 $\overline{D}$ 上有定义，在 ∂D 上和 f 重合。事实上，f 和 g 的凸组合定义 f 到 g 的一个紧同伦。于是只需证方程 $g(x) = 0$ 有解。根据 Leray-Schauder 度的定义，可以假定存在一个映射到 $g_n = I + C_n$，其中 C_n 是有有限维值域的紧映射，

$$\sup_{D} \|C_n x - Cx\| \leq \frac{1}{n},$$

且对充分大的 n, $d(I+C_n, 0, D)=d(I+C, 0, D)\neq 0$. 把 $I+C_n$ 限制到D和 X_n 的交上(X_n 是X的有限维线性子空间), 我们得到

$$d_B(I+C_n, 0, D\cap X_n)=d(I+C, 0, D)\neq 0.$$

根据 Brouwer 度的性质,由此推出 $(I+C_n)x=0$ 有解 $x_n\in D\cap X_n$.

其次证明 $\{x_n\}$有收敛子序列,若记其极限为 $\bar{x}$,则 $g(\bar{x})=0$. 事实上, $\{x_n\}$ 有界,且对适当的子序列 $\{x_{n_i}\}$, $\{Cx_{n_i}\}$ 收敛. 于是

$$(5.3.13)\quad \|x_{n_i}+Cx_{n_i}\|\leqslant\|Cx_{n_i}-C_{n_i}x_{n_i}\|+\|C_{n_i}x_{n_i}+x_{n_i}\| \leqslant \frac{1}{n_i}.$$

故当 $n\to\infty$ 时, $\{x_{n_i}\}$ 收敛到某个 $\bar{x}$,因而由 (5.3.13) 推出

$$g(\bar{x})=0.$$

为证其逆, 我们设 $f\in\mathfrak{C}_l(\partial D, X)$, $d(f, 0, D)=0$, 但 f 本质. 那么根据 (5.3.3) 和 (5.3.11),所有使 $d(\tilde{f}, 0, D)=0$ 的映射 $\tilde{f}\in\mathfrak{C}_l(\partial D, X)$ 都应该是本质的. 因而根据 Leray-Schauder 度的定义, 所有定义在$D\cap X$上的连续映射 $f\in\mathfrak{C}_l(\partial D, X)$, 只要在 $\partial D\cap X$ 上 $f\neq 0$,就都应该是本质的. 特别,常映射是本质的,这就得出矛盾. 于是为使 $f\in\mathfrak{C}_l(\partial D, X)$ 本质,必须 $d(f, 0, D)\neq 0$.

Leray-Schauder 度的性质　当把 Leray-Schauder 度 $d(f, p, D)$ 看作三个变元 f, p, D 的函数时, 我们来描述它的基本性质, 然后再用这些性质讨论 $\mathfrak{C}_l(\partial D, X)$ 中一般映射类的度的计算. 为此证明:

(5.3.14)**定理**　设D是 Banach 空间X的有界区域,$f-p\in\mathfrak{C}_l^0(\partial D, X)$, 那么 Leray-Schauder 度 $d(f, p, D)$ 是有如下性质的整数:

(i) (同伦不变性)　如果对 $t\in[0, 1]$, $(h(x, t)-p)\in\mathfrak{C}_l^0(\partial D, X)$ 是紧同伦映射, $h(x, 0)=f$, 那么对一切 $t\in[0, 1]$, $d(f, p, D)=d(h(x, t), p, D)$.

(ii) 如果 p 和 p' 位于 $X-f(\partial D)$ 的同一分支中，则

$$d(f, p, D)=d(f, p', D).$$

(iii) $d(f, p, D)$ 由它在 ∂D 上的值唯一确定。

(iv)（连续性） $d(f, p, D)$ 是 $f\in C(D)$（对一致收敛而言）和 p 的连续函数(局部为常数)。

(v)（区域分解性）如果 D 是有限个不交开集 $D_i(i=1, 2, \cdots, N)$ 之并，$\partial D_i\subset\partial D$，在 $\bigcup_{i=1}^{N}\partial D_i$ 上 $f(x)\neq p$，那么

$$(5.3.15)\qquad d(f, p, D)=\sum_{i=1}^{N}d(f, p, D_i).$$

(vi)（切除性） 如果 Δ 是 $\overline{D}$ 的闭子集，在其上 $f(x)\neq p$，那么 $d(f, p, D)=d(f, p, D-\Delta)$.

(vii)（Cartese 乘积公式） 如果 $X=X_1\oplus X_2$，$D_i\subset X_i$，$f=(f_1, f_2)$，$f_i:D_i\to X_i(i=1, 2)$，$D=D_1\times D_2$ 和 $p=(p_1, p_2)$，那么当右端有定义时，$d(f, p, D)=d(f_1, p_1, D_1)d(f_2, p_2, D_2)$.

(viii)（指数定理） 如果 $f(x)=p$ 的解在 D 中孤立，O_i 是任一充分小的只含一个解的开集，且 $\bigcup_i O_i$ 包含所有的解，那么

$$d(f, p, D)=\sum_i d(f, p, O_i).$$

证明：(i)：这个结果是 (5.3.11) 的另一种说法。

(ii)：首先注意到，因为 f 在 ∂D 上正常，所以 $f(\partial D)$ 闭.于是 $X-f(\partial D)$ 的每个分支都是开的弧连通集，把这些分支记作 D_i，那么有 D_i 中的弧 $p(t)$，$t\in[0, 1]$，连接 p 和 p'，并且与 $f(\partial D)$ 不交。于是由 (i)，对 $t\in[0, 1]$，$d(f, p, D)=d(f, p(t), D)=d(f, p', D)$.

(iii)：设 f_0 是恒等映射的紧扰动，在 ∂D 上与 f 有相同的值.那么，根据 (i)，$h(x, t)=tf+(1-t)f_0$ 是连接 f 和 f_0 的紧同伦，所以 $d(f_0, p, D)=d(f, p, D)$.

(iv)：由定义和 (i) 直接推出。

(v)—(vii)：因为这里的每个结论对 Brouwer 度都成立，由 $d(f, p, D)$的定义推出，对于有有限维值域的映射 f 每个结论都成立，于是由逼近可知结论对所有 $f\in \mathfrak{C}_1^p(\partial D, X)$ 成立。

(viii)：用如下事实：如果 $f(x)=p$ 的解孤立，那么这些解的个数有限。再由度的切除性和区域的分解性直接得到指数定理。

现在把刚才建立的 Leray-Schauder 度的这几个性质用于讨论那些在 Banach 空间 X 的有界区域 D 有非零 Leray-Schauder 度的映射类。根据 (5.3.12)，这样的映射对 D 本质，因而特别重要。

(5.3.16)定理 设 $f\in \mathfrak{C}_1^p(\partial D, X)$，那么

(i) 如果 D 包含原点，$f=I-C$ 是线性同胚，那么

$$d(f, 0, D)=(-1)^{\beta},$$

其中 β 是开区间 $(1, \infty)$ 内 C 的所有特征值的代数重数之和。更一般些，假定 f 是恒等算子的紧扰动，且是 D 到自身的同胚，那么当 D 包含原点时，$d(f, 0, D)=\pm 1$

(ii) 如果 f 渐近线性，即存在一个紧线性映射 C，使当 $\|x\|\to\infty$ 时，$\|f(x)-x+Cx\|/\|x\|\to 0$。D 是包含原点的充分大的区域。那么，当 $I-C$ 是线性同胚时，有 $d(f,0,D)=(-1)^{\beta}$，其中 β 是 C 在开区间 $(1, \infty)$ 上的所有特征值的代数重数之和。

(iii) 如果 f 是奇映射，D 是包含原点的对称区域，那么 $d(f, 0, D)$ 是奇数。更一般地，如果把奇性条件减弱为，对 $t\in[0, 1]$ 和 $x\in\partial D$，$f(x)\neq tf(-x)$，亦有 $d(f, 0, D)$ 是奇数。

(iv) 设 $f=I+N$，N 紧，对 $t\in[0, 1]$，方程族

$$f_t(x)=x+tNx=0$$

所有的解都位于某个包含原点的有界区域 D 中，则 $d(f, 0, D)=1$。

(v) 如果 X 是复 Banach 空间，f 复解析，那么：

(a) $d(f, 0, D)\geqslant 0$;

(b) $d(f, 0, D)>0$ 的必要且充分条件是 $0\in f(D)$;

(c) $d(f, 0, D)\geqslant 2$ 的必要且充分条件是：或者方程 $f(x)=0$ 在 D 中至少有两个解，或者在 $f(x)=0$ 的唯一解 x_0 处线性算

子 $f(x_0)$ 没有逆.

证明: (i): 设 $f=I-C$ 是线性同胚, $f\in\mathfrak{C}_I(\partial D, X)$, 又设 X_1 是 C 的相应于 $(1,\infty)$ 中特征值的不变子空间的直和. 根据假设, $\dim X_1=\beta<\infty$, 因而 $X=X_1\oplus X_2$, 其中 X_2 在 f 的作用下不变. 由(5.3.14), 如果令 $f_i=f|_{X_i}$, $i=1,2$, 和 $f=(f_1,f_2)$, 那么有

(5.3.17) $d(f,0,D)=d(f_1,0,D\cap X_1)d(f_2,0,D\cap X_2)$.

在有限维空间 $D\cap X_1$ 上, f_1 紧同伦于 $-I$. 事实上, 对 $t\in[0,1]$,令 $h(x,t)=-(1-t)x+t(I-C)x=[(2t-1)I-tC]x$, 我们指出在 $\partial D\cap X_1$ 上 $h(x,t)\neq 0$. $t=0$ 显然,对 $t=1$ 和 t 的其它值可从假设条件推出. 设若不然, C 将在 X_1 上有特征值属于区间 $(-\infty,1)$. 从而由(1.6.3), $d(f,0,D\cap X_1)=(-1)^\beta$. 其次,我们注意到,由紧同伦 $g(x,t)=x-tCx$, f_2 和恒等映射 I 在 $\partial D\cap X_2$ 上同伦. 显然在 $(\partial D\cap X_2)\times[0,1]$ 上 $g(x,t)\neq 0$,这是因为,如果为 0, C 将在 X_2 上有特征值属于区间 $(1,\infty)$,于是 $d(f_2,0,D\cap X_2)=1$, 再由(5.3.17), $d(f,0,D)=(-1)^\beta$.

最后,设 f 是同胚映射,其逆为 f^{-1}, $f(D)=D$. 那么,因为 D 包含原点,由定义得 $d(I,0,D)=1$, 故

$$1=d(ff^{-1},0,D)=d(f,0,D)d(f^{-1},0,D),$$

从而 $d(f,0,D)=\pm 1$.

(ii): 当 ∂D 是某个包含原点的充分大区域的边界时, 由度数在 ∂D 上的同伦不变性, f 紧同伦于 $I-C$. 事实上,如果 $f=I-C-N$ 线性渐近于 $I-C$,那么当 $\|x\|\to\infty$ 时, $\|N(x)\|/\|x\|\to 0$,因而连接 f 和 $I-C$ 的紧同伦 $h(x,t)=x-\{Cx+tNx\}$ 在 ∂D 上不为 0. 事实上, 由 $h(x,t)=0$ 将推出存在某个 $t_0\in[0,1]$ 和 $x_0\in\partial D$,使 $\|x_0-Cx_0\|=t_0\|Nx_0\|$. 因 $I-C$ 有逆, 对某个常数 $\alpha>0$,有 $\alpha\|x_0\|\leqslant\|x_0-Cx_0\|=t_0\|Nx_0\|\leqslant\|Nx_0\|$. 因为 α 与 x 无关, 这最后一个不等式与 $\|x\|\to\infty$ 时 $\|Nx\|/\|x\|\to 0$ 相矛盾. 于是由度的同伦不变性以及上面的(i),得出

$$d(f,0,D)=d(I-C,0,D)=(-1)^\beta.$$

(iii)：设 $f=I+N$ 是奇映射，N 紧．那么当 N 的值域为有限维时，$d(f,0,D)$ 是奇数．这是因为，根据 (1.6.3)，Brouwer 度有这个性质．在一般情形，只需证明可用有有限维值域的奇紧映射 N_ε 来任意逼近 N．下面我们就来构造这样的逼近，使对一切 $x\in D$ 和任意 $\varepsilon>0$，都有 $\|Nx-N_\varepsilon x\|\leqslant\varepsilon$．为此，设 M 是在 D 上对 N 的一个有限维逼近，$\|Mx-Nx\|\leqslant\varepsilon$．那么算子

$$N_\varepsilon x=\frac{1}{2}(Mx-M(-x))$$

显然是一个奇映射，它有有限维值域，且

$$\begin{aligned}\|Nx-N_\varepsilon x\|&\leqslant\frac{1}{2}\{\|Mx-Nx\|+\|M(-x)-N(-x)\|\}\\&\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

为证更一般的结果，我们指出映射 $f=I+N'$ 在 ∂D 上紧同伦于

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}\\&=x+\frac{1}{2}\{N'(x)-N'(-x)\},\end{aligned}$$

从而可应用度的同伦不变性．事实上，考虑定义在 ∂D 上的紧同伦

$$\begin{aligned}h(x,t)&=(1+t)^{-1}\{f(x)-tf(-x)\}\\&=x+(1+t)^{-1}\{N'(x)-tN'(-x)\}.\end{aligned}$$

因为对 $t\in[0,1]$ 和 $x\in\partial D$，$f(x)\neq\lambda f(-x)$．由此推出，对 $t\in[0,1]$ 和 $x\in\partial D$，$h(x,t)\neq 0$，于是由上一段的结果，

$$\begin{aligned}d(f,0,D)&=d(h(x,t),0,D)\\&=d\left(\frac{1}{2}(f(x)-f(-x)),0,D\right)\end{aligned}$$

是奇数．

(iv)：根据假设条件，连接 f 和 I 的紧同伦 $f_t=I+tN$ 在 $\partial D\times[0,1]$ 上不为 0，因而由度的同伦不变性．

$$d(f, 0, D) = d(f_t, 0, D) = d(I, 0, D) = 1.$$

(v): 为对一般复解析算子 $f \in \mathfrak{C}_l(\partial D, X)$ 证明 (a) 和 (b), 我们首先用结果 (1.6.2), 断定集合 $\sigma = \{x | x \in D, f(x) = 0\}$ 是有限集,于是可记σ 中点为 $x_1, \cdots, x_n$. 此时有

$$(5.3.18) \qquad d(f, 0, D) = \sum_{i=1}^{n} d(f, 0, O_i),$$

其中 O_i 是 D中小的两两不交开邻域,对 $i = 1, \cdots, n$, $x_i \in O_i$. 于是为证 (a) 和 (b), 只需证明 (5.3.18) 右端的每一项非负. 为此注意到, 在加上任一个小的复线性映射 $L_i(x - x_i)$ 到 f 上后(其中 $L_i(x - x_i)$ 有限秩), 我们可以假定 $f'(x_i)$ 是线性同胚. 那么, 因为 $f(x) = f'(x_i)(x - x_i) + O(\|x - x_i\|^2)$, 由度的同伦不变性推出,如果 O_i 是 x_i 的充分小的邻域,就有

$$d(f, 0, O_i) = d(f'(x_i), 0, O_i) = (-1)^{\beta}.$$

但是因为 $f'(x_i)$ 是定义在复 Banach 空间X上的线性同构, β 是偶数,从而 (a), (b) 都得证.

最后注意到,对于 $f = I + N$,当N是紧复解析算子且有有限维值域时,性质 (c) 成立. 这是因为它对 Brouwer 度成立 (参看 (1.6.3)(x)). 而且,由证明 (a) 和 (b) 时用到的论证,如果 $f(x) = 0$ 的解不唯一,那么 $d(f, 0, D) \geqslant 2$. 因而为证 (c), 只需在下面的假定下证明它就可以了. 即设 $f(x) = 0$ 的解在D中存在且唯一,不妨设其为 $x_0 = 0$, $f'(0)$ 在 X_1 上没有逆, $X_1 \cap \operatorname{Ker} f'(0) = 0$ 和 $X = \operatorname{Ker} f'(0) \oplus X_1$. 那么 $f'(0) = I + C$, C 紧,令 $C_1 = PC$ 和 $C_2 = (I - P)C$, 其中P和 $I - P$ 分别记X到 $\operatorname{Ker} f'(0)$ 和 X_1 上的标准投影, 那么 $I + C_2$ 在X上有逆. 因为 C_2 紧,存在一个连续复值函数 $\alpha(t)$,对 $t \in [0,1]$ 有定义, $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$, 使得算子 $I - \alpha(t)C_2$ 有逆 (事实上,C 有离散的特征值, 它们唯一可能的极限点是零). 那么, 根据反函数定理 (3.1.1) 的解析形式, 如果 $f(x) = x + Cx + R(x)$, 其中 $Rx = O(\|x\|^2)$, 则对一切 $t \in [0, 1]$, 算子 $I + \alpha(t)[C_2x + Rx]$ 有唯一确定的逆

$h(x,t)=x+\mu(x,t)$，它连接 $h(x,0)=x$ 和 $h(x,1)=[x+C_2x+Rx]^{-1}$. 在原点的一个邻域U中，后者有定义且连续. 而且，因为 $x=h(x,t)+\alpha(t)(C_2+R)h(x,t)$，所以 $x-h(x,t)=\mu(x,t)$ 对 x 和 t 紧. 如果在 $\bar{U}\times[0,1]$ 中 $f\circ h(x,t)=0$，那么 $h(x,t)=0$，故 $x=0$. 于是由度的同伦不变性(对 $t\in[0,1]$)，

$$\begin{aligned} d(f,0,U) &= d(f\circ h(x,t),0,U) \\ &= d(f\circ h(x,1),0,U) \\ &= d(I+C_1h(x,1),0,U). \end{aligned}$$

$C_1h(x,1)$是紧复解析映射，且有有限维值域，此外，$x+C_1h(x,1)$ 在$x=0$点的 Fréchet 导算子是 $I+C_1(I+C_2)^{-1}$. 于是映射 $\tilde{f}(x)=x+C_1h(x,1)$（限制在X相应的有限维子空间上）是恒等映射的紧复解析扰动，且有有限维值域，使 $\tilde{f}'(0)$ 没有逆，同时 $d(\tilde{f},0,D)$ 有定义. 应用 Brouwer 度的类似结果(1.6.3)，就得 $d(f,0,D)\geqslant 2$.

最后考虑使映射 $f\in\mathfrak{C}_I(\partial D,X)$ 关于D非本质的条件.

(5.3.19)定理 设 $f=I+C$ 定义在 Banach 空间X的有界区域上，是恒等映射的紧扰动. 那么，如果 $d(f,p,D)$ 有定义，则

(i) 当 f 映D入X的一个真子空间 X' 且 $p\in X'$ 时，那么

$$d(f,p,D)=0;$$

(ii) 如果在D中 $f(x)\neq p$，那么 $d(f,p,D)=0$. 当X是复 Banach 空间，f 复解析时，其逆也真.

证明: (i)：令 Δ_p 是 $X-f(\partial D)$ 包含p的开分支，因为 $f(D)$ 含于X的真子空间 X' 中，那么有点 $q\in\Delta_p$ 而不属于 f 的值域，否则 $\Delta_p\subset f(D)$. 根据(5.3.14(ii))以及证明 Leray-Schauder 度的性质(5.3.12)时用到的论证，我们有

$$d(f,p,D)=d(f,q,D)=0.$$

(ii) 这是证明(5.3.12)和(5.3.16)时所用论证的直接推论.

5.3D 线性 Fredholm 映射的紧扰动和稳定同伦

设L是一个固定的有界线性 Fredholm 映射，指标p非

负[1]，L 映 Banach 空间 X 到自身. 令 $D=\{x\,|\,\|x\|<1\}$ 和 $\partial D=\{x\,|\,\|x\|=1\}$. 我们用已知同伦不变量来描绘 $\mathfrak{C}_L^0(\partial D, X)$ 的紧同伦类. 此外，在某些情形，我们还要确定 $g\in\mathfrak{C}_L^0(\partial D, X)$ 本质的具体的必要且充分条件，再把它用于研究算子方程的可解性.

为达到这些目标，和球面 S^n 同伦群的序列有关的概念 $\{\pi_{n+p}(S^n)\}$ 很重要（其中 p 固定，n 跑遍正整数）. 如在 1.6 节中提到过的，对固定的 $p>0$，只要 $n>p+1$，群 $\pi_{n+p}(S^n)$ 是同构的有限 Abel 群. 这个同构是由标准的，所谓 Freundenthal 同纬映射 $E:\pi_{n+p}(S^n)\to\pi_{n+1+p}(S^{n+1})$ 给出的. 这些同构群称作 S^n 的 p 次稳定同伦群. 对于 $[f]\in\pi_{n+p}(S^n)$ 的给定的代表 $f:S^{n+p}\to S^n$，找出它的 Freundenthal 同纬映射 Ef 的简单解析表达式是很有用的. 为做到这一点，令 $\tilde{f}$ 是 f 的到 $S^n\subset\mathbf{R}^{n+1}$ 内部的任一连续延拓，那么根据第一章给出的同纬映射的几何定义以及 Ef 的同伦类只与 $[f]$ 有关这个事实，不难验证 $Ef:S^{n+p+1}\to S^{n+1}$ 可表为

$$(*)Ef(x_1,\cdots,x_{m+1})=(\tilde{f}(x_1,\cdots,x_{m+1}),x_{m+2})/|\tilde{f}(x_1,\cdots,x_{m+2})|,$$

其中 $m=n+p$. 此外，不难把(＊)推广以给出 $E^kf\ (k>0)$ 的简单解析表达式，其中 E^kf 是 Freundenthal 同纬映射的各种叠合.

在 $p=0$ 时，$\pi_n(S^n)\approx\mathbf{Z}$（整数加法群），所得映射 $f:S^n\to S^n$ 的同伦类在同纬映射下有很好的性质，即在同纬映射下这种映射的本质性保持不变. 一般说来，如果 $p>0$ 就不再是这样. 事实上，在经过同纬映射多次作用后，映射 $f:S^{n+p}\to S^n$ 的一些重要的同伦性质可能被丢掉了. 有一个和群 $\pi_3(S^2)$ 有关的恰当的例子，已知 $\pi_3(S^2)$ 同构于 $\mathbf{Z}$，同时 $\pi_4(S^3)\approx\mathbf{Z}_2$，于是，如果 $[\alpha]$ 是 $\pi_3(S^2)$ 的生成元，那么每当 n 是偶数时，就有 $E[n\alpha]=0$.

给出映射 $f:S^{n+p}\to S^n$，我们可以把它和它的同伦类

1) 读者应该注意到，在负指标 Fredholm 算子 L 的情形，同伦性的考虑是没有多大意义的. 事实上，在 3.1 节我们证明了形若 $L+C$ 的 C^1 算子的值域应是稀疏的. 于是，扰动的简单想法，即把 $L+C$ 的值域中的点 p 扰动到附近的另一点 p'，而不影响 $L+C$ 的可能性是不可能的，这与(3.1.46)的一般结论相抵触——原注.

$[f]\in\pi_{n+p}(S^n)$联系起来.此外,还考虑它经过Freundenthal 同纬映射重复作用所得到的序列以及相应的同伦类$E^k[f]\in\pi_{n+p+k}(S^{n+k})$.当整数$k$使$n+k>p+1$时,把$E^k[f]$称作$f$的稳定同伦类.下面证明

(5.3.20)定理 (Svarc, 1964) 设L是映X到Y的线性 Fredholm 算子,指标p非负,那么紧同伦类$\mathfrak{C}_L^p(\partial D, Y)$一一对应于$p$阶稳定同伦群$\pi_{n+p}(S^n)$的元素$(n>p+1)$。

证明: 基本的想法是重复构造 Leray-Schauder 度时的论证来代替 Brouwer 度的稳定同伦性. 设$f\in\mathfrak{C}_L^p(\partial D,Y)$,我们可以假定$f=L+C$,其中:(i) 由(2.4.2),当$n>p+1$时,$C$的值域包含于$Y$的有限维子空间$Y_{n+1}$. (ii)由(1.3.38),$L$是满射.因为$L$是指标为$p$的线性 Fredholm 算子,可以分解$X$为 $\text{Ker}\,L\oplus X_1$,其中$\dim\text{Ker}\,L=p$,$L: X_1\to Y$是有界线性同胚,其逆为L^{-1}.把f的定义域限制到$\partial D_{n+p}\cap\{\text{Ker}\,L\oplus L^{-1}(Y_{n+1})\}$,就得到一个自然映射$\tilde{f}:\partial D_{n+p}\to Y_{n+1}$,它定义为:$\tilde{f}(x)=\tilde{f}(x_0+x_1)=Lx_1+C(x_0+x_1)$. 因为$f\in\mathfrak{C}_L^p(\partial D, Y)$,不仅对$x\in\partial D$有$f(x)\neq 0$,而且存在一个正数$\alpha>0$,使$\inf_{x\in\partial D}\|f(x)\|\geqslant\alpha>0$. 否则,采用(5.3.9)的证法,再用上线性 Fredholm 算子的性质,将有序列$\{x_n\}\in\partial D$,使$x_n\to\bar{x}$和$\|f(x_n)\|\to 0$,从而$f(\bar{x})=0$和$\bar{x}\in\partial D$. 于是对$x\in\partial D_{n+p}$, $f(x)\neq 0$. 可以定义一个$S^{n+p}\to S^n$的自然映射如下:对$x\in S^{n+p}$, $f_0(x)=\tilde{f}(x)/\|\tilde{f}(x)\|$. $f\in\mathfrak{C}_L(\partial D, Y)$的同伦类和$\pi_{n+p}(S^n)$之间的对应关系$\tau$定义为$\tau([f])=[f_0]$. 为说明$\tau$有意义,必须证明$\tau$与定义$[f_0]$的有限维子空间$Y_n$的选择无关. 为此,设$Y_{n+1}$和$Y_{m+1}$是两个包含$C(\partial D)$的子空间,$n, m>p+1$,用$f_0$和$g_0$记球面间的相应映射. 那么子空间$Y_{n+1}\cap Y_{m+1}$包含$C(\partial D)$,$f_0$和$g_0$都可看作同一映射

$$\gamma_0:\partial D\cap\{\text{Ker}L\cap h^{-1}(Y_{n+1}\cap Y_{m+1})\}\to Y_{n+1}\cap Y_{m+1}$$

经过同纬映射多次作用后的延拓. 根据基本的拓扑结果,f_0和g_0两者的同伦类$[f_0]$,$[g_0]$仅与$[\gamma_0]$有关. 再由 Freundenthal 同

纬映射的性质，$[f_0]$ 和 $[g_0]$ 处于同一稳定同伦类中。

下证 τ 一对一。设有两个紧连续映射 $f, g(\in \mathfrak{C}_L^0(\partial D, Y))$ 都是 L 的有限维扰动，$\tau[f]=\tau[g]$，我们证明，f 和 g 在 $\mathfrak{C}_L^0(\partial D, Y)$ 中紧同伦。根据和 (5.3.4) 的第一部份中相似的论证，可以假定 $f-L$ 和 $g-L$ 的值域都包含于 Y 的同一个有限维子空间 $\tilde{Y}$ 中，那么有紧同伦 $Lx_1+C(x, t): \tilde{X}\times[0, 1]\to\tilde{Y}$ 从 f 到 g. 重复 (5.3.11) 的证明，由 Tietze 延拓定理保证映射 $Lx_1+C(x, t)$ 可以被延拓成 $\mathfrak{C}_L^0(\partial D, Y)$ 中的紧同伦。

余下的只是证明：如果 f_1 和 f_2 是 $\mathfrak{C}_L^0(\partial D, Y)$ 中两个紧同伦的映射，那么 $\tau[f_1]=\tau[f_2]$. 为此，先假定 $f_1=L+C_1$ 和 $f_2=L+C_2$，每个紧算子 $C_i(i=1,2)$ 有有限维值域，那么和 (5.3.11) 中一样，可以选取连接 f_1 和 f_2 的紧同伦 $h(x, t)=L+C(x, t)$, $t\in[0, 1]$，使得对一切 $t\in[0, 1]$，$C(x,t)$ 的值域都含于同一有限维子空间之中. 根据上面给出的 $\tau[f_1]$ 和 $\tau[f_2]$ 的定义，可得出 $\tau[f_1]=\tau[f_2]$. 在一般情形，我们首先指出，对紧同伦类 $[f_1]$ 和 $[f_2]$ 来说，每个都有特殊形式的 $\tilde{f}_i=L+C_i$ 作为代表 $(i=1, 2)$，其中 C_i 紧。那么由刚才给出的证明指出，对应 $\tau[f_i]=\tau[\tilde{f}_i](i=1,2)$ 与代表 $\tilde{f}_i$ 的选取无关。

(5.3.20′) **推论** 在 Svarc 定理的条件下，当且仅当 (5.3.20) 的证明中构造的自然映射 τ 使 $\tau(f)=0$ 时，$f=L+C$ 非本质。

证明：令 $g=L-c_0$，其中 c_0 是到 Y 中的常映射，选 c_0 使其不属于集合 $\{x_1 | x=x_1+x_0,\ X=X_1\oplus\mathrm{Ker}\,L,\ x_1\in X_1, \|x\|\leqslant 1\}$ 在 L 下的像集，根据 (5.3.20) 中 τ 的定义，$\tau[g]=0$，如假定 $\tau[f]=0$，则 $\tau[f]=\tau[g]$，f 和 g 有相同的紧同伦类。根据 (5.3.3)，因为 g 非本质，故 f 必然非本质。

另一方面，如果 f 非本质，f 必然紧同伦于 g，但 $\tau[g]=0$，故 $\tau[f]=0$。

用下面的办法可以简单地构造出一个 $\mathrm{index}\,L=p$ 的映射 $g\in\mathfrak{C}_L(\partial D, Y)$. 设 ϕ 紧，$I+\phi$ 是从 Banach 空间 X 到线性子空间 Y 上的映射，Y 的余维数为 p，同时在 X 的单位球面 $\partial\Sigma_1$ 上，

$x+\phi(x)\neq 0$. 根据 (5.3.19), Leray-Schauder 度 $d(I+\phi, 0, \partial\Sigma_1)=0$,故映射 $I+\phi$ 关于 0 非本质. 但是,由把 I 和 ϕ 的值域限制到 Y, 并把 $g=I+\phi$ 看作从 X 的单位球面到 Y 的映射,就可以用 g 来研究 $I+\phi$ 的性质,事实上,如用 L, C 记将 I,ϕ 的值域局限到 Y 所得的映射, $g\in \mathfrak{C}_L(\partial D, Y)$, L 就可看作是指标为 p 的线性算子. 我们将确定这样的映射 g 本质的必要且充分条件.

对具奇异点的算子方程的应用

作为 Svarc 定理 (5.3.20) 的应用,我们研究一类简单的半线性算子方程的可解性问题. 这个半线性算子是 $L+N$, 其中 $L\in L(X,Y)$ 是指标 p 的线性 Fredholm 算子,N 是一致有界的紧映射. 在 $p\geqslant 0$ 的情形,当把 τ 看成 $\pi_{n-p}(S^n)$ 的元素时(n 充分大),如果 $L+N$ 相应的稳定同伦类非平凡, 那么从 (5.3.20) 可得到 $Lu+Nu=0$ 的一个可解性判别准则. 当 $p>0$ 时, 这个结果在应用时显然不方便. 事实上,如果 $p=0$, 如已经提到的,在同纬映射的反复作用下, 映射 $L+C$ 的有限维逼近的本质性仍然保持不变. 但是一般说来,如果 $p>0$,情形就不再如此. 于是必须补充一个一般的定理,它的条件比较简单,在具体问题中常常又易于验证.

今后我们不仅假定算子 N 一致有界, 而且对 N 的渐近性状作如下要求:

条件(A): 设 $X=\mathrm{Ker}L\oplus X_1$, P_0 是 Y 到 $\mathrm{coker}\, L$ 的标准投影, 那么, 每当 $x_1\in X_1$ 一致有界和 $x_0\in \mathrm{Ker}\, L$ 的范数充分大时, 都有 $\|P_0N(x_0+x_1)\|\neq 0$.

对于可以给出先验估计的那些算子方程来说, 一般都满足这个条件. 现在证明 (5.3.20) 的如下改进.

(5.3.21)定理 设 D_R 是 Banach 空间 X 中的球, 其半径 R 充分大,再设 $L+N\in \mathfrak{C}_L^0(\partial D_R, Y)$, 其中 N 在 X 上一致有界, 并满足上面的条件 (A). 那么 $L+N$ 本质的必要且充分条件是映射 $\tilde{\mu}(a)=\mu(a)/|\mu(a)|$: $S^{d-1}\to S^{d_*-1}$ 的稳定同伦类非平凡, 其中 $\mu(a)=P_0N(Ra)$, $d=\dim\,\mathrm{Ker}\, L$, $d_*=\dim\,\mathrm{Ker}\, L^*$, a 是 Ker

L 上范数为 1 的元素。

证明：首先证明，如果算子 $f=L+C$ 满足所述的条件，就可以由一个紧同伦在 ∂D_R 上形变成 $\tilde{f}(x_0, x_1)=(Lx_1, P_0Nx_0)$: $X_1\oplus\operatorname{Ker} L\to Y\oplus\operatorname{coker} L$。然后用证明 Svarc 的结果 (5.3.20)时给出的构造法证明，在 $Lx_1=x_1$ 时，当把 $\tilde{f}$ 看作 ∂D_R 的奇异自由映射时，$\tilde{f}$ 的同伦类对应于正规映射 $\tilde{\mu}$ 的稳定同伦类，其中 $\tilde{\mu}$ 相应于 $\mu(a)=P_0N(Ra)$。那么，因为映射 f 的本质性在线性同胚映射下不变，就不难得出要证的结果。

第一步：为讨论连接 f 到 $\tilde{f}$ 的紧同伦，我们把 f 写成 $f=(P_1f, P_0f)$，其中 P_1 和 P_0 分别是 Y 到 Y_1 和 coker L 上的标准投影。那么，考虑连接 f 和 $\tilde{f}$ 的紧同伦

$$h(x, t)=(Lx_1+tP_1Nx, P_0N(x_0+tx_1))。$$

如假定一致有界映射 N 满足条件 (A)，那么只要 R 充分大，在 $\partial D_R\times[0,1]$ 上必有 $h(x,t)\neq 0$。事实上，如果 $P_0N(x_0+tx_1)$ 和 Lx_1+tP_1Nx 两者都为 0，则 $\|x_0\|$ 和 $\|x_1\|$（从而 $\|x\|$）就应该充分小。

第二步：我们注意到，因为 $L:X_1\to Y_1$ 是线性同胚，不失一般性，可以设 $\tilde{f}(x_0, x_1)=(x_1, P_0Nx_0)$ 以及 coker $L\subset\operatorname{Ker} L$，使 $\operatorname{Ker} L=\operatorname{coker} L\oplus W$。在这种情况下，设 $\tilde{\mu}$ 是和 $P_0N(Ra)$ 相联系的规范映射，其稳定同伦类为 $[\mu]$，当把 $[\tilde{\mu}]$ 看作 $\pi_{d-1}(S^{d_*-1})$ 的元素时，用 (5.3.20) 证明中的构造法，可以断定 $\tilde{f}$ 的同伦类 $[\tilde{f}]$ 对应于 $[\tilde{\mu}]$。为验证这点，遵照 (5.3.20) 中的对应 τ 的构成法，我们用满射 $Lx=x_1+\varepsilon v$ 代替 $Lx=x_1$，其中 $\varepsilon>0$ 很小，$x=x_1+v+w$，$v\in\operatorname{coker} L=V$，$w\in W$，$Cx=P_0N(x_0)$，$\tilde{C}x=P_0N(x_0)-\varepsilon v$。$C$ 的值域$\subseteq\operatorname{coker} L$，我们可以把 C 看作 $X_1\oplus\operatorname{Ker}L\to X_k\oplus\operatorname{coker}L$ 的映射（X_k 是 k 维线性子空间，$k+n>p+2$）。令 $S^{n+p}=\{x\mid\|x\|=1, x\in\operatorname{Ker} L\oplus L^{-1}(V\oplus X_k)\}$，因为 $L^{-1}(V\oplus X_k)=V\oplus X_k$，我们可以把 S^{n+p} 和 $X_k\oplus V\oplus W$ 中的单位球等同起来。于是 $[f]$ 和映射 f 的规范化的同伦类重合，其中 $f(x)=(x_k+\varepsilon v)+P_0Nx_0-\varepsilon v=x_k+P_0Nx_0$，故 $\tau[f]$ 是 $[\tilde{\mu}(a)]$ 的

k 重 Freundenthal 同纬同态的同伦类 $E^k[\tilde{\mu}]$，由 k 的取法，$E^k[\tilde{\mu}]$ 稳定.

第三步 最后指出，由 (5.3.20′)，当且仅当 $\tilde{\mu}(a)$ 的稳定同伦类为 0 时，$\tilde{f}$(从而 f)非本质.

不稳定同伦群对算子方程的应用

类似于 (5.3.4)，取消可解性同伦判别法中的"稳定"一词，还可对刚才得到的结果 (5.3.21) 作出进一步的改进. 事实上，在 L 的指数 $p=0$ 时，由 (5.3.21) 推出，如果映射 $\tilde{\mu}(a)$ 的同伦类非平凡，那么算子方程 $Lx+Nx=0$ 可解. 另一方面，当 $p>0$ 时，简单考察同伦群 $\pi_{n+p}(S^n)$ 的表(在 Toda [1961] 中可找到) 就可看出，在利用 $\tilde{\mu}$ 的稳定同伦类作为可解性准则时，很多信息常常被丢失了，以致 $\tilde{\mu}$ 的同伦类的非平凡性不能保证可解性. 但是与此相反，有下面的比较强的结果成立.

(5.3.22)**定理** 设 $L\in L(X,Y)$ 是指标 p 非负的线性 Fredholm 算子，$N\in C^1(X,Y)$ 满足条件 (A)，并且 $\|N(x)\|$ 和 $\|N'(x)\|$ 均一致有界. 还假定对某个 $\varepsilon>0$，除了某个有限维空间 $W=\operatorname{Ker}L\oplus V$ 外，下面的不等式成立

(5.3.23) $\|Lw\|\geqslant(c+\varepsilon)\|w\|,\ \|PN'(u)w\|\leqslant C\|w\|,$

其中 P 是从 Y 到 $L(X/W)$ 上的标准投影. 那么如果 $\dim V=m$，只要 $E^m[\tilde{\mu}]$ 是 $\pi_{d+m-1}(S^{d_*+m-1})$ 的非平凡元素，则方程 $Lx+Nx=0$ 可解，其中 $E^m[\tilde{\mu}]$ 是 $[\tilde{\mu}]$ 的 m 次 Freudenthal 同纬同态(在上面 5.3D 中的定义下)，而 $[\tilde{\mu}]$ 是 $\tilde{\mu}$ 的同伦类. 特别，如果 $p=0$，$m=0$，或者更一般地，E^m 是 $\pi_{d-1}(S^{d_*-1})$ 到 $\pi_{m+d-1}(S^{m+d_*-1})$ 中的同构时，只要 $[\mu]$ 非平凡，那么方程有解.

证明：这里用到的基本想法是，应用简化定理 (5.1.9) 把可解性问题化为有限维的问题，然后再用 Freudethal 同纬映射的性质解决有限维问题.

为实现这个想法，我们写 $X=W\oplus W_1$，并注意到由简化引理(5.1.9) 推出，$Lu+Vu=0$ 的可解性问题可以化成对方程

(5.3.23′) $$Lw_0+P_YN(w_0+w_1[w_0])=0$$

的研究，其中 P_Y 是 $Y = L(W_1)\oplus Y_0 \to Y_0$ 的标准投影．此外，由简化引理和 Nu 在 Y 上一致有界可知 $\|w_1(w_0)\|$ 也在 W 上一致有界．现在考察 (5.3.23′)．再次把它分解成两部分，一部分在 $\mathrm{Ker}\, L$ 上，另一部分在 V 上．于是有 $W=\mathrm{Ker}\, L\oplus V$，可把 $w_0\in W$ 写成 $w_0 = x_0 + v$，以及 (5.3.23′) 的左端可以写成映射 $\tilde{g}(w) = (Lv + P_vN(w), P_0N(w_0 + w_1(w_0)))$．其次，我们注意到，在 W 中半径 R 充分大的球面上，由同伦变换

$$h(w, t) = (L_v + tP_vN(w), P_0N(x_0 + t(w_0 + w_1[w_0]))),$$

$g(w)$ 可以同伦变形成映射 $g_0(w) = (Lv, P_0N(x_0))$．事实上，在半径为 R 的球面 ∂D_R 上 (R 充分大)，由 N 的一致有界性和条件 (A) 再次推出，如果 $h(w, t) = 0$，$\|v\|$ 和 $\|x_0\|$ 两者都应当很小．从而在 ∂D_R 上 $h(x, t) \neq 0$．最后注意到，因为 L 是 V 到 $L(V)$ 的线性同胚，假定 L 是恒等映射不会影响 $g_0(w)$ 的同伦类的本质性，于是可把 $g_0(w)$ 写成 $g_0(w) = (v, P_0N(Ra))$，其中 $a\in\{a | a\in \mathrm{Ker}\, L, \|a\| = 1\}$．因而相应的规范映射 $\tilde{g}_0 = g_0/\|g_0\|$ 的同伦类 $[\tilde{g}_0]$ 与 $\tilde{\mu}$ 的 m 次 Freudenthal 同纬 $E^m[\tilde{\mu}]$ 重合，这就得出所要的结果．

附注:

(a) (5.3.22) 不要求 N 紧以保证它成立，这是它较 (5.3.21) 另一个显著的改进．

(b) 在下面的意义下结论 (5.3.22) 确实是加强，我们不难构造两个例子：(i) 不可解方程 $Lu + Nu = 0$，其中 L 和 N 满足定理(5.3.21)的条件，$[\tilde{\mu}]$ 的同伦类非平凡，以及 (ii) 一个可解方程，$[\tilde{\mu}]$ 的稳定同伦类是平凡的，但是 $[\tilde{\mu}]$ 的同伦类不平凡．这里概略地叙述 (i) 中的思想．选取序列空间 l_2 为 Hilbert 空间，具通常内积，$L + N\in M(H, H)$．我们在最简单的可能情形 $\mathrm{index} L = 1$ 来找所希望的例子，再利用有趣的同伦事实：$\pi_3(S^2) = Z$，以及 $\pi_4(S^3) = Z_2$，其中 $\pi_3(S^2)$ 的生成元 α 的 Freudenthal 同纬 $E[\alpha]\neq 0$，而 $E[2\alpha] = 0$．于是，如果映射 N 选得使相应的映射 $\tilde{\mu}$ 的同伦类 $[\tilde{\mu}] = [2\alpha]\in\pi_3(S^2)$，那么 $[\mu]\neq 0$，同时，对 $k>0$，$E^k[\tilde{\mu}] = 0$．为更清楚些，我们用 $x = (x_1, x_2, \cdots)$ 记 l_2 的一个元素，令 $Lx = (0, 0, 0, x_5, x_6, x_7, \cdots)$ 使 $\dim\mathrm{Ker}\, L = 4$，$\dim\mathrm{coker}\, L = 3$ 和 $\mathrm{index}\, L = 1$．为定义 N，我们注意到，用

复数 z_1, z_2 来表示，$[2\alpha]$ 的一个代表 $h(z_1, z_2)$ 可由

$$h(z_1, z_2) = (2z_1^2|z_1|^{-1}z_2, 1 - 2|z_2|^2)$$

给出. 对实的 X_5, $E[2\alpha]$ 的一个代表 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$，由 $\phi_E(z_1, z_2, X_5) = (h(z_1, z_2), 2X_5|z_2|)$ 给出. 此外，因为 ϕ_E 非本质，它有到 S^3 内部的非零延拓，记其为 $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, \tilde{\phi}_4)$. 此外，对 $R \geqslant 1$ 令 $\tilde{\phi}(Ra) = \phi_E(a)$，再把 $\tilde{\phi}$ 延拓到 $\mathbb{R}^4$. 对一般的 $u \in l_2$ 保留(5.3.21)的记号，令 $u = ra + x$, $ra \in \ker L$, $\|a\| = 1$, $x \perp \operatorname{Ker} L$, 定义 $N_i(Ra + x) = \tilde{\phi}_i(a)(i = 1,2,3)$. $N_4(Ra + x) = \tilde{\phi}_4 - a_5$, 对 $i \geqslant 5$, $N_i(u) = 0$, 不难验证 $N = (N_1, N_2, N_3, N_4, \cdots)$ 满足条件(A). 而且，如上面提到的，N 相应的映射使 $[\tilde{\mu}] \neq 0$，而 $i[\tilde{\mu}]$ 的稳定同伦类等于 0. 最后不难证明方程 $Lu + Nu = 0$ 在 l_2 中没有解. 事实上，由 $\tilde{\phi}$ 的构造，$Lu + Nu \neq 0$. 另一方面，如果 $R > 1$，对 $a_5 \neq 0$，$Lu + Nu$ 的第四个坐标是 $a_5(2|z_1| + R - 1) > 0$，而如果 $a_5 = 0$，对 $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in S^3$, $\tilde{\phi} = (\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_3, 0) \neq 0$.

(c) 当把一个非线性 Fredholm 算子在奇异点展开时，就出现(5.3.21)中所讨论的算子 $L + N$.

5.3E 零指标 C^2 正常 Fredholm 算子的广义度

如果映射 $f(x) - p$ 属于 $\mathfrak{C}_1^0(\partial D, X)$，并且在 X 的有界区域 D 上光滑(譬如说属于 C^2)，那么可借助微分技巧定义它的 Leray-Schauder 度. 更明确些，设对一切 $x \in \partial D$, $f(x) \neq p$, 我们证明 Leray-Schauder 度 $d(f, p, D)$ 可以这样计算:

第一步: 设 σ_p 是 $f(x) = p$ 在 D 中所有解的集合，假设在 σ_p 上 $f'(x)$ 有逆. 那么，由反函数定理和 f 是 D 上的正常算子，σ_p 有限，我们令

$$d(f, p, D) = \sum_{x \in \sigma_p} d(f'(x), 0, D). \tag{5.3.24}$$

第二步: 如果 $f'(x)$ 在 σ_p 上没有逆，由(3.1.45)，我们可找到 X 中序列 $p_n \to p$，使得在 ∂D 上 $f(x) \neq p_n$，且在集合 $\sigma_{p_n} = \{x | x \in D, f(x) = p_n\}$ 上 $f'(x)$ 有逆. 那么就令

$$d(f, p, D) = \lim_{n \to \infty} d(f, p_n, D).$$

(5.3.25) 刚才给出的 $d(f, p, D)$ 的定义和 5.3C 中给出的定义一

致.

证明：如果 $f'(x)$ 在 σ_p 上有逆，根据 Leray-Schauder 度的性质，两个定义必然一致。另外，我们注意到，因为 Leray-Schauder 度对 p 连续，在 ∂D 上 $f(x)\neq p$，所以当 $p_n\to p$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}d(f, p_n, D)$ 必然存在且等于 $d(f, p, D)$。

上面所讲的定义光滑映射的度的方法显然可以用于很广泛的一类非线性 Fredholm 算子。但是在 Leray-Schauder 度的任何这种推广中，如果同伦中的映射是固定指标的正常 Fredholm 算子，而不加另外的限制，那么就不再保持关键的同伦不变性。例如，Kuiper 证明了，定义在无穷维可分 Hilbert 空间 H 上的有逆线性算子群是可收缩的。于是定义在 H 上的任意两个有逆算子 L_1 和 L_2，不论采用 (5.3.24) 型的哪种定义，通过有逆的零指标线性 Fredholm 算子，L_1 和 L_2 都在单位球面 $\{\|x\|_H=1\}$ 上同伦*。

因而，对定义在 D 上的零指标光滑正常 Fredholm 算子，我们将用如下的方式定义一个同伦不变(模 2)度：设 f 是零指标正常 Fredholm 算子，在 Banach 空间 Y 中取值，在有界区域 D 上属于 C^1 类，还设对 $x\in\partial D$，$f(x)\neq p$。

第一步：假定在集 $\sigma_p=\{x\,|\,x\in D, f(x)=p\}$ 的每一点，映射 f 正则(即 $f'(x)$ 是 $X\to Y$ 的满射线性映射)，那么由 f 的正常性保证集合 σ_p 紧。同时，从 $f'(x)$ 的指标为 0 以及满射性推出 $f'(x)$ 有逆，因而由反函数定理，$f(x)$ 在 σ_p 上局部同胚，于是 σ_p 有限，我们令广义度 $d_g(f, p, D)$ 等于集合 σ_p 中元素个数的奇偶性。

第二步：如果在 σ_p 的某个点上映射 f 不正则，由 (3.1.45)，我们可以在 Y 中找到序列 $p_n\to p$，使得对 $x\in\partial D$，$f(x)\neq p_n$，并且在 $\sigma_{p_n}=\{x\,|\,x\in D, f(x)=p_n\}$ 上 f 正则。那么就令

$$d_g(f, p, D)=\lim_{n\to\infty}d_g(f, p_n, D).$$

---

* 下句话意义不明确故删去——译者注。

自然，仅当 $d_g(f,p,D)$ 与序列 p_n 无关，且相应的极限存在时，刚才给出的定义才有意义。事实上，我们下面证明

(5.3.26) 在上面两步中讨论的函数 $d_g(f,p,D)$ 有定义。

证明： 只需证明，如果 p 是 f 的正则值，且对 $x\in\partial D$，$f(x)\neq p$，那么在 $f^{-1}(p)\cap D$ 中点的数目是 $C^2(D)\cap C(\bar{D})$ 中的局部常值函数。在那时，如果有两列正则值 $\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$，两者在 Y 中都趋于 p，那么对充分大的 n，$d_g(f,p_n,D)=d_g(f,q_n,D)$，而且整数列 $d_g(f,p_n,D)$ 稳定，于是在第二步中 $d_g(f,p,D)$ 的定义是合理的。

我们证明稍微更一般的结果。如果对 $x\in\partial D$，$f(x)\neq p$，p 是 f 的一个正则值，在 $C^1(D)\cap C(\partial D)$ 上 g 和 f 充分接近，那么 $f^{-1}(p)\cap D$ 中的点的数目等于 $g^{-1}(p)\cap D$ 中的点的数目。如在上面第一步中所讨论的，$f^{-1}(p)\cap D$ 包含有限多个点，譬如说是 $x_1,\cdots,x_k$. 设 $O_i(i=1,\cdots,k)$是两两不交的开邻域族，$x_i\in O_i$，那么 $f\left(\bar{D}-\bigcup\limits_{i=1}^{k}O_i\right)$ 不含 p；对与 f 充分接近的 g，由 f 的正常性推出 $g\left(\bar{D}-\bigcup\limits_{i=1}^{k}O_i\right)$ 也不含 p. 因为 $g'(x_i)$ 是零指标的满射线性 Fredholm 算子$(i=1,2,\cdots,k)$，故对每个 $i=1,\cdots,k$，$g'(x_i)$ 是线性同胚. 那么由反函数定理推出 g 是从 O_i 到 p 的某邻域上的微分同胚. 于是恰有一个点 $z_i\in O_i$，使 $g(z_i)=p$，这意味着在 $f^{-1}(p)\cap D$ 中点的数目和 $g^{-1}(p)\cap D$ 中点的数目相等。

下面证明函数 $d_g(f,p,D)$ 具有度的主要性质。

(5.3.27) 设 f 定义在D(X 的凸开子集)上，在 ∂D 上 $f(x)\neq p$，是零指标 C^1 正常 Fredholm 映射，那么

(i) 若 $d_g(f,p,D)\neq 0$，则方程 $f(x)=p$ 在D中有解(所以如果在D中 $f(x)\neq p$，那么 $d_g(f,p,D)=0$)；

(ii) 在正常 C^2 同伦变换 $h(x,t)$ 下，$d_g(f,p,D)$ 是不变量，其中 $h(x,t)$ 是零指标 Fredholm 算子，对 $x\in\partial D$，

$t\in[0,1]$, $h(x,t)\neq p$;

(iii) $d_g(f,p,D)$ 对 p 和 $f\in C^2$ 连续，且仅与 $Y-f(\partial D)$ 中包含 p 的分支有关；

(iv) 如果 D 是中心在原点的球，f 是奇映射，那么 $d_g(f,0,D)\neq 0$。

证明：(i)：如果 $d_g(f,p,D)\neq 0$，由定义，有点列 $p_n\to p$ 和 $x_n\in D$ 使 $f(x_n)=p_n$。因为 f 是 $\bar{D}$ 上的正常算子，$\{x_n\}$ 有收敛子序列，记其极限为 $\bar{x}$。显然，由 f 的连续性得出 $f(\bar{x})=p$。因为对 $x\in\partial D$，$f(x)\neq p$，所以 $\bar{x}\in D$。如果在 $\bar{D}$ 中 $f(x)\neq p$，那么由定义，$d_g(f,p,D)=0$。

(ii)：设 $h(x,t)$ 是定义在 $\bar{D}\times[0,1]$ 上的零指标 C' 正常 Fredholm 算子，h 连接 f 和 g，对 $x\in\partial D$ 和 $t\in[0,1]$，$h(x,t)\neq p$，且 p 是 $h(x,t)$ 的正则值，那么，$h^{-1}(p)$ 是紧一维带边流形[1]，它的边界(此时为点)的数目等于 $f^{-1}(p)$ 中点的数目(记作 $\#(f^{-1}(p))$)和 $g^{-1}(p)$ 中点的数目(记作 $\#(g^{-1}(p))$)之和。因为紧一维流形的边界有偶数个点，所以

$$\#(f^{-1}(p))=\#(g^{-1}(p))(\mathrm{mod}\ 2). \tag{5.3.28}$$

现在假定 p 是 f 和 g 的正则值但不是 h 的正则值，由 (5.3.26) 的证明，p 有邻域 V，使对所有的 $p'\in V$，$\#(f^{-1}(p'))=\#(f^{-1}(p))$，$\#(g^{-1}(p'))=\#(g^{-1}(p))$。由 (3.1.45)，$h(x,t)$ 在 V 中有正则值 $\bar{p}$，根据前面的证明，(5.3.28) 对 $\bar{p}$ 成立，所以对 p 也成立。

最后，如果 p 不是 f 和 g 的正则值，由 (3.1.45)，有序列 $p_n\to p$，p_n 同是 f 和 g 的正则值，且在 $\partial D\times[0,1]$ 上 $h(x,t)\neq p_n$。于是由 $d_g(f,p,D)$ 的定义和上面一段，

$$d_g(f,p,D)=d_g(f,p_n,D)=d_g(g,p_n,D)=d_g(g,p,D).$$

(iii)—(iv)：和 5.3C 一样，这是 (ii) 的直接推论。

---

1) 对于固定的 t，$h(x,t)$ 是零指标 Fredholm 映射．因为在 $\bar{D}\times[0,1]$ 上 $h(x,t)\in C^2$ 类且正常，$h(x,t)$ 是指标为 1 的 Fredholm 映射，从而在 $h(x,t)$ 的正则值 p 处，$\dim h^{-1}(p)=1$。

5.4 同伦和非线性算子的映射性质

在这一节，我们将从 (a) 各种有界区域 $D\subset X$ 上的(广义)度函数，以及 (b) f 关于 D 的本质性来导出非线性算子 $f\in C(X, Y)$ 的映射性质. 除非特别声明，我们这里讨论的允许映射类 Δ 限于：如果 D 是 X 中有界凸区域，在 ∂D 上 $f(x)\neq p$，那么存在一个度函数 $\tilde{d}(f, p, D)$ (在 $\mathbf{Z}$ 或 $\mathbf{Z}_2$ 中取值)，使得：

(i) 由 $\tilde{d}(f, p, D)\neq 0$ 推出 $p\in f(D)$；

(ii) $\tilde{d}(f, p, D)$ 在允许的紧同伦变换下不变；

(iii) 如果 D 是中心在原点的球，f 是奇映射，那么 f 关于 D 本质，并且 $\tilde{d}(f, 0, D)\neq 0$.

由上节的讨论，Δ 包含恒等映射的紧扰动和非负指标的线性 Fredholm 算子，以及由 5.3E，指标为 0 的正常 C^1 Fredholm 算子的紧扰动.

5.4A 满 射 性

我们首先证明

(5.4.1)定理 设 $f\in C(X, Y)\cap\Delta$ 正常，有某个点 $p_*\in Y$ 使 $d(f, p_*, \Sigma)\neq 0$，其中 Σ 是球心在原点的包含 $f^{-1}(p_*)$ 的任一开球，那么 f 是满射.

证明： 设 $p\in Y$，L 是 Y 中连接 p 和 p_* 的直线段. 因为 f 正常，L 紧，所以 $f^{-1}(L)$ 也紧，从而有界. 故可找一个半径 R 充分大的球 $\Sigma_R=\{x|\|x\|\leqslant R\}$ 使 $f^{-1}(L)\subset\Sigma_R$. 如果用 $p(t)=tp+(1-t)p_*$ 记 L 的点 $(t\in[0, 1])$，由度的同伦不变性推出

$$(5.4.2)\qquad \tilde{d}(f, p, \Sigma_R)=\tilde{d}(f, p(t), \Sigma_R)=\tilde{d}(f, p_*, \Sigma_R)\neq 0.$$

于是方程 $f(x)=p$ 在 Σ_R 中有解，故 f 是满射.

(5.4.3)推论 设 $f\in C(X, Y)\cap\Delta$ 是奇的正常映射，那么 f 是满射.

证明： 因为 $f\in\mathscr{K}$ 是正常映射，所以 $f^{-1}(0)$ 有界，设球 $\Sigma_R=\{x|\|x\|\leqslant R\}$ 的半径 R 足够大，使 $f^{-1}(0)\subset\Sigma_R$，那么

$d(f, 0, \Sigma_R) \neq 0$. 由上面的定理(5.4.2)，f 是满射。

(5.4.4)**推论** 设 $f \in C(X, Y) \cap \Delta$ 是作用于复 Banach 空间之间的正常复解析映射，假定(和 Leray-Schauder 度的情形一样)每当 D 是球和 $p \in f(D) - f(\partial D)$ 时都有 $\tilde{d}(f, p, D) \neq 0$，那么 f 是满射。

证明: 由定理(5.4.2)，只需找到一个点 $p_* \in Y$ 使得当球 Σ 足够大，包含了 $f^{-1}(p_*)$ 时，就有 $\tilde{d}(f, p_*, \Sigma) \neq 0$。设 p_* 是 $f(X)$ 中任一点，由假设条件，因为 $p_* \in f(\Sigma) - f(\partial\Sigma)$，故 $\tilde{d}(f, p_*, \Sigma) \neq 0$. 于是 f 是满射。

(5.4.5) **推论** 设 C 是定义在 Banach 空间 X 上的紧渐近线性算子，其渐近导算子为 C_1. $L \in L(X, Y)$ 是零指标的线性 Fredholm 算子，$L + C_1$ 有逆，那么 $f = L + C$ 是满射。

证明: 我们首先证明，在所给条件下，如果 $f = L + C$，那么 Y 中有界集 B 的原像集在 X 中有界，并且 f 是闭映射. 再完全重复定理(5.3.16(ii))中对 Leray-Schauder 度 $\tilde{d}(f-p, 0, D)$ 给出的证明，我们就证明了 f 是满射。

下面证明，如果 B 是 Y 中有界集，那么 $f^{-1}(B)$ 是 X 中有界集。设若不然，将有序列 $x_n \in X$，$\|x_n\| \to \infty$ 和一个与 n 无关的数 M，使得

(5.4.6) $$\|(L + C_1)x_n + (C - C_1)x_n\| \leqslant M.$$

另一方面，因为 $L + C_1$ 有逆，存在常数 $K > 0$(与 n 无关)，使 $\|(L + C_1)x_n\| \geqslant K\|x_n\|$. 因而从(5.4.6)推出

$$\|x_n\| \left\{K - \frac{\|(C - C_1)x_n\|}{\|x_n\|}\right\} \leqslant M.$$

因 C_1 是 C 的渐近导算子，当 n 充分大时有 $\|(C - C_1)x_n\|/\|x_n\| < \frac{1}{2}K$. 故令 $n \to \infty$ 就得出矛盾。

其次证明 f 是闭映射. 令 D 是 X 中闭集，$y_n \in f(D)$，在 Y 中 $y_n \to y$. 由上面的证明，有有界集 $\{x_n\}$ 使 $f(x_n) = y_n$. 必要时选择子序列后，我们可以假定 $Cx_n \to z$(Y 中某元)，使 $\{Lx_n\}$ 在

Y中强收敛。但是由(1.3.37)，有某个子序列$\{x_{n_j}\}$收敛到某元$\bar{x}$，由连续性得$f(\bar{x})=y$，于是$f(D)$闭。

5.4B 单叶性和同胚性质

和5.1节一样，度可以用于从局部信息证明整体的单叶性结果。作为例子，我们证明下面的唯一性结果。

(5.4.7)**定理** 设D是Banach空间X的有界区域，f是$D\to X$的局部同胚。如果$f\in\mathfrak{C}_l(\partial D,X)$是恒等映射的紧扰动，$d(f,p,D)=\pm 1$，那么方程$f(x)=p$在$D$中恰有一个解。

证明： 我们首先注意到，因为f是局部同胚，而且f是$\bar{D}$上的正常映射，所以集合$\sigma_p=\{x|f(x)=p,\ x\in D\}$离散，因而有限。由(5.3.24)，

$$(5.4.8)\qquad \pm 1=d(f,p,D)=\sum_{x\in f^{-1}(p)}d(f,p,O_x),$$

其中O_x是包含x的小的不交开集。于是只需证明

(*)当$p(t)$是D中道路时，$d(f,f(p(t)),O_{p(t)})$为常数。因为这样一来，如果$x,y\in\sigma_p$，就有$d(f,p,O_x)=d(f,p,O_y)$。所以由(5.4.8)得出σ_p中点的数目是1。

为证(*)，令$p(t)$是D中任一道路。对固定的T，选取$O_{p(T)}$如上所规定，并令$p(t_1)\in O_{p(T)}$。根据度的同伦不变性，$d(t)=d(f,f(p(t)),O_{p(T)})$是$t\in[t_1,T]$的常值函数。我们证明$\tilde{d}(t)=d(f,f(p(t)),O_{p(t)})$是$t\in[t_1,T]$的常值函数。为此用$S_{p(t_1)}$记围绕$p(t_1)$，包含在$O_{p(t_1)}\cap O_{p(T)}$中的开球，那么

$$(5.4.9)\quad d(f,f(p(t_1)),O_{p(t_1)})=d(f,f(p(t_1)),S_{p(t_1)})=d(f,f(p(t_1)),O_{p(T)}).$$

于是只要$\|t_1-T\|$充分小，小到$p(t_1)\in O_{p(T)}$，从(5.4.9)就可推出对一切$t\in[t_1,T]$，$\tilde{d}(t)$是常数。因而集$\{t|\tilde{d}(t)=\tilde{d}(1)\}$是$[0,1]$中的既开又闭集，于是如所要求的，$\tilde{d}(t)$是$t\in[0,1]$的常值函数。

(5.4.10) **推论** 假定(5.4.7)中的条件满足，且$f(D)\cap f(\partial D)=$

ϕ,那么 f 是 D 到 $f(D)$ 的单叶映射。

证明： 为证这个结果,我们指出 $f(D)\subset(X-f(\partial D))$，于是对 $p'\in f(D)$，$d(f,p',D)$ 有定义．因为 $f(D)$ 弧连通，它还是常数．由假设 $d(f,p',D)=\pm 1$．根据定理(5.4.7),方程 $f(x)=p'$ 恰有一解,因而 f 在 $f(D)$ 上是单叶映射．

在上述观点下，自然要问是否从有界开集 D 到 $f(D)$ 上的一对一映射 f 是同胚映射．和有限维时一样，任何这种结果都需要严格论证．实际上,我们要证明

(5.4.11) **区域不变性定理** 设 $f\in C(D,Y)\cap\Delta$ 是线性映射 L 的紧扰动,其中 L 是零指标的 Fredholm 算子, D 是 Banach 空间 X 的开子集．如果 f 是 D 到 $f(D)$ 的一对一映射,那么 f 是开映射，因而是 D 到 $f(D)$ 的同胚映射．

证明： 我们分两步证明 f 把 D 中的内点 x_0 映成 $f(D)$ 中的内点．首先证明,在给定的条件下,如果映射 $f(x)$ 在以 x_0 为心的一个小球 Σ 中本质,那么对某个 $\varepsilon>0$,$f(\Sigma)$ 包含一个以 $f(x_0)$ 为心，ε 为半径的球，其次证明，在定理的条件下，$f(x)-f(x_0)$ 在 Σ 中本质．这可由证明 f 同伦于奇映射 $\tilde{g}\in\Delta$，以及定义 Δ 时的性质(iii)得出．

不失一般性,设 x_0 是原点，Σ 的半径为 1．那么,为做到刚才所说的,首先注意到,因为在 D 的有界子集上 f 是正常映射，所以 $f(\partial\Sigma)$ 是闭集．由在 $\partial\Sigma$ 上 $\tilde{f}(x)=f(x)-f(0)\neq 0$，距离 $\varepsilon=d(\tilde{f}(\partial\Sigma),0)>0$．设 $\|y-f(0)\|<\varepsilon$,令 $h(x,t)=f(x)-ty-(1-t)f(0)$，$t\in[0,1]$,我们证明 $g(x)=f(x)-y$ 和 $\tilde{f}(x)$ 在 $\partial\Sigma$ 上紧同伦．在 $\partial\Sigma$ 上有

$$\|h(x,t)\|\geqslant\|f(x)-f(0)\|-t\|f(0)-y\|>\varepsilon-t\varepsilon\geqslant 0.$$

由假设条件 $\tilde{f}(x)$ 在 $\partial\Sigma$ 上本质,根据(5.3.3)可知 g 也在 $\partial\Sigma$ 上本质．于是对 $\|y-f(0)\|<\varepsilon$，$f(x)=y$ 在 Σ 中有解，从而 $f(\Sigma)$ 覆盖了一个以 $f(0)$ 为心的 ε 开球。第一步证毕。

其次证明，在所设条件下映射 $\tilde{f}(x)=f(x)-f(0)$ 关于 Σ 本质。我们由证明 $\tilde{f}$ 紧同伦于一个奇映射 $\tilde{g}\in\mathscr{K}$ 来做到这点。

事实上，如果 $\tilde{f}=L+C$，C 紧，令 $h(x,t)=Lx+\{C(x/(1+t))-C(-tx/(1+t))\}$. 显然 $h(x,t)$ 是所求的紧同伦. 这是因为，如果对某个 $\|x_0\|=1$ 和某个 $t_0\in[0,1]$ 有 $h(x_0,t_0)=0$，那么 $f(x_0/(1+t_0))=f(-t_0x_0/(1+t_0))$. 因为在 Σ 上 f 一对一，这不可能. 现在 $h(x,t)$ 把 $\tilde{f}$ 和一个奇映射

$$h(x,1)=Lx-\left\{C\left(\frac{x}{2}\right)-C\left(-\frac{x}{2}\right)\right\}$$

连接起来，因为 $h(x,1)\in\mathscr{K}$ 在 Σ 上本质，于是如所要求的，f 在 Σ 上本质.

5.4C 不动点定理

如在第三章已提到的，给出确保从 Banach 空间 X 到它自身的映射 f 必有不动点的明确条件常常是很重要的. 由例 (5.3.1) 可知，如仅要求 f 连续，Brouwer 不动点定理 (1.6.4) 的直接推广是失败的. 于是自然想在映射 $I-f\in\Delta$ 的假定下解方程 $x=f(x)$. 作为第一个结果，我们证明 Schauder 不动点定理 (2.4.3) 的如下变形.

(5.4.12)(Rothe) 设 f 是定义在 Banach 空间 X 的闭单位球 $\Sigma=\{x\mid\|x\|\leqslant 1\}$ 上的紧映射，还设 f 映 $\partial\Sigma=\{x\mid\|x\|=1\}$ 入 Σ，那么 f 在 Σ 中必有不动点.

证明: 设若不然，因为对 $t\in[0,1]$ 和 $x\in\partial\Sigma$，紧同伦 $h(x,t)=x-tf(x)\neq 0$，由 Leray-Schauder 度的同伦不变性，有

$$d(I-f,0,\Sigma)=d(h(x,t),0,\Sigma)=d(I,0,\Sigma)=1.$$

于是方程 $x=f(x)$ 在 Σ 中有解，此与 f 在 Σ 中没有不动点相矛盾.

对复解析映射 f 来说，(5.4.12) 可改述如下:

(5.4.13)**推论**[1] 设 f 是定义在复 Banach 空间 X 闭单位球 Σ_1 上

---

1) Earle 和 Hamilton 已经证明这个结果中的紧性条件可以去掉.

的紧复解析映射，还假定 f 映 $\partial\Sigma_1=\{x|\|x\|=1\}$ 到 Σ_1 的内部，那么 f 在 Σ_1 中有且仅有一个不动点。

证明：上面 (5.4.12) 的证明指出 $d(I-f, 0, \Sigma_1)=1$，由结果 (5.4.7) 推出 f 的不动点唯一。

不难推广刚才给出的证明，以证明如下的先验有界原理。

(5.4.14)**定理** 设 $f(x, t)$ 是定义在 Banach 空间 X 上的单参数紧算子族，$t\in[0, 1]$. 对固定的 $x\in X$, $f(x, t)$ 对 t 一致连续. 还假定对任意 $t\in[0, 1]$, $x=f(x, t)$ 的每个解都属于固定的球 $\Sigma=\{x|\|x\|<M\}$. 再设 $f(x, 0)\equiv 0$, 那么紧算子 $f(x, 1)$ 有不动点 $x\in\Sigma$.

证明：因为对固定的 t, $f(x,t)$ 在 Σ 上紧，对固定的 x, $f(x, t)$ 对 t 一致连续，所以 $f(x, t)$ 在 $X\times[0, 1]$ 上紧. 由假设条件，对 $x\in\partial\Sigma$ 和 $t\in[0, 1]$, $x\neq f(x, t)$, 所以 $h(x,t)=x-f(x, t)$ 是 $\partial\Sigma\times[0, 1]$ 上的紧同伦映射. 根据度的同伦不变性，

$$d(x-f(x, 1), 0, \Sigma)=d(h(x, t), 0, \Sigma)=d(I, 0, \Sigma)=1.$$

所以 $f(x, 1)$ 在 Σ 中有不动点。

用同样的想法，我们证明

(5.4.15)设 f 是映 Banach 空间 X 中闭单位球 $\Sigma_1=\{x|\|x\|\leqslant 1\}$ 入 X 的紧映射，且映射 $g=I-f$ 满足

(5.4.16) $\quad g(x)\neq\beta g(-x)$, 对任意 $\beta>0$ 和一切 $x\in\partial\Sigma_1$. 那么 f 必在 Σ_1 中有不动点。

证明：再次假定 f 在 Σ_1 中没有不动点. 令

$$g_t(x)=x-\frac{1}{1+t}(f(x)-tf(-x)), \quad t\in[0,1].$$

我们指出，从条件 (5.4.16) 可推出，对一切 $x\in\partial\Sigma_1$, $t\in[0,1]$ 有 $g_t(x)\neq 0$，且 $g_0(x)=g(x)$. 于是对 $t\in[0,1]$, $d(g_t, 0, \Sigma_1)$ 有定义. 根据 Leray-Schauder 度的性质，由 g_1 的奇性得到 $d(g_1, 0, \Sigma_1)$ 为奇数. 再根据度的同伦不变性，$d(g, 0, \Sigma_1)=d(g_1, 0, \Sigma_1)\neq 0$, $g(x)=0$ 在 Σ_1 中有解，即 f 在 Σ_1 中有不动点. 这与 f 在 Σ_1 中没有不动点的假设相矛盾. 证完.

这方面的另一个有趣的结果是类似于(5.4.12)的如下结论.

(5.4.17) 设 f 是定义在有界区域 D 上的紧映射，∂D 不包含 Hilbert 空间 X 的原点. 此外还假定

(5.4.18) 对一切 $x\in\partial D$ 有 $(f(x), x)\leqslant\|x\|^2$.

那么 f 在 $\bar{D}$ 中必有不动点.

证明: 设 f 在 $\bar{D}$ 中没有不动点,那么映射 $g=I-f\in\mathfrak{C}_I(\partial D, X)$，其 Leray-Schauder 度 $d(I-f, 0, D)=0$. 于是在 ∂D 上 g 不能紧同伦于 I，从而对某个 $\lambda_0\in[0,1]$ 和 $x_0\in\partial D$, $x_0=\lambda_0 f(x_0)$. 但由(5.4.18)推出 $\lambda_0\geqslant 1$，因而 $\lambda_0=1$,故 f 在∂D上有不动点. 这即所要的矛盾. 定理得证.

Banach 空间中类似于(5.4.17)的一个有趣结果是

(5.4.19) 设 T 是 $C(\bar{D}, X)$中紧映射,其中 $D=\{x\mid\|x\|<1\}$,而且对一切 $x\in\partial D$ 都有 $\|x-Tx\|^2\geqslant\|Tx\|^2-\|x\|^2$，那么 T 在 $\bar{D}$ 中有不动点.

证明: 考虑定义在 $\partial D\times[0,1]$ 上的紧同伦 $h(x,t)=x-tTx$. 重复(5.4.14)的论证,假设 T 在 $\bar{D}$ 中没有不动点，又由证明在 $\partial D\times[0,1]$上 $h(x,t)\neq 0$ 得出矛盾.事实上,如果 $x_0\in\partial D$, $t_0\in(0,1)$*) 使 $h(x_0, t_0)=0$,那么

$$\|Tx_0\|=\frac{1}{t_0},$$

$$\|x_0-Tx_0\|^2=(1-t_0)^2\|Tx_0\|^2=\frac{(1-t_0)^2}{t_0^2},$$

由此得到

$$\|Tx_0\|^2-\|x_0\|^2=\frac{1}{t_0^2}-1=(1-t_0^2)/t_0^2.$$

于是从(5.4.19)的假设条件推出

$$(1-t_0)^2\|Tx_0\|^2\geqslant(1-t_0^2)/t_0^2,$$

$$(1-t_0)\|Tx_0\|^2\geqslant(1+t_0)t_0^{-2}\quad(\text{因为 } t_0\neq 1),$$

---

*) 对一切 $x\in\partial D$，由 $\|x\|=1$,显然 $h(x,0)\neq 0$.由设 T 在 $\bar{D}$ 中没有不动点，故 $h(x,1)\neq 0$ ——译者注.

$$(1-t_0)[t_0^2\|Tx_0\|^2] \geqslant 1+t_0 \quad \text{(这不可能)},$$
这就得出了所要的矛盾. 结论得证.

5.4D 诸性质和非线性特征值问题

设 $f(x, \lambda)$ 定义在 $\bar{D} \times \mathbb{R}^1$ 上,是恒等映射的紧扰动的单参数族,(一致)连续依赖于实参数 λ, 其中 D 是 Banach 空间 X 的一个区域. 还设 $f(0, \lambda) \equiv 0$, 那么,用 Leray-Schauder 度可以极大地推进对方程 $f(x, \lambda)=0$ 的解 (x, λ) 的研究,这些解不同于显然的"平凡解" $(0, \lambda)$. 作为简单的例子,我们证明

(5.4.20)**定理** 设单参数族 $f(x, \lambda)$ 满足上面的限制,对 λ 两个不同的值 λ_0 和 λ_1, Leray-Schauder 度有定义,且

$$d(f(x, \lambda_0), 0, D) \neq d(f(x, \lambda_1), 0, D).$$

那么方程 $f(x, \lambda)=0$ 有解 $(\bar{x}, \bar{\lambda})$, $\bar{x} \in \partial D$, $\bar{\lambda} \in [\lambda_0, \lambda_1]$.

证明: 设方程 $f(x,\lambda)=0$ 没有解$(\bar{x}, \bar{\lambda})$使 $\bar{x} \in \partial D$ 和 $\bar{\lambda} \in [\lambda_0, \lambda_1]$. 那么, 对 $t \in [0, 1]$, $h(x, t)=f(x, t\lambda_1+(1-t)\lambda_0)$ 定义一个连接 $f(x, \lambda_0)$ 和 $f(x, \lambda_1)$ 的紧同伦. 由度的同伦不变性, $d(f(x, \lambda_0), 0, D)=d(f(x, \lambda_1), 0, D)$, 这和定理的条件相矛盾. 于是,对某个 $x_0 \in \partial D$ 和 $t_0 \in [0, 1]$ 有 $h(x_0, t_0)=0$.

作为 (5.4.20) 的一个简单但是有意义的推论,我们提到

(5.4.21)**推论** 设N是定义在 Banach 空间X上的紧渐近线性算子,其渐近导算子为 C. 如果 λ_0^{-1} 是C的奇重特征值, 那么对任 $\varepsilon>0$, 都存在X的一个球 Σ, 对每个包含 Σ 的开集 D, 方程 $x=\lambda Nx$ 都有解 $(\bar{x}, \lambda)$, 其中 $\bar{x} \in \partial D$, $\lambda \in [\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]$.

证明: 设 $\varepsilon>0$ 给定,我们计算算子 $I-(\lambda_0+\varepsilon)N$ 和 $I-(\lambda_0-\varepsilon)N$ 在D上关于零点的 Leray-Schauder 度, 其中D是X的任一有界集,它包含球 $\Sigma_\varepsilon=\{x \mid \|x\| \leqslant R_\varepsilon\}$, $R_\varepsilon>0$ 充分大.我们将证明这两个度不等,从而由定理 (5.4.20), 方程 $x=\lambda Nx$ 有一个上面所讲的解 $(\bar{x}, \lambda)$.

为计算 Leray-Schauder 度 $d(I-(\lambda_0+\varepsilon)N, 0, D)$, 我们指出,只要 $d(\partial D, 0)$ 充分大, $I-(\lambda_0+\varepsilon)N$ 在 ∂D 上与线性

算子 $L_\varepsilon = I - (\lambda_0 + \varepsilon)C$ 紧同伦。事实上，设 $\varepsilon > 0$ 充分小，那么由 C 紧，L_ε 有逆，就有常数 β (与 x 无关)使 $\|L_\varepsilon x\| \geq \beta\|x\|$. 因为 C 是 N 的渐近导算子可取 R_ε 足够大，使对 $t \in [0, 1]$ 以及 $\|x\| \geq R_\varepsilon$ 有

$$\|Nx - Cx\| < \beta\|x\|/2(|\lambda_0| + 1),$$

于是

$$\begin{aligned}&\|L_\varepsilon x - (\lambda_0 + \varepsilon)t(Nx - Cx)\| \\ &\geq \|L_\varepsilon x\| - t(\lambda_0 + \varepsilon)\|Nx - Cx\| \\ &\geq \left(\beta - \frac{1}{2}\beta\right)\|x\| \\ &= \frac{1}{2}\beta\|x\| > 0.\end{aligned}$$

因而由度的同伦不变性和(5.3.16)，如果 D 包含 Σ_{R_ε}，那么

(5.4.22) $d(I - (\lambda_0 + \varepsilon)N, 0, D) = d(L_\varepsilon, 0, D) = (-1)^\mu$,

其中 μ 是 C 的大于 $(\lambda_0 + \varepsilon)^{-1}$ 的特征值的个数。类似地，如果 $L_{-\varepsilon} = I - (\lambda_0 - \varepsilon)C$，那么

(5.4.23) $d(I - (\lambda_0 - \varepsilon)N, 0, D) = d(L_{-\varepsilon}, 0, D) = (-1)^{\mu_1}$,

其中 μ_1 是 C 的大于 $(\lambda_0 - \varepsilon)^{-1}$ 的特征值的个数。因为 λ_0^{-1} 的重数是奇数，所以 $\mu \neq \mu_1 (\mathrm{mod}\ 2)$，于是如所希望的，$I - (\lambda_0 \pm \varepsilon)N$ 在 D 上关于 0 的 Leray-Schauder 度不等。推论证毕。

我们用同样的方法证明

(5.4.24)推论 设 D 是 Banach 空间 X 中含原点的有界开集，N 是紧算子，映 ∂D 到 X 且满足

(5.4.25)对一切 $x \in \partial D$ 有 $\|Nx\| \geq a > 0$*)，

那么方程 $x = \lambda Nx$ 有解 $(\bar{x}, \lambda)$，$\bar{x} \in \partial D$.

证明： 设推论不真，那么由(5.4.20)，对一切 $\lambda \in \mathbb{R}^1$，函数 $d(\lambda) = d(I - \lambda N, 0, D)$ 有定义，事实上它还是常数。显然，当 $\lambda = 0$ 时，$d(\lambda) = d(I, 0, D) = 1$. 我们再用(5.4.25)证明，对

*) 此处原文为"对一切 $x \in \partial D$ 有 $\|Nx\| \geq 0$"，恐有误。下文证明中也相应作了修改——译者注。

某个绝对值充分大的 λ 有 $d(\lambda)\neq 1$，这就得出矛盾(根据(5.3.14)，这个事实与N到D的任何紧延拓无关)。

为此注意到，由 (5.4.25)，对一切 $x\in\partial D$，$\|Nx\|\geqslant\alpha>0$。同时由D有界推出 $\|x\|\leqslant R$ (对某个 $R>0$)。那么对充分大的 λ，譬如说 $\lambda>\frac{2R}{\alpha}$，就有 $\|\lambda Nx-x\|\geqslant\lambda\alpha-\|x\|\geqslant R$。于是由 Leray-Schauder 度的定义，存在X的有限维子空间 X_n 和紧映射 $N_n:D\to X_n$ 逼近N，使 $d(I-\lambda N,0,D)=d(I-\lambda N_n,0,D)$。此外，如果把 N_n 在 $D\cap X_n$ 上的限制记作 $\widetilde{N}_n$，那么

$$d(I-\lambda N_n,0,D)=d_B(I-\lambda\widetilde{N}_n,0,D\cap X_n).$$

不失一般性，我们可以假定 $\dim X_n$ 是奇数，以及在 $\partial D\cap X_n$ 上 $\|N_nx\|\geqslant\frac{\alpha}{2}$。

其次证明

(*)当 $|\lambda|$ 充分大时，在 $\partial D\cap X_n$ (不含原点)上 $I\pm\lambda\widetilde{N}_n$ 同伦于 $\pm\lambda\widetilde{N}_n$。

一旦(*)成立定理就可得证。实因从 X_n 是奇维这件事实推出，对 $\lambda\neq 0$，Brouwer 度 $d_B(\lambda\widetilde{N}_n,0,D\cap X_n)$ 和 $d_B(-\lambda\widetilde{N}_n,0,D\cap X_n)$ 或者两者同时为 0，或者符号相反，从而它们中必有一个不等于 1。于是由上一节的结论，正如所希望的，存在某个 $\lambda\in(-\infty,\infty)$，使 $d(I-\lambda N,0,D)\neq 1$。

为证(*)，让 $|\beta|$ 充分大和 $x\in\partial D\cap X_n$，对 $t\in[0,1]$，

$$\begin{aligned}&\|t(x+\beta\widetilde{N}_nx)+(1-t)\beta\widetilde{N}_nx\|\\&=\|\beta N_nx+tx\|\geqslant|\beta|\|N_nx\|-\|x\|\\&>\frac{1}{2}|\beta|\alpha-R>0.\end{aligned}$$

故(*)成立，定理得证。

对复解析映射，我们有 (5.3.16(v)) 的如下重要推论。

(5.4.25′)推论 设D是复 Banach 空间X的有界区域 ($0\in\partial D$)，$f(x,\lambda)$ 是定义在 $\bar{D}\times\mathbf{R}^1$ 上复解析映射的单参数族，在$\bar{D}$ 和 $\mathbf{R}^1$

的任何有界区间的乘积上紧，且 $f(x, 0)=0$. 此外还假定 $(x_0, \lambda_0) \in D \times R^1$ 是方程 $g(x, \lambda) = x - f(x, \lambda) = 0$ 的歧点. 那么方程$g(x, \lambda) = 0$ 必有解 $(\bar{x}, \lambda)$, $\bar{x} \in \partial D$, $\lambda \in (0, \lambda_0]$.

证明: 因为 (x_0, λ_0) 是 $g(x, \lambda) = 0$ 的歧点，$g_x(x_0, \lambda_0)$ 没有逆，根据 (5.3.16(v))，如果 $g(x, \lambda_0) = 0$ 在 ∂D 上没有解，那么 $d(g(x, \lambda_0), 0, D) \geq 2$. 另外，由 0 是否属于$D$决定 $d(g(x, 0), 0, D) = 0$ 或 1. 无论在哪种情形，都从定理 (5.4.20) 推出所要的结论.

现在用刚才建立的结果研究两个有关的问题:

(i) 方程 $x = f(x, \lambda)$ 的谱的问题，设 $f(0, \lambda) \equiv 0$, 当 λ 在实数域中变化时，我们研究"谱"

$$\sigma_p = \{\mu | \mu \in R^1, (x, \mu) \in \mathfrak{S}, x \neq 0\},$$

其中 $\mathfrak{S}$ 记方程 $x = f(x, \lambda)$ 的解 (x, λ) 的集合.

(ii) $x = f(x, \lambda)$ 的连续统问题. 假定 (x_0, λ_0) 是方程 $x = f(x, \lambda)$的歧点(在第四章的意义下)，我们研究非平凡解 $(\bar{x}, \lambda) \in \mathfrak{S}$ 的闭包中包含 (x_0, λ_1) 的分支.

我们用 $d(Z, Y)$ 记集合 Z, Y 之间的距离. 作为和σ_p 有关的第一个结果，下面证明

(5.4.26)**定理** 设 $f(x, \lambda)$ 是定义在 $X \times (-\infty, +\infty)$ 上的紧算子，$f(0, \lambda) \equiv 0$. 当 $\lambda \to \infty$时 $\|f(x, \lambda)\| \to \infty$ 在Σ上一致，其中Σ是X的任一有界集合，$d(\Sigma, 0) > 0$. 假定对包含原点的每个开集 U, 方程 $x = f(x, \lambda)$总有解 $(x(U), \lambda_U)$, $x(U) \in \partial U$ 和 $\lambda_U \in R^1$，使得当$\|x(U)\| \to \infty$ 时 $\lambda_u \to \lambda_\infty$，当 $\|x(U)\| \to 0$ 时 $\lambda_U \to \lambda_0$. 那么对任何 $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty) - \{0\}$，方程 $x = f(x, \lambda)$ 有解 $(\bar{x}, \lambda)$, $\bar{x} \neq 0$, 即 $\lambda \in \sigma_p$.

证明: 设 $\mu \in (\lambda_0, \lambda_\infty) - \{0\}$ 不属于 σ_p，那么我们将得到矛盾，即可构造一个包含原点的有界开集 V, 在 ∂V 上 $g(x, \lambda) = x - f(x, \lambda)$ 没有非平凡解. 为此，用 E_∞ 和 E_0 记 $R^1 - \{\mu\}$ 的两个分支，其中 $\lambda_\infty \in E_\infty$, $\lambda_0 \in E_0$. 此外还假定 $F_\infty = \{x_U | x_U = f(x_U, \lambda_U), \lambda_U \in E_\infty\}$, $F_0 = \{x_U | x_U = f(x_U, \lambda_U), \lambda_U \in E_0\} \cup \{0\}$.

显然，由 $f(x,\lambda)$ 的紧性推出不交集 F_∞ 和 F_0 是闭集，同时 $F_0\cup F_\infty$ 包含定理中提到的 $x=f(x,\lambda)$ 的所有非平凡解。于是 $d(F_\infty,0)>0$，同时 F_0 的元素一致有界。其次可以证明 $d(F_0,F_\infty)>0$。事实上，不然的话，将有序列 $\{x_n\}\subset F_\infty$ 和 $\{y_n\}\subset F_0$，它们的范数既有上界又有正下界，但 $\|x_n-y_n\|\to 0$，同时 $x_n=f(x_n,\lambda_n)$，$y_n=f(y_n,\lambda'_n)$，其中 $\lambda_n\in E_\infty$，$\lambda'_n\in E_0$。根据假设条件，可设 $|\lambda_n|$ 和 $|\lambda'_n|$ 一致有界。可能经过选子序列后，还可假定 $\lambda_n\to\lambda$ 和 $\lambda'_n\to\lambda'$。因而(如有必要，再选子序列)可以假定 $\{x_n\}$，从而 $\{y_n\}$ 强收敛到某个 $z\neq 0$，并且 $z\in F_0\cap F_\infty$。最后这个事实就是所要的矛盾。于是有数 $\beta>0$，使 $d(F_0,F_\infty)=\beta$。现在用 $O(F_0)$ 记一个有界开集，它是所有中心在 F_0，半径为 $\frac{1}{2}\beta$ 的开球的并。那么 $\partial O(F_0)$ 与 F_0 和 F_∞ 不交，这和定理的假设相矛盾，所以 $\mu\in\sigma_p$。

下面转向 4.1 节中提到过的连续统问题，对方程

$$(I-\lambda L)x+g(x,\lambda)=0 \tag{5.4.27}$$

证明如下的和 (4.2.3) 类似的全局性结果。

(5.4.28) **定理** (Rabinowitz) 设 L 是映 Banach 空间到自身的线性紧算子，λ_0^{-1} 是它的奇重特征值，同时 $g(x,\lambda)$ 定义在 $X\times R^1$ 的区域 $D\times U$ 上，对 x 连续且紧，对 λ 连续，在原点是 x 的高阶项，即当 $\|x\|\to 0$ 时 $\|g(x,\lambda)\|=o(\|x\|)$ 对有界的 λ 一致。如果用 $\bar{C}$ 记 (5.4.27) 的非平凡解集包含 $(0,\lambda_0)$ 的分支 C 的闭包，那么下面两个结论之一成立：或者 (i) $\bar{C}$ 在 $D\times U$ 中不紧 (如果 $D\times R^1$ 和 $X\times R^1$ 重合，那么 $\bar{C}$ 无界)，或者 (ii) $\bar{C}$ 至少包含一个，但是至多有限个点 $(0,\lambda_i)$，其中 λ_i^{-1} 是 L 的不同于 λ_0 的特征值，而且奇重的 λ_i 的数目(不包括 λ_0)是奇数。

证明：假定 $\bar{C}$ 在 $D\times U$ 中紧，那么形若 $(0,\lambda_i)$ 的不同点(如定理中所述)的数目必有限，否则由 L 的紧性将推出 $\bar{C}$ 不紧。于是为证定理，只需证明点 $(0,\lambda_k)$ 的数目是偶数，其中 λ_k^{-1} 是 L 包含在 $\bar{C}$ 中的奇重特征值。

为此，选取$D\times U$的一个包含$\tilde{C}$的有界子集Ω，使(5.4.27)在$\partial\Omega$上没有解(x,λ)，并且Ω不包含$\tilde{C}$以外的形若$(0,\lambda_k)$的点。为估计$f(x,\lambda)=(I-\lambda L)x+g(x,\lambda)$在$\|x\|=\rho$上的非平凡解的个数，我们考虑映射$f_\rho(x,\lambda)=(f(x,\lambda),\|x\|^2-\rho^2)$在$\Omega$上关于点$(0,0)$的 Leray-Schauder 度。根据$\Omega$的结构，这个度$d_\rho=d(f_\rho,(0,0),\Omega)$有定义。

我们分成简单的三步以得出所要的奇偶性结果：(i) 由度的同伦不变性，d_ρ与ρ无关，事实上它为0. 这是因为我们可以把ρ选得很大，以致$f_\rho(x,\lambda)=0$没有解；(ii) 然后选取小的$\rho>0$，并指出，对于小的$\rho>0$，由(5.3.14)推出，对d_ρ的唯一贡献来自形若$(0,\lambda_k)$的点附近的局部贡献；最后，(iii) 对小的$\rho>0$计算$d(f_\rho,(0,0),\Omega)$，我们断定它等于下面(*)式的右端. 于是和(i)，(ii)一起，我们求出

$$
(*)\qquad 0=\sum_{\lambda_k}\{d(I-(\lambda_k-\varepsilon)L,0,\|x\|<\rho)-d(I-(\lambda_k+\varepsilon)L,0,\|x\|<\rho)\}
=\sum_{\lambda_k\text{（奇重）}}\pm 2,
$$

其中$\sum\limits_{\lambda_k\text{（奇重）}}$仅对奇重的$\lambda_k$求和。由此我们可以得到结论：有偶数个奇重的$\lambda_k$。

为证(iii)，在每个$(0,\lambda_k)$附近计算$d_\rho(k)$对d_ρ的贡献. 对于小的$\varepsilon>0$和小的$\rho>0$，在集合$\Sigma=\{(x,\varepsilon)\mid\|x\|^2+\varepsilon^2<\rho^2+\varepsilon_0^2\}$上，考虑关于$(0,0)$的同伦

$$h(x,t)=tf_\rho(x,\lambda+\varepsilon)+(1-t)\{I-(\lambda_k+\varepsilon)L,\varepsilon_0^2-\varepsilon^2\}.$$

显然只要选取(ρ,ε)充分小，在$\partial\Sigma$上就有$h(x,t)\neq 0$. 这是因为当$h(x,t)=0$就推出$\varepsilon=\pm\varepsilon_0$和$x=0$. 于是由度的同伦不变性，$d(f_\rho,(0,0),\Sigma)=d((I-(\lambda_k+\varepsilon)L,\varepsilon_0^2-\varepsilon),(0,0),\Sigma)$. 为计算后者，我们用(5.3.16). 因为$h(x,t)=0$只有解$\rho=0$，$\varepsilon=\pm\varepsilon_0$，且$h(x,1)$在$(0,\varepsilon)$的 Fréchet 导数是

$$h'(0, \varepsilon)(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) = ((I - \lambda L)\tilde{x}, -2\varepsilon\tilde{\varepsilon}),$$

从而在 $\varepsilon = \pm \varepsilon_0$ 处，对 $\varepsilon > 0$，局部指数为 $-d(I-(\lambda_k+\varepsilon)L, 0, \|x\| < \rho)$. 同时，当 $\lambda = \lambda_k - \varepsilon$ 时它等于 $d(I-(\lambda_k-\varepsilon)L, 0, \|x\| < \rho)$. 于是从 (5.3.25) 和 Leray-Schauder 度的可加性推出 (iii)。

5.4E 可解性的充要条件及其推论

设算子方程取 $Lu + Nu = f$ 的形式，其中 $L \in L(X, Y)$ 映 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y，是具非负指标 p 的线性 Fredholm 算子，$N: X \to Y$ 是紧映射，满足 (5.3.21) 的条件，那么前面的结果还可以改进. 现在讨论：(a) 此类方程可解的必要且充分条件；(b) $L + N$ 值域的开集性. 我们从零指标和 $\dim \operatorname{Ker} L > 0$ 的情形开始，先证明：

(5.4.29) **定理** 设 L 映 Hilbert 空间 H 到自身，是自共轭的线性 Fredholm 算子，N 是映 H 入 H 的一致有界紧连续映射，对于一致有界的 $\|x\|$，极限 $\phi(a) = \lim\limits_{r\to\infty} P_0 N(ra + x)$ 一致存在，其中 $a \in \operatorname{Ker} L \cap \{\|x\| = 1\}$. 此外还假定对一切正数 r 有

(5.4.30) $\quad (N(ra + x), a) < (\phi(a), a) \quad x \perp \operatorname{Ker} L.$

那么，(i) 方程 $Lu + Nu = f$ 可解的必要且充分条件是 $(f, a) < (\phi(a), a)$；(ii) 映射 $L + N$ 有开的值域.

证明：对 $Lu + Nu = f$ 和 $a \in \operatorname{Ker} L$ 作内积，由 L 的自共轭性，从 (5.4.30) 直接推出条件 $(f, a) < (\phi(a), a)$ 的必要性. 为导出条件的充分性，我们首先断定，如果满足此条件，由 (5.4.30)，算子 $L + N$ 满足 (5.3.21) 的条件 (A). 此外，在 $\operatorname{Ker} L$ 中半径为 r 的充分大的球面 $\partial\Sigma_r$ 上，Brouwer 度 $d_B(\phi(a), f, \Sigma_r) = 1$. 于是由 (5.3.21) 的判别准则推出 $f \in \operatorname{Range}(L + N)$.

为导出 $L + N$ 的值域的开性，我们证明，如果 $f_0 \in \operatorname{Range}(L + N)$，则 $L + N$ 的值域也包含一个以 f_0 为心的正半径的球. 这个结果可证明如下：首先，如果 $f - f_0 \in (\operatorname{Ker} L)^{\perp}$，那么方程 $Lu + Nu = f$ 可解是刚才建立的第一部分结果的直接推论. 其次，如果

$f-f_1$ 到 Ker L 上的投影按范数充分小，据所述必要充分条件的严格不等式和 Ker L 的维数有限，f 也属于 $L+N$ 的值域，从而(5.4.29)得证。

作为这个结果的应用，我们给出在定理(5.1.8)中曾讨论过的一个偏微分方程有解的另一证明。这个方程与紧 2 流形 $\mathfrak{M}$ 上负常数 Gauss 曲率度量有关，可以写成：

(5.4.31) $\qquad \Delta u - e^{2u} = K(x), \quad \mathrm{Vol}(\mathfrak{M}, g) = 1,$

其中 Δ 记定义在流形 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的 Laplace-Beltrami 算子。因为在迄今提到过的任何 Banach 空间中非线性项 $\exp 2u$ 都不一致有界，看来(5.4.31)不满足(5.4.29)的条件。为克服这个困难，对 Δ 在 $\mathfrak{M}$ 上应用极大原则，即如果 $u(x)$ 是(5.4.31)的光滑解，那么在 $u(x)$ 的正的极大点 x_0 处，$\Delta u(x_0)=\exp 2u(x_0)+K(x_0)<0$，从而 $u(x_0)\leqslant c_0$（某个绝对常数）。这就保证了我们可以用方程

(5.4.31′) $\qquad\qquad \Delta u - f_0(u) = K(x)$

去代替方程(5.4.31)，其中 f_0 是这样的函数，对 $u\leqslant c_0$，$f_0(u)=e^{2u}$，对 $u\geqslant c_0$，$f_0(u)$ 严格递增到极限 $f(\infty)$。现在 $f_0(u)$ 一致有界，我们可以对结果(5.1.8)给出另一个证明。

定理：(5.4.31)可解的必要且充分条件是 $\bar{K}<0$，即 $K(x)$ 在 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的平均值是负数。

证明：显然只需考虑截段方程(5.4.31′)。在 Sobolev 空间 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 中，这个方程显然可以写成

$$Lu+Nu=-g,$$

其中 L 是与 Δ 相应的算子，Nu 对应于 $f_0(u)$，g 对应于 $K(x)$。L 自共轭，

$$(Lu, u)=\int_{\mathfrak{M}} |\nabla u|^2,$$

$$(Nu, v)=\int_{\mathfrak{M}} f_0(u)v,$$

$$(g, v)=\int_{\mathfrak{M}} K(x)v,$$

(5.4.30)满足，Ker L 由常数组成。于是(5.4.31′)可改写成算子形式并可应用结果(5.4.29)。我们注意到，对 $a=-1$，可解性准则(5.4.29)成为

$$(-g,-1)=\int_{\mathfrak{M}} K(x)<\lim_{r\to\infty}\int_{\mathfrak{M}} f_0(-r)(-1)=0.$$

于是只要 $f_0(u)$ 定义中的常数 c_0 取得足够大，使得 $a=1$ 时的不等式自动满足，可解的必要充分条件也就满足了。

附注：

在第六章中我们将再次研究方程(5.4.31)在高维时的情形，那时通过极小化技巧不难解决它。此外在5.5E一节还要给出椭圆型边值问题别的例子，定理(5.4.29)对它们也有效。

现在讨论更一般的情形，映射 $f=L+N$ 映 Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y，其中 L 是线性 Fredholm 算子，指标 $p>0$。

(5.4.32) **定理** 用 P 记 Y 到 coker L 上的标准投影，其中 $L\in\varphi_p(X,Y)$ 如上所述，那么，如果 $N\in M(X,Y)$ 紧且一致有界，还满足下面的条件：

(i) 如 $x\in(\text{Ker }L)^{\perp}$ 且 $\|x\|$ 一致有界，则

$$\lim_{R\to\infty}PN(Ra+x)=\eta(a)\neq 0$$

一致地成立，其中 $a\in\text{Ker L}$，$\|a\|=1$；

(ii) $\|PN(Ra+x)\|<\|\eta(a)\|$；

(iii) $\eta(a)$ 的稳定同伦类 $\lim_{k\to\infty}E^k[\eta(a)]\neq 0$；那么方程 $Lu+Nu=f$ 可解的必要且充分条件是对所有的 a，$\|Pf\|<\|\eta(a)\|$。此外，映射 $L+N$ 在 Y 中有开的值域。

证明： 设 $f\in\text{Range}(L+N)$，那么对某个 $u\in X$，

$$PN(u)=Pf,$$

由(ii)有

$$\|Pf\|<\|\eta(a)\|.$$

于是定理中所述条件是必要的。另一方面，如果这后一条件成立，我们指出，根据(5.3.21)，只需证明(对充分大的 R)，$P[N(Ra)-f]$

的稳定同伦类 $\neq 0$. 但是由条件 (i), (ii) 推出, 在足够大的球面上(亦即 R 充分大),通过简单的同伦映射 $tf_1+(1-t)f_2$,映射 $f_1=P[N(Ra)-f]$ 和 $f_2=P[N(Ra)]$ 同伦.因为 $P[N(Ra)]$ 的稳定同伦类 $\neq 0$, 根据假设条件 (iii), $P[N(Ra)-f]$ 的稳定同伦类 $\neq 0$. 应用 (5.3.21), 定理的第一部分得证.

至于 $L+N$ 有开的值域这个结论的证明可和前面的 (5.4.29) 一样得出.

(5.4.29) 的一个有意思的推论是: 当 index $L=0$ 时 (只要 N 足够光滑), 几乎对 $L+N$ 的值域中的一切 f, 方程 $Lu+Nu=f$ 解的个数有限. 在 index $L\geqslant 0$ 时有相应的结果成立. 下面证明

(5.4.32′) **定理** 假定 (5.4.32) 的条件成立, 此外还设 X 是自反空间, 同时 N 紧. 那么对所有的正则值 $f\in \text{Range}(L+N)$ (也就是说, 根据 (3.1.45), 可能除去一个第一类 Baire 集), 当 N 充分光滑时, 方程 $Lu+Nu=f$ 的解的个数或者有限(当 index $L=0$), 或者是 Y 的 p 维紧子流形(当 index $L=p>0$).

证明: 首先假定 $f\in \text{Range}(L+N)$ 和 index $L=0$, 我们将证明从 (5.4.32) 可推出如下事实:

(*) 任何使 $\|Lu_n+Nu_n-f\|\to 0$ 的序列 $\{u_n\}$ 依范数一致有界.

暂时假定(*)成立, 我们指出, 如果 f 是 $L+N$ 的正则值, 则 $Lu+Nu=f$ 的解 $\tilde{u}$ 孤立 (因为 $L+N'$ 有逆). 同时从 (*) 推出, 如果 $Lu+Nu=f$ 有无穷多的解 $\{\tilde{u}\}$, 它们必然一致有界. 从自反 Banach 空间中有界集的弱紧性和 N 的紧性推出, 对某个弱收敛子序列 $\{u_{n_j}\}$, Lu_{n_j} 强收敛. 于是根据 Fredholm 算子的性质, $\{u_{n_j}\}$ 强收敛. 这和 $Lu+Nu=f$ 的解是孤立的相矛盾, 从而这些解只能是有限多个. 至于 index $L>0$ 的情形, 可从 Smale 定理 (3.1.29) 后的附注得出结论.

下面证明(*), 为此假定序列 u_n 满足如下条件:

$$F(u_n)=Lu_n+Nu_n-f$$

依范数趋于 0, 把 u_n 分解成 $u_n=v_n+z_n$, 其中 $z_n\in \text{Ker } L$,

$v_n \in X_1$。我们得到

$$\|Lv_n\| \leqslant \|F(u_n)\| + \|Nu_n - f\|.$$

从N的一致有界性推出 $\|Lv_n\|$ 一致有界。另一方面，因为L在 $\operatorname{Ker} L$ 外有逆，$\{\|v_n\|\}$ 也一致有界。从而，为证(*)只需证 $\{\|z_n\|\}$ 一致有界，而这可由反证法得出。事实上，因 $f \in \operatorname{Range}(L+N)$，由(5.4.32)推出，如果 $\|z_n\| \to \infty$，则 $\|P_0 f\| < \|P_0 N(z_n + v_n)\|$；但是因 $F(u_n) \to 0$，故 $P_0(N(z_n + v_n) - f) \to 0$，得出矛盾。

5.4F 保锥算子的性质

对实 Banach 空间X可以定义锥K，K是X的闭凸子集，满足(i)如 $x \in K$，则对任意非负实数α，$\alpha x \in K$；(ii)除 $x = 0$，由 $x \in K$ 得出 $-x \bar{\in} K$。对于映X的锥到锥的映射f，前面几小节中证明的很多结果都可以大大加强。这种映射称作保锥映射。作为这种改进的例子，我们证明(5.4.24)的如下推广。

(5.4.33)定理 设D是 Banach 空间X中(包含原点)的有界开区域，K是X的锥。设N是紧的保锥映射，且

(5.4.34)
$$\inf_{x \in K \cap \partial D} \|Nx\| > 0,$$

那么方程 $x = \lambda Nx$ 有解 (x_0, λ_0)，$\lambda_0 > 0$，$x_0 \in \partial D \cap K$。

证明：和(5.4.24)中一样，我们把问题化成有限维的情形来证。事实上，如果 $x = \lambda Nx$ 没有定理中所述的解，那么由(5.4.34)，有 $\alpha > 0$，使

(5.4.35) $\|Nx - tx\| \geqslant \alpha > 0$，对一切 $t > 0$ 和 $x \in \partial D \cap K$。根据(2.4.2)，存在紧算子 N_α，它有奇的有限维值域 X_k，使得对一切 $x \in \partial D \cap K$，有 $\|N_\alpha x - Nx\| \leqslant \frac{1}{2}\alpha$。于是由(5.4.34)，对 $t > 0$ 和任何 $x \in \partial D \cap K$，有 $\|N_\alpha x - tx\| \geqslant \frac{1}{2}\alpha$；从而对 $x \in \partial D \cap K$ 和 $\lambda > 0$，方程 $x = \lambda N_\alpha x$ 没有解 (x, λ)。

我们现在对X是奇有限维 Banach 空间的情形证明这个定理，于是方程 $x = \lambda N_\alpha x$ 有解 (x, λ)，其中 $x \in X_k \cap (\partial D \cap K)$，

$\lambda > 0$，从而与上面最后一段话相矛盾．当X是奇数维时，暂且假定N在∂D上有延拓$\widetilde{N}$，使得(i) $\widetilde{N}$映∂D到K，(ii)对$x\in\partial D$，$\|\widetilde{N}(x)\|\geqslant\alpha>0$．那么根据(5.4.24)的证明，方程$x=\lambda\widetilde{N}x$有解$(x_0,\lambda_0)$，$x_0\in\partial D$，我们再证明对充分大的$\lambda$有$d_B(I-\lambda\widetilde{N},0,D)=0$，于是$\lambda_0>0$．一旦得到这个结论，就有$x_0-\lambda_0\widetilde{N}x_0\in\partial D\cap K$，从而$\widetilde{N}x_0=Nx_0$；由此，方程$x=\lambda Nx$有解$(x_0,\lambda_0)$，$x_0\in\partial D\cap K$，$\lambda_0>0$．

为证对充分大的λ有$d_B(I-\lambda\widetilde{N},0,D)=0$，我们指出，对充分大的$\lambda$，向量场$x-\lambda\widetilde{N}x$漏掉了一个方向．事实上，令$u\in K(u\neq 0)$，并假定当$\lambda_n\to\infty$时，有序列$(t_n,x_n)$使

(5.4.36)　$x_n-\lambda_n\widetilde{N}x_n=t_nu$，　其中$x_n\in\partial D$，$t_n>0$．

那么（必要时选子序列），可以假定$\widetilde{N}x_n\to v$；因为对$x\in\partial D$，$\inf\|\widetilde{N}x\|>0$，所以$v\neq 0$，$v\in K$，于是$\frac{x_n}{\lambda_n}-\widetilde{N}x_n\to -v$．但是由(5.4.36)，$\frac{x_n}{\lambda_n}-\widetilde{N}x_n=\frac{t_n}{\lambda_n}u$．因为对一切$n$，$\frac{t_n}{\lambda_n}u\in K$，而$-v\notin K$，这就得出矛盾．

最后证明N的延拓$\widetilde{N}$的存在性，其中$N(\partial D\cap K)$包含在X的k维线性子空间X_k之中，以及对一切$x\in\partial D\cap K$，$\|Nx\|\geqslant\beta>0$，那么$\overline{\mathrm{co}}N(\partial D\cap K)$不包含0．由在$X_k$中选取正交基，我们可记

$$N(x)=(n_1(x),\cdots,n_k(x)),\quad x\in\partial D\cap K.$$

根据Urysohn引理，可以假定函数$n_i(x)$可连续延拓成函数$\tilde{n}_i(x)$到$\overline{D}$．现在来构造$\widetilde{N}$．令$y\in\mathrm{int\ co}\,N(\partial D\cap K)$，$r(x)$是$X_k$到$\mathrm{co}N(\partial D\cap K)$的连续保核收缩，$r(x)$定义如下：对$x\bar{\in}\mathrm{co}N(\partial D\cap K)$，在$X_k$中构造连接$x$和$y$的直线段$L(x,y)$，令$r(x)$是交集$L(x,y)\cap\partial\,\overline{\mathrm{co}}\,N(\partial D\cap K)$中的点．现在在$\overline{D}$上定义$\widetilde{N}(x)$为$\widetilde{N}(x)=P\tilde{n}(x)$，其中$\tilde{n}(x)=(\tilde{n}_1(x),\cdots,\tilde{n}_k(x))$．显然，对$x\in\partial D\cap K$，$\widetilde{N}(x)=N(x)$，于是$\widetilde{N}$是$N$在$\overline{D}$上的连续延拓，此外还有$\widetilde{N}(\overline{D})\subset\overline{\mathrm{co}}N(\partial D\cap K)\subset K$，且对$x\in\overline{D}$，

$$\|\widetilde{N}(x)\| \geqslant d(\overline{\text{co}}\,N(\partial D \cap K), 0) > 0.$$

于是 $\widetilde{N}$ 就是所要的延拓.

(5.4.33)的一个重要推论是下面的 Krasnoselski 定理(1964).

(5.4.37) **单调弱函数定理** 设N是定义在锥K上的紧的保锥算子，且有线性保锥算子 L(它是保持关于K的序关系的单调算子)和非零元 $x_0 \in K$，使得

(5.4.38) $$Nx \geqslant Lx \text{ 和 } Lx_0 \geqslant \alpha x_0, \text{ 其中 } \alpha > 0.$$

那么对任何包含原点的有界区域 D，方程 $x = \lambda Nx$ 有解 (x, λ)，其中 $x \in \partial D \cap K$，$\lambda > 0$.

证明: 对任 $\varepsilon > 0$，令 $N_\varepsilon x = Nx + \varepsilon x_0$. 那么 N_ε 紧，且对一切 $x \in \partial D \cap K$，$\|N_\varepsilon x\| \geqslant \inf\limits_{y \geqslant \varepsilon x} \|y\| > 0$. 因而由 (5.4.33)，存在一对 $(\lambda_\varepsilon, x_\varepsilon)$ 满足

(5.4.39) $$Nx_\varepsilon + \varepsilon x_0 = \lambda_\varepsilon x_\varepsilon,\ \lambda_\varepsilon > 0,\ x_\varepsilon \in \partial D \cap K.$$

随着 $\varepsilon \to 0$ (必要时取子序列)，我们可以假定 $Nx_\varepsilon \to y$ 和 $\lambda_\varepsilon \to \lambda_0$. 显然 $y \in \partial D \cap K$; 于是只剩下证明 $\lambda_0 \neq 0$.

为此，我们先注意到从 (5.4.38) 可推出

(5.4.40) $$Lx_\varepsilon + \varepsilon x_0 \leqslant \lambda_\varepsilon x_\varepsilon \text{ 和 } x_\varepsilon \geqslant \lambda_\varepsilon^{-1} \varepsilon x_0.$$

于是，存在最大的 $t_\varepsilon > 0$ 使 $x_\varepsilon \geqslant t_\varepsilon x_0$，由此推出 $Lx_\varepsilon \geqslant t_\varepsilon \alpha x_0$. 但是从 (5.4.39) 推出 $Lx_\varepsilon \leqslant \lambda_\varepsilon x_\varepsilon$，因而 $x_\varepsilon \geqslant t_\varepsilon \alpha \lambda_\varepsilon^{-1} x_0$. 由 t_ε 是最大的，可得 $t_\varepsilon \geqslant \frac{t_\varepsilon \alpha}{\lambda_\varepsilon}$，即 $\lambda_\varepsilon \geqslant \alpha > 0$，从而 $\lambda_0 > 0$.

5.5 对非线性边值问题的应用

在对非线性偏微分方程或常微分方程边值问题解的结构作定性研究时，5.3 节和 5.4 节的结果有着巨大的价值. 对于下面要考虑的一些问题尤其是如此. 这些问题包括 (a) 存在性 (或不存在性)，(b) 唯一性(或非唯一性)，(c) 对参数的连续相依性，以及(d) 依赖于参数的问题的解的连续统.

为把前面几节证明的抽象结果用于具体问题，一般都需要下

面几个步骤．首先，通过适当的坐标变换，把隐含在非线性方程中的任何参数变成显式的．其次，选取适当的 Banach 空间X和Y，使所考虑的微分方程可以用某个映射 f 来表示，其中 f 定义在X的区域上，在Y中取值．再下一步应该证明 f 的基本性质：有界性，连续性和可微性．这些性质对于把适当的度理论用于将讨论的具体问题是必需的．最后应该证明计算 f 的度时所必需的解析估计．

我们由考虑一个问题开始，这个问题与 Leray 和 Schauder 在他们的基本文章(1934)中考虑过的问题类似．

5.5A 拟线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域，边界为 $\partial\Omega$，考虑定义在 $\bar{\Omega}$ 上的如下方程组，

$$(5.5.1)\qquad \sum_{|\alpha|+|\beta|=2} A_{\alpha\beta}(x, u, Du)D^\alpha D^\beta u + A_0(x, u, Du) = 0,$$

在 Ω 中，

$$(5.5.2)\qquad u|_{\partial\Omega} = g.$$

经典的 Dirichlet 问题 (5.5.1)—(5.5.2) 在于决定一个函数 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$，它逐点满足 (5.5.1)—(5.5.2)．如果存在常数 $\mu > 0$, $M > 0$，使得对任何 $|y| \leqslant M$, $|z| \leqslant M$, $x \in \bar{\Omega}$，都有 $A_{\alpha\beta}(x, y, z)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant \mu|\xi|^2$，那么 (5.5.2) 左端的微分算子是椭圆型的．1.2 节中的例子指出，由于各种原因，这样的拟线性椭圆型 Dirichlet 问题可以没有解．这些原因包括诸如 Ω 的形状，大小，$A_0(x, y, z)$ 的增长速度及符号等等．

这一类 Dirichlet 问题的可解性问题是由 Hilbert 于 1900 年在他的著名讲演中提出来的 (Hilbert, 1900)，然后由 S. Bernstein 进行了广泛的研究．当 $N = 2$ 时，Bernstein 试图解 (5.5.1)—(5.5.2)，其办法是 (a) 在方程组 (5.5.1)—(5.5.2) 中引入参数 t 得到一个单参数方程组族 P_t，当 $t = 0$ 时方程组 P_0 可解，当 $t = 1$ 时方程组 P_1 即 (5.5.1)—(5.5.2)；(b) 用连续性方法证

明对 $t\in(0,1]$，每个 P_t 可解.1934 年，Leray 和 Schauder 大大地推广了连续性方法，借助于度理论，他们把它变换成同伦论证. 但是这个方法要求困难的解析先验估计，以保证映射 f 的度有定义. 一旦有了这个估计，基本思想就是应用 (5.4.14) 中讨论的先验有界原则.

作为一个简单的例子，我们提到

(5.5.3)定理 设 $\partial\Omega$ 和 g 属于 C^1 类，同时函数 $A_{\alpha\beta}(x,y,z)$ 和 $A_0(x,y,z)$ 对 x,y,z 属于 C^1 类. 那么当下面的条件满足时，(5.5.1)—(5.5.2) 的 Dirichlet 问题有解. 这条件是，当在 (5.5.1) 中把 A_0 换成 tA_0，g 换成 tg 时 $(t\in[0,1])$ 得到的解 v_t 满足先验估计

(5.5.4) $$\sup_{\Omega}|v_t|\leqslant M_1,\quad \sup_{\Omega}|\nabla v_t|\leqslant M_2,$$

其中 M_1 和 M_2 是与 t 和 v_t 无关的常数.

证明的要点：如上所述，我们用 (5.4.14) 证明结论. 但是首先必须对算子确定一个适当的 Banach 空间 X，为此我们采用 2.2D 节中讨论过的 Schauder 反演法. 事实上，先验估计 (5.5.4) 表明，代换后的每个方程组的任一解 v_t 都有 Hölder 连续的梯度，其指数 $\alpha\in(0,1)$ 和 t, v_t 无关. 令 $X=C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$，用下面的方法定义一个映 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 到自身的映射 T：固定 $u\in X$，考虑线性椭圆型方程 Dirichlet 问题

$$\sum_{|\alpha|+|\beta|=2} A_{\alpha\beta}(x,u,Du)D^\alpha D^\beta U + A_0(x,u,Du)=0,\ \text{在}\ \Omega\ \text{上},$$

$$U|_{\partial\Omega}=g$$

的解 U. 根据 2.2D 节的结果，$Tu=U$ 映 X 到自身，是有界映射，事实上它映 X 中有界集成 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中有界集. 因为 $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 $C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 的紧子集，所以映射 T 紧.

现在对 $f(u,t)=tTu$，$X=C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ 应用先验有界原则 (5.4.14). 根据假设，如果 v 满足 $u=tTu$，那么 $v\in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ 也满足代换后的方程组. 于是 $\|v\|_{C^1(\bar{\Omega})}\leqslant M_1+M_2$. 而且，根据证明一开始时提到的先验估计 (5.5.4)，以及 Ladyhenskaya 和 Ura-

lsteva (1968) 的 Hölder 连续性，存在数 $\alpha\in(0,1)$ 使

$$|\nabla v(x)-\nabla v(y)|\leqslant M_3|x-y|^\alpha,$$

其中 $M_3>0$ 与 $t\in[0,1]$ 和 v 都无关. 于是

$$\|v\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})}\leqslant M_1+M_2+M_3.$$

得到这个不等式后，根据 (5.4.14)，(5.5.1)—(5.5.2) 有解 $u\in C^2(\bar{\Omega})$. 证明的细节请看 Ladyhenskaya 和 Uralsteva (1968).

5.5B $\Delta u+f(x,u)=0$ 的 Dirichlet 问题的正解

Schauder 不动点定理的一个有意思的应用和如下 Dirichlet 问题的正解有关，该问题定义在有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上，

(5.5.5) $\Delta u+\lambda^2 f(x,u)=0$，对 $u\geqslant 0$ $f(x,u)\geqslant\beta>0$,

$$u|_{\partial\Omega}=0.$$

下面证明，对方程组 (1.2.3)—(1.2.4) 得到的结果可有如下推广：

(5.5.6)假定对一切 $u\geqslant 0$, $f(x,u)\geqslant\beta>0$; 还设对于固定的 x, $f(x,u)$ 对 u 不减，且对 $u\geqslant 0$ 有 $f(x,u)\geqslant g(x)u$*⁾. 那么必存在一个有限(临界)数 $\lambda_c>0$，使得对 $\lambda<\lambda_c$, (5.5.5) 至少有一个正解，对 $\lambda>\lambda_c$, (5.5.5) 没有正解.

证明： 证明可以很自然地分成三步. 首先证明在所给条件下，(5.5.5) 对某个 $\lambda>0$ 有解. 其次证明，如果对 $\lambda_0>0$ (5.5.5) 有正解，那么对区间 $(0,\lambda_0]$ 中所有的 λ 它都有正解. 最后证明，对所有充分大的 λ, (5.5.5) 没有正解.

(i) (5.5.5) 对某个 λ 有正解: 注意到 (5.5.5) 的正解一一对应于积分方程

$$u=\lambda^2\int_\Omega G(x,y)f(x,u) \tag{5.5.7}$$

的正解. 再注意到在 Ω 中 Green 函数 $G(x,y)>0$, $G(x,y)$ 在 Ω 上可积，我们断定，对 $u\geqslant 0$,

$$Tu=\int_\Omega G(x,y)f(x,u)\geqslant\beta\int_\Omega G(x,y)=\tau. \tag{5.5.8}$$

用 $C(\Omega)$ 记定义在 Ω 上的连续函数的 Banach 空间，取上确界范数，那么刚

---

*⁾ 要求 $g(x)>0$，可积——译者注.

才定义的算子 T_0 是连续的紧映射，T 映 $C(\Omega)$ 的正锥到自身．不等式(5.5.8)保证可对映射 $Su = Tu/\|u\|_{C(\Omega)}$ 作出同样的结论．事实上 S 是紧连续映射，它映有界闭凸集 $\Sigma^+ = \{u \mid u \geqslant 0, \|u\|_C \leqslant 1\}$ 到 $\partial\Sigma^+ = \{u \mid u \geqslant 0, \|u\|_C = 1\}$，$S$ 的不动点 $\bar{u}$ 正是(5.5.5)的解，$\lambda^2 = 1/\|T\bar{u}\|$．从 Schauder 不动点定理(2.4.3)推出 S 有不动点 $\bar{u} \in \partial\Sigma^+$，因而(5.5.5)有正解，且 $\lambda > 0$．

(ii) 如果对 $\lambda_0 > 0$，(5.5.5)有正解 u_0，那么对区间 $(0, \lambda_0]$ 中所有的 λ，(5.5.5)有正解：令

$$T_\lambda u = \lambda^2 \int_\Omega G(x, y) f(x, u),$$

我们将证明，对一切 $\lambda \in (0, \lambda_0]$，$T_\lambda$ 映有界闭凸集 $\Sigma_0 = \{u \mid 0 \leqslant u \leqslant u_0, u \in C(\Omega)\}$ 到自身．据此以及 T_λ 紧连续，故从 Schauder 不动点定理推出 T_λ 在 Σ_0 中有不动点 u_λ，且 u_λ 满足(5.5.5)．为证 T_λ 映 Σ_0 到自身，我们注意由 $f(x, u)$ 对 u 不减，又在 Ω 中有 $G(x, y) > 0$，故对 $u \in \Sigma_0$，

$$f(x, 0) \leqslant f(x, u) \leqslant f(x, u_0)$$

且

$$\int_\Omega Gf(x, 0) \leqslant \int_\Omega Gf(x, u) \leqslant \int_\Omega Gf(x, u_0).$$

于是对 $\lambda \in (0, \lambda_0]$ 和 $u \in \Sigma_0$，$0 < T_\lambda(0) \leqslant T_\lambda(u) \leqslant T_{\lambda_0}(u_0) = u_0$，这就是所要求的 $T_\lambda(u) \in \Sigma_0$．

(iii) 对充分大的 λ，(5.5.5)没有正解：如果用 (u_1, λ_1^2) 记

$$\Delta u + \lambda^2 g(x) u = 0$$

在 Dirichlet 边界条件 $u|_{\partial\Omega} = 0$ 下的第一特征元和特征值，那么在 Ω 中 $u_1 > 0$．用 u_1 乘(5.5.5)再两次分部积分就得出，如果 u 满足(5.5.5)，那么

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \{\Delta u + \lambda^2 f(x, u)\} u_1 \\ &= \int_\Omega \{-\lambda_1^2 g(x) u_1 u + \lambda^2 f(x, u) u_1\} \\ &\geqslant \int_\Omega (\lambda^2 - \lambda_1^2) g(x) u_1 u, \end{aligned}$$

但这和 $\lambda > \lambda_1$ 相矛盾．

5.5C 周 期 水 波

这里考虑一个经典问题，证明在重力作用下，在理想不可压缩流体的自由表面 $\partial\Gamma$ 上存在一个稳定的周期波．由于这个问题的

精确性和相对简单性，这里所讲的结果是把分析用于困难的非线性特征值问题最成功的尝试之一。我们假定流体在 $\mathbb{R}^2$ 空间中占据一个区域 Γ，流动是稳定的，无旋的和二维的. $\mathbb{R}^2$ 中的点用坐标(x, y) 表示，那么这个问题的连续性方程和 Euler 运动方程是

(5.5.9) $$\Delta\zeta = 0, \quad \text{在}\,\Gamma\,\text{中},$$

(5.5.10) $$\frac{1}{2}|\nabla\zeta|^2 + gy = \text{常数},\text{在}\ \partial\Gamma\ \text{上},$$

其中 ζ 记流动的速度位势，因而我们需要去解一个非线性自由边值问题. 按照 Levi-Civita 的论证，引进复变元 $z = x + iy$ 和 z 的两个解析函数

$$u(z) = \zeta + i\phi$$

和

$$\omega = \log\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) = C(\varPhi) + i\varPhi,$$

其中 ϕ 是 ζ 的流函数，$\varPhi$ 是速度向量 V 在点 (x, y) 处的角，$C(\varPhi)$ 是 $\varPhi$ 的共轭调和函数. 为了在已知的区域进行讨论，选取 $u=\zeta+i\phi$ 为独立变元，把 ω 看作 u 的函数. 为简单起见. 假定流体处于无限深处，经过所说的周期变换后，所希望的周期解一一对应于下面的非线性积分方程的周期解.

(5.5.11) $$\varPhi(\theta) = \lambda\int_0^{\pi} K(\theta', \theta)e^{3C(\varPhi)}\sin\varPhi d\theta',$$

其中 $\lambda = \dfrac{g\nu}{2\pi c^2}$，$\nu$ 是波长，c 记运动波的不变的水平速度. $K(\theta', \theta)$ 是 Δ 在圆内的 Neumann 问题的 Green 函数，由

$$\int_0^{2\pi} C(\varPhi(\theta))d\theta = 0$$

决定 $C(\varPhi)$ 定义中的常数. 我们指出，(5.5.11)是个非线性特征值问题. 关于记号可参看图 5.3.

和 (5.5.11) 有关的问题基本上可分成两类：(i) $\varPhi$ 很小时的局部分歧问题. (ii) 对 $|\varPhi|$ 不加限制时一般的全局性问题. 局部问题在 1925 年由 Levi-Civita 解决，但是全局性问题(我们这

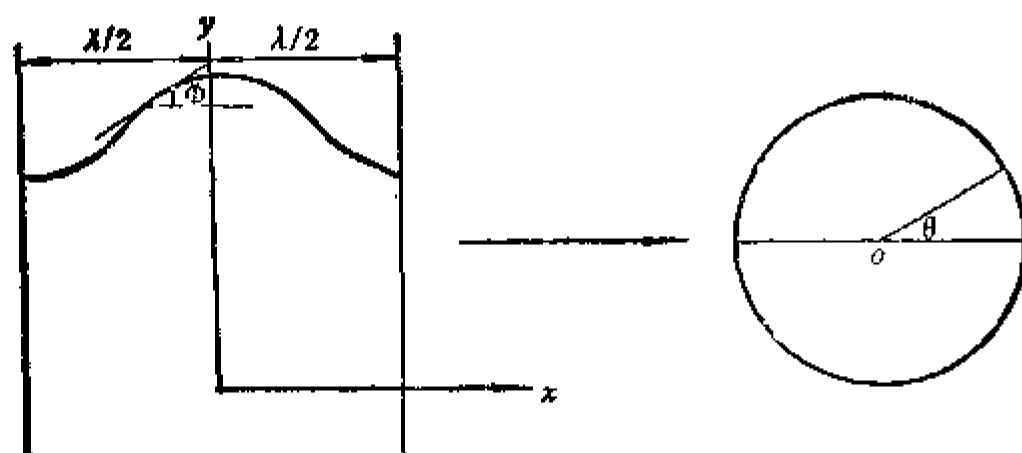


图 5.3 周期水波问题的记号.

里要讨论的)一直遗留下来，直到 1961 年才部分解决，当时苏联数学家 Y. P. Krasovskii 证明了如下结果.

(5.5.12) **定理** 存在满足 (5.5.9) 和 (5.5.10) 的稳定周期波，波形的切线的极大倾角可在开区间 $(0, \pi/6)$ 中取任意值，该波关于通过波峰的纵轴对称. 不存在具任意大 Froude 数 λ 的这种类型的波.

在概略地叙述这个有趣的结果的证明之前，我们指出，在如下意义下定理中的数 $\pi/6$ 是够好的了. (i) 对 Stokes 周期极限波，$\max|\phi| = \pi/6$ (参看图 5.4)，并有尖点. (ii) (5.5.9)，(5.5.10) 的解表明，当 $\max|\phi| > \pi/6$ 时，不存在稳定周期波(可见 Wehausen (1969)). 稍微修改下面给出的证明，Krasovskii 对有限深度和有周期底部的波证明了定理 (5.5.12) 加强了的类似结论.

定理 (5.5.12) 证明的梗概: 证明分为以下几步:

(1) 在适当的 Banach 空间 X 中，把方程 (5.5.11) 表成形若 $x = \lambda Ax$ 的算子方程;

(2) 在 X 中证明映射 A 的紧连续性;

(3) 把 Leray-Schauder 度用于这个算子方程;

(4) 证明对计算 Leray-Schauder 度所必需的估计.

为实现步骤 (1)—(4)，我们需要知道如下的分析上的事实，它们和调和函数的共轭算子 C 以及核 $K(\theta', \theta)$ 有关 (有趣的是，

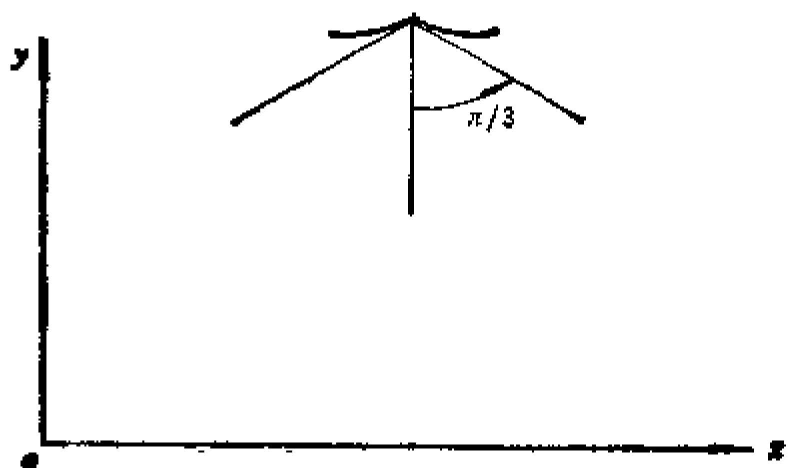


图 5.4 周期水波波峰处的极限形式.

从这些事实以及对算子 A 全连续性的要求中，很自然地导出极限 $\pi/6$ 这个数).

对共轭调和函数边值的 L_p 估计 设 $u(z)$ 是定义在复平面的单位圆 $|z|<1$ 内的调和函数，其边界值为 $u(e^{i\theta})\in L_p[0,2\pi](1\leqslant p<\infty)$. 那么，如果用 $v(z)$ 记 $u(z)$ 在 $|z|<1$ 内的共轭调和函数，由令 $\int_0^{2\pi} v(z)d\theta=0$ 规范化，则 $f(z)=u(z)+iv(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析，$f(0)$ 是实数. 定义线性映射

$$C(u(e^{i\theta}))=v(e^{i\theta}),$$

并讨论 C 的 L_p 有界性. 我们有如下的结果.

事实 1 M. Riesz 定理 对 $1<p<\infty$，C 是 $L_p[0,2\pi]\to L_p[0,2\pi]$ 的有界映射，故存在与 u 无关的常数 c_p，使

$$\|Cu\|_{L_p}\leqslant c_p\|u\|_{L_p}.$$

事实 2 Zygmund 定理 如果 $|u|\leqslant 1$，那么对一切 $0\leqslant\lambda<\frac{\pi}{2}$，$\int_0^{2\pi}\exp(\lambda|Cu|)\,d\theta\leqslant\frac{4\pi}{\cos\lambda}$.

通过把(1.3.18)推广到"周期的情形"的方法，可用奇异积分算子的方法再次证明这些结果. 请看 Zygmund (1934).

事实 3 K 的 L_p 估计 存在 $C_p>0$ 使

$$\max_{\theta}\int_0^{\pi}|K(\theta',\theta)|^p d\theta'\leqslant C_p,$$

且对 $1 < p < \infty$ 和固定的 θ，$\frac{\partial K}{\partial \theta}$ 映 $L_p[0, 2\pi] \to L_p[0, 2\pi]$ 有界。这第三个事实是 Δ 的 Green 函数的熟知的性质。

第一步和第二步： 取 $X = C_0[0, \pi]$，即 $[0, \pi]$ 上在 0 和 π 两点取值为 0 的连续函数的集合。令 $\|\Phi\|_X = \sup\limits_{[0,\pi]} |\Phi(\theta)|$，定义算子

(5.5.13) $$A\Phi(\theta) = \int_0^\pi K(\theta', \theta) e^{3C(\Phi)} \sin \Phi d\theta'.$$

A 定义在 X 中半径为 $\rho < \pi/6$ 的球 $S(0, \rho)$ 上，下面要证明 A 是紧连续映射。把(5.5.13)和事实 2 结合起来自然就出来个 $\pi/6$。显然，由上面的事实 1 和事实 3，A 有定义，是从 $S(0,\rho) \to X$ 的连续映射，其中 $\rho < \pi/6$。事实上，用 Hölder 不等式不难证明，对 Φ_1，$\Phi_2 \in S(0, \rho)$，$\rho = \frac{\pi}{6} - d$ $(d > 0)$，有绝对常数 $K_d > 0$，使

$$\|A\Phi_1 - A\Phi_2\| \leqslant K_d \|\Phi_1 - \Phi_2\|.$$

为验证 A 的紧性，我们又用事实 1 和 3 证明，如果 $\tilde{\Phi}(\theta) = A\Phi$，那么对某个 $s > 1$，对一切 $\Phi \in S(0, \rho)$，有 $\left\|\frac{d\tilde{\Phi}}{d\theta}\right\|_{L_s} \leqslant K_{d,s}$，其中 $\rho = \frac{\pi}{6} - d$。于是对某个 $\mu > 0$，$\|\tilde{\Phi}\|_{C_{0,\mu}} \leqslant M\rho$。这就导出了所要的 A 的紧性(这里 $C_{0,\mu}$ 是指数为 μ 的 Hölder 连续函数的 Banach 空间)。

第三步： 为用 Leray-Schauder 度证明(5.5.11)解的存在性，令

$$A_{\varepsilon,\lambda}\Phi = \lambda \left[A\Phi + \varepsilon \int_0^\pi K(\theta', \theta) \sin \theta' d\theta' \right].$$

注意，$A_{\varepsilon,\lambda}$ 紧且是正算子。我们证明

(†)对大的 $\lambda > 0$ 和小的 $\lambda > 0$，$I - A_{\varepsilon,\lambda}$ 在正锥 $K_\beta (0 < \beta < \pi/6)$ 上的 Leray-Schauder 度不相等，其中

$$K_\beta = \{\Phi(\theta) \mid \Phi \in C_0[0, \pi], \Phi \geqslant 0, \|\Phi\|_{C_0} \leqslant \beta\}.$$

对证定理(5.5.12)的存在性部分来说，(5.5.12)结论的后一部分

以及(†)是充分的.为看出这点,我们首先指出,可由(†)推出存在序列 $\{\lambda_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\{\Phi_n\}$, 其中 $\lambda_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ 和 $\varphi_n \in C_0[0,\pi]$ 使

$$\Phi_n = \lambda_n A_{\varepsilon_n,\lambda_n}\Phi_n, \quad \|\Phi_n\|_{C_0} = \beta.$$

根据 A 的紧性和 $\{\lambda_n\}$ 的有界性,再由于定理(5.5.12)的不存在部分,存在强收敛子序列 $\{\lambda_{n_j}\}$ 和 $\{\Phi_{n_j}\}$,其极限为 $(\lambda_\beta, \Phi_\beta)$,使

(5.5.14) $\Phi_\beta = \lambda_\beta A\Phi_\beta$, $\|\Phi_\beta\|_{C_0} = \beta$, 在 $[0,\pi]$ 上有 $\Phi_\beta(\theta) \geqslant 0$.

于是可以把 $\Phi_\beta(\theta)$ 延拓成 θ 的奇的 2π 周期函数。

第四步: 首先我们证明上面第三步中提到的结论(†).当 λ 很小时,因为对 $\lambda=0$ 有 $A_{\varepsilon,\lambda}\equiv 0$,所以 $d(I-A_{\varepsilon,\lambda}, 0, K_\beta)=1$.另一方面,当 λ 很大时,由于 $\max|\Phi(\theta)| \leqslant \beta$, $\Phi(\theta) - A_{\varepsilon,\lambda}\Phi(\theta)$ 不可能是正的,所以这时有 $d(I-A_{\varepsilon,\lambda}, 0, K_\beta)=0$.

定理(5.5.12)的非存在性结果更困难. 它基于对(5.5.11)的解 $\Phi(\theta)$ 的下面两个先验估计:

(5.5.15) 当 $\|\Phi\|_{C_0} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时,存在绝对常数 $\gamma>0$ 和 $\delta>0$ 使

$$\Phi^\gamma(\theta) \geqslant \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^\gamma L(\Phi^\gamma),$$

其中

$$L(\Phi) = \int_0^\pi K(\theta', \theta)\Phi(\theta')d\theta'.$$

(5.5.16) 存在绝对常数 $\beta>0$ 使 $\Phi^\gamma(\theta) \geqslant \beta\sin\theta$.

假定(5.5.15)和(5.5.16)成立,后者中的 β 且是使该不等式成立的最大值,那么不存在性的证明如下:把算子 L 用到(5.5.16)上去,再用(5.5.15),我们有

$$\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^\gamma \Phi^\gamma \geqslant L\Phi^\gamma(\theta) \geqslant \beta L(\sin\theta) = \beta\sin\theta,$$

亦即 $\Phi^\gamma \geqslant \left(\dfrac{\lambda}{\delta}\right)^\gamma \beta\sin\theta$, 从而 $\left(\dfrac{\lambda}{\delta}\right)^\gamma \leqslant 1$,因而对 $\lambda > \delta$ (5.5.11)没有解.为结束我们对定理(5.5.12)证明的概述,下面证明(5.5.15)和(5.5.16)。要证(5.5.15),只需证明,对 $\varphi \in K_\beta$,

$$(5.5.17)\qquad L(e^{3C(\Phi)}\sin\Phi)\geqslant\frac{1}{\delta}L(\Phi^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}.$$

因为由 Hölder 逆不等式有

$$L(e^{3C(\Phi)}\sin\Phi)\geqslant L(e^{3C(\Phi)}\Phi)$$
$$\geqslant\{L(e^{3qC(\Phi)})\}^{1/q}\{L(\Phi^{\gamma})\}^{1/\gamma},$$

$\frac{1}{q}+\frac{1}{\gamma}=1$，$q<0$。从而推出 (5.5.17)。于是从基本事实 2 和 3 推出，对 $q=-\frac{1}{10}$ 和 $|\Phi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，有 $|L(e^{3|q|C(\Phi)})|<\delta^{-|q|}$。最后证明 (5.5.16)。把不等式 (5.5.15) 用 k 次，并令

$$\Phi^{\gamma}(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin n\theta,$$

我们得到

$$(5.5.18)\qquad L^k\Phi^{\gamma}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}\sin n\theta\leqslant\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^{\gamma k}\Phi^{\gamma}(\theta).$$

再由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}\sin n\theta\geqslant a_1\sin\theta-\left|\sum_{n=2}^{\infty}\cdots\right|$$

和

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{n^k}\sin n\theta\right|\leqslant\max_n|a_n|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|\sin\theta|}{n^{k-1}},$$

于是从 (5.5.18) 推出

$$\Phi^{\gamma}(\theta)\geqslant\left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{\gamma k}\left(a_1-\max_n|a_n|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k-1}}\right)\sin\theta.$$

因为在 $[0,\pi]$ 上 $\Phi(\theta)\geqslant 0$，$a_1>0$，把 k 取得充分大，我们就有 $a_1-\max_n|a_n|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{k-1}}\geqslant\frac{a_1}{2}$.

5.5D 自治系统周期运动的连续性

考虑如下二阶方程的周期解

(5.5.19) $\ddot{x}+Ax+f(x)=0;\quad |f(x)|=o(|x|)$.

这里 $x(t)$ 是 t 的N向量函数，A是一个$N\times N$正定矩阵，$f(x)$是属于 C^2 类的奇N向量函数，是 x 的高阶项. 在 4.1 节中，借助于分歧理论，我们考察，(5.5.19) 在奇点 $x=0$ 附近的周期解. 这里转向考虑 (5.5.19) 的周期解的整体结构.

作为第一个结果，考虑类似于 Liapunov 定理 (4.1.4) 的一个全局性结果.

(5.5.20)**定理** 设非奇异矩阵A的正特征值为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \cdots, \lambda_N^2$，对某个整数 $j\,(1\leqslant j\leqslant N)$，总有

(5.5.21) $$\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\neq\text{整数},\quad i=1,\cdots,N(i\neq j),$$

那么 (5.5.19) 有一族周期解 $x(\varepsilon)$，其周期 $\tau(\varepsilon)$ 连续依赖于实参数 ε，使得

(i) 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $x(\varepsilon)\to 0$，$\tau(\varepsilon)\to\dfrac{2\pi}{\lambda_j}$;

(ii) 当 $\varepsilon\to\infty$ 时，或者 $\sup|x(\varepsilon)|+\tau(\varepsilon)\to\infty$，或者 $x(\varepsilon)\to 0$ 并且 $\tau(\varepsilon)\to\dfrac{2n\pi}{\lambda_k}$，$k=1,\cdots,N$，$n=1,2,\cdots$. 但是，如果 $n=1$，那么 $k\neq j$，这就是说，或者 $x(\varepsilon)$ 的振幅$\to\infty$，周期 $\tau(\varepsilon)\to\infty$，或者 $x(\varepsilon)$ 趋于线性化方程周期解的覆盖(可能是多重的).

证明：重复 4.1 节的证明，令 $t=\lambda s$，那么 (5.5.19) 的奇周期解一一对应于算子方程

(5.5.22) $$x=\lambda^2(\mathfrak{G}x+\mathfrak{N}(x))$$

在 Sobolev 空间 $H=\mathring{W}_{1,2}\{[0,\pi];R^N\}$ 中的解，这里算子 $\mathfrak{G}$ 和 $\mathfrak{N}$ 全连续，对 $x, y\in H$ 由下列公式隐含定义

(5.5.23) $$(\mathfrak{G}x,\ y)=\int_0^\pi Ax(s)\cdot y(s)ds;$$

$$(\mathfrak{N}x,\ y)=\int_0^\pi f(x(s))y(s)ds.$$

从条件 (5.5.21) 推出，在H中适当选取的闭子空间上，$\mathfrak{G}$ 的特征值

λ_i^2 是简单特征值(参看 4.1 节)。于是由定理 (5.4.28), 有 (5.5.22) 的解的连续统 $(x(\varepsilon), \tau(\varepsilon))$, 把 $\left(0, \frac{1}{\lambda_i^2}\right)$ 或者和无穷, 或者和 $\left(0, \frac{N^2}{\lambda_k^2}\right)$ 连接起来, 其中 $N=1,2,\cdots$; $k=1,2,\cdots,N$. 当 $N=1$ 时 $k \neq i$. 定理得证。

下面对 (5.5.19) 中的向量函数 $f(x)$ 加上其它限制以加强刚才得到的结果。把 (5.4.37) 用到单调的弱函数上去, 可以得到一类重要的结果。例如令 $g(x)=Ax+f(x)$, 记

$$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_N(x)),$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_N)$, 我们可以证明

(5.5.24)定理 设 $g(x)$ 是 x 的奇函数, 有如下性质:

(i) 只要 $x_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,N)$, 就有 $g_i(x) \geqslant 0$;

(ii) 存在常数 $k>0$ 和整数 $j\,(1 \leqslant j \leqslant N)$ 使得对所有非负向量 x, $g_j(x) \geqslant kx_j$.

那么方程 (5.5.19) 有单参数周期解族 $x(\varepsilon)$, 其周期为 $\tau(\varepsilon)$, 其中 $\varepsilon=\sup\limits_{[0,\tau(\varepsilon)]}|x(\varepsilon)| \in (0,\infty)$.

证明: 为用 (5.4.37), 令 Banach 空间 $X=\prod\limits_{i=1}^{N} C[0,2\pi]$, 考虑两点边值问题

$$x_{ss}+\lambda^2(Ax+f(x))=0, \tag{5.5.25}$$

$$x(0)=x(1)=0. \tag{5.5.26}$$

和 (5.5.20) 中一样论证, 我们可以假定 (5.5.25)—(5.5.26) 的 λ 周期解对应于(5.5.22)的解。而后者的解即积分方程

$$x(s)=\lambda^2\int_0^1 G(t,s)g(x(t))dt \tag{5.5.27}$$

的解, 其中 G 是算子 x_{ss} 和边界条件 (5.5.26) 的 Green 函数。显然, 如果 K 是 X 上非负向量函数的锥, 那么 G 是 K 到自身的紧线性映射。根据假设条件, $g(x(s))$ 也映 K 到 K, 于是

$$Tx(s)=\int_0^1 G(t,s)g(x(t))dt$$

也是保锥紧映射。从 (5.5.24) 的假设条件推出 $Tx \geqslant \mathscr{B}x$，其中

(5.5.28) $$\mathscr{B}x(s) = \left\{0, 0, \cdots, k\int_0^1 G(t, s)x_i(t)dt, 0, \cdots\right\}.$$

显然 $\mathscr{B}$ 是 K 上的单调保锥映射，因而由 (5.4.37)，(5.5.25) 和 (5.5.26) 有解族 $(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon))$，其中 $\|x(\varepsilon)\| = \varepsilon, \lambda(\varepsilon) > 0$. 把这些解延拓到 $(-\infty, \infty)$ 成为 s 的周期奇函数，这个函数族就对应于所希望的 (5.5.19) 的周期解族。

5.5E 强制半线性椭圆型边值问题有解的必要且充分条件

我们由考虑如下的半线性 Dirichlet 问题开始。设问题定义在有界区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上：

(5.5.29) $$\mathfrak{L}u + f(u) = g,$$
$$D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1,$$

其中 $\mathfrak{L}$ 是自共轭算子

$$\mathfrak{L}u = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha\{a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u\}.$$

函数 f 满足如下条件：

(*) $$\lim_{s\to\pm\infty} f(s) = f(\pm\infty) < \infty \text{ 存在，且}$$
$$f(-\infty) < f(s) < f(+\infty).$$

我们证明如下的结果：

(5.5.30)定理 (5.5.29) 可解的必要且充分条件是：对 $\operatorname{Ker}\mathfrak{L} \subset L_2(\Omega)$ 中每个范数为 1 的元素 z_0 有下面的不等式成立

$$\int_\Omega g z_0 < f(+\infty)\int_{\{z_0>0\}} |z_0| - f(-\infty)\int_{\{z_0<0\}} |z_0|.$$

证明： 用 2.2D 节的共轭方法表示 (5.5.29)，我们把 (5.5.29) 改写为 Hilbert 空间中的算子方程

(5.5.31) $$Lu + Nu = \tilde{g},$$

其中 L 和 N 映 Sobolev 空间 $\mathring{W}_{m,2}(\Omega)$ 到自身，由公式

$$(Lu, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u D^\beta v,$$

$$(Nu, v) = \int_\Omega f(u)v, \quad (\tilde{g}, v) = \int gv$$

定义。

现在可把结果 (5.4.29) 直接用到 (5.5.31) 上。这是因为，如将要看到的，从条件(*)可推出条件 (5.4.30) 自动满足。事实上，我们指出，对 $v \perp \operatorname{Ker} L$ 且 $\|v\|$ 一致有界的 v，

$$\lim_{R\to\infty}(N(Rz_0+v), z_0) = f(+\infty)\int_{z_0>0}|z_0| - f(-\infty)\int_{z_0<0}|z_0| \tag{5.5.32}$$

一致成立。一旦证明了 (5.5.32)，就从 (5.4.29) 直接推出我们的结果。为此，用 $n(z_0)$ 记 (5.5.32) 的右端，并注意到由定义有

$$(N(Rz_0+v), z_0) = \int_\Omega f(Rz_0+v)z_0.$$

对任给 $\varepsilon > 0$，下面证明，对充分大的 R，有

$$\left| n(z_0) - \int_\Omega f(Rz_0+v)z_0 dx \right| < \varepsilon. \tag{5.5.33}$$

首先注意到，存在一个 $\delta>0$，使得对任何可测集 A，只要 $m(A)<\delta$，就有

$$\int_A f(\infty)|z_0|dx < \varepsilon/4,$$

这里 $m(A)$ 记集合 A 的 Lebesgue 测度。我们指出，因为 $\operatorname{Ker} L$ 是有限维空间，所以 δ 可以选得与 $z_0 \in \operatorname{Ker} L$ 无关，其中 z_0 的 L_2 范数等于 1。

对任何 $\|v\| \leqslant k$ 的 v，令 $\Omega_N = \{x \in \Omega, |v(x)| \leqslant N\}$，可以取 N 充分大，使得对所有这样的 v，$m(\Omega - \Omega_N) < \delta$. 于是(5.5.33)的左端不超过

$$\left|\int_{\Omega_+\cap\Omega_N}[f(\infty) - f(Rz_0+v)]|z_0|dx\right| + \left|\int_{\Omega_-\cap\Omega_N}[f(-\infty) - f(Rz_0+v)]|z_0|dx\right| + \left|\int_{\Omega-\Omega_N} f(Rz_0+v)z_0dx\right|$$

$$+\left|\int_{\Omega-\Omega_N} f(\infty)z_0dx\right|.$$

根据刚才讲的理由，上式中后两项都小于 $\frac{\varepsilon}{4}$. 其次证明，对充分大的 R，前两项也都小于 $\frac{\varepsilon}{4}$. 这可由 Lebesgue 收敛定理推出. 因为对 $|v|\leqslant N$，在 $\Omega_+\cap\Omega_N$ 上，每个被积函数按点趋于 0，同时囿于一个可积函数. 这就证明了 (5.5.33)，定理证完.

用 (5.3.22) 和 (5.4.32) 可对与 Dirichlet 问题 (5.5.29) 有关的定理 (5.5.30) 作出价值重大的实质性的推广. 用 Pu 记有 k 个未知量的 m 阶椭圆型方程组，满足"强制的"边界条件 Bu，Bu 由低于 m 阶的微分算子表出. 用 $f(x,D^\alpha u)$ 记向量 u 的连续有界向量值函数，极限 $\lim\limits_{R\to\infty}f(x,Ru_0)$ 一致存在，那么在 (5.4.32) 的基础上，我们可以找出椭圆型方程

$$Pu+f(x,D^\alpha u)=0,\quad 在\ \Omega\subset\mathbf{R}^N\ 上,$$
$$Bu|_{\partial\Omega}=0$$

有解的必要且充分条件. 这样的方程可由一个算子方程来表示，其定义域为由向量值函数组成的 Banach 空间 X，该向量值函数的每个分量是 Sobolev 空间 $W_{m,p}(\Omega)$ 的元素，满足边界条件 B. 这个映射的值域是向量值函数的 L_2 空间. 此外，由 (P,B) 定义的抽象线性算子 L 定义在 Banach 空间 X 上，已知 L 是具离散谱的 Fredholm 算子，从而 (5.3.22) 的条件 (5.3.23) 一般都满足.

注　　记

A　正常非线性 Fredholm 算子进一步的线性化结果

很自然想把 5.1 节关于线性化的结果推广到更一般的情形，在这个方向上，和 Banach-Mazur 定理有关的如下结果成立:

(1) 设 f 是指标 $p>0$ 的非线性 Fredholm 算子，作用于 Banach 空间 X 和 Y 间，那么，如果 f 还是正常映射，则 f 必有奇点(参看 Berger 和 Plastock, 1977).

这个结果的证明基于如下考察: 如果映射 f 没有奇点，f 将决定空间 X

和 Y 之间的一个"纤维化"(看 Spanier, 1966). 那么, 根据覆盖同伦定理的一个推论, 对每个 $y \in Y$, 由 Y 的收缩性可推出 $f^{-1}(y)$ 的收缩性, 这与 $f^{-1}(y)$ 是一个紧的可定向 p 维流形相矛盾.

B 具奇点映射的其它结果

在(5.1.14)的证明中采用的确定算子 A 的值域的结构的论证, 可在不同方向上进行推广. 其中算子 A 定义在 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域 Ω 上, 由

$$Au = \Delta u + f(u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

规定. 在这些推广中有 Podolak (1976) 的结果:

(1) 设渐近条件(5.1.13')换成

$$(5.1.13^k) \qquad \lambda_{k-1} < \lim_{t\to-\infty} f'(t) < \lambda_k < \lim_{t\to+\infty} f'(t) < \lambda_{k+1},$$

其中 $\lambda_{k-1}, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ 记 Δ 的三个依次的特征值. 那么只要假定

$$\dim \operatorname{Ker}(\Delta + \lambda_k) = 1 \quad 和 \quad \int_\Omega u_k|u_k| \neq 0,$$

其中 u_k 是 λ_k 相应的特征函数, 就有一个类似于(5.1.14c)的结果成立. 特别, 在(5.1.14c)中 $g \in O_2$ 意味着边值问题

$$\Delta u + f(u) = g, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

至少有两个解.

(2) 更一般些, 设 $L \in \Phi_p(X, Y)$ 是指标 $p > 0$ 的线性 Fredholm 算子, $\dim \operatorname{coker} L = 1$, N 是从 X 到 Y 的紧非线性映射, 满足整体的 Lipschitz 条件(其 Lipschitz 常数充分小)以及渐近条件

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(tu)}{t} = n(u).$$

如果用 P_0 记 Y 到 $\operatorname{coker} L$ 上的投影, 且对一切范数为 1 的 $x_0 \in \operatorname{Ker} L$, $P_0 n \cdot (x_0) \neq 0$, 那么, 只要把 $g \in O_2$ 解释为方程 $Lu + Nu = g$ 有重解 (在现在的情形是一个 p 维紧子流形), 就有类似于(5.1.14c)的结果成立.

C Leray-Schauder 度进一步的性质和应用

(1) 设 D 是 Banach 空间 X 的有界区域, f 和 g 记恒等算子的紧扰动. 那么, 对 fg 的 Leray-Schauder 度, 有下面的分解定理成立:

$$d(fg, p, D) = \sum_i d(f, p, \Delta_i) d(g, \delta_i, \Delta_i),$$

其中 $b_i \in \Delta_i$ 任意，Δ_i 记 $X - g(\partial D)$ 的有界分支。

作为这个结果的应用，可以建立 Jordon 分离定理的如下推广.

(2) 设 D 和 D' 是 Banach 空间 X 中的有界开集，在 $\bar{D}$ 和 $\bar{D}'$ 间有同胚映射（恒等映射的一个紧扰动），那么 $X - D$ 和 $X - D'$ 的分支的个数相同.

D 拟线性椭圆型偏微分方程 Dirichlet 问题的进一步结果

设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中有界区域，边界 $\partial\Omega$ 光滑，考虑如下拟线性椭圆型边值问题的可解性

(i) $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, u, \nabla u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, \nabla u)$,

(ii) $u|_{\partial\Omega} = 0$.

这里 f 是给定的连续函数. 我们要找一个光滑函数 u，u 在 Ω 上满足(i)，还满足边界条件(ii). 给出(i)和(ii)的几何问题的例子有：求一个非参数极小曲面，或更一般地，求具指定平均曲率的曲面.

由 Leray-Schauder 度以及比较精细的先验估计，可以得出问题 (i)—(ii)的存在定理. 当用于方程

$$\{(1 + |\nabla u|^2)I - \nabla u \nabla u\} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = nk(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}$$

时，这个方程确定光滑有界区域 Ω 上的具常平均曲率 k 的超曲面，我们有如下的结果:

定理 确定 Ω 中具常平均曲率超曲面的 Dirichlet 问题对于任意 C^2 边界条件有解的必要充分条件是：对边界上的每一点，带边曲面的平均曲率 H 满足不等式 $H \geqslant [n/(n-1)]k$，而且，如果解存在则唯一.

关于这些结果的充分讨论，建议读者去读 Serrin (1969) 的文章.

E 参考文献

5.1 节：本节讨论的材料有个有趣的历史. 例如可看 Hadamard (1904) 以及复变教材中单值定理的讨论. 我们关于 (5.1.1) 的讨论属于 Plastock (1974)，也建议看 Browder (1954) 和 John (1968) 的文章. 满足诸如(5.1.6)的条件的算子称作强单调算子，关于它的理论是无数近代文章和专著的课题，建议读者去读 Brezis (1968)，Lions (1969) 和 Browder (1976). 在 Banach 和 Mazur 的文章中(1934)，读者可以找到结果(5.1.4). 我们关

于 5.1B 一节的讨论基于 Berger 和 Podolak 的文章（1976, 1975）. 带限制条件（5.1.13′）的非线性 Dirichlet 问题（5.1.13），最初由 Ambrosetti 和 Prodi（1972）加以研究.

5.2 节：本节的讨论基于 Lions（1969）和 Pohozaev（1967）的工作. 在 Browder（1968）以及 Rabinowitz（1973）中对非线性特征值问题的 Rayleigh-Ritz 逼近作了很好的讨论. 关于 Navier-Stokes 方程的稳态解的结果（5.2.29）是根据 Fujita 的工作（1961），而他又基于 Hopf（1951）和 Leray（1933）的文章.

5.3 节：分析中非线性问题的同伦论证开始于 Schauder. 我们关于本质和非本质映射的讨论遵循 Granas（1961）. 在 Leray 和 Schauder 的文章（1934）中，把 Brouwer 度推广到恒等算子的紧扰动，在这篇文章中还可找到对非线性椭圆型方程 Dirichlet 问题可解性的应用. 在很多书中都有对 Leray-Schauder 度的精彩处理及其应用，其中包括 Krasnoselski（1964），Cronin（1964），Schwartz（1969），Nirenberg（1974）以及 Bers（1957）. 这里提到的还仅仅是一部分. 在 Svarc（1964）和 Geba（1964）的文章中，可以找到同伦论对正指标线性 Fredholm 算子的紧扰动的应用. 这个理论对椭圆型边值问题的应用首先由 Nirenberg（1972）给出，也可看 Berger 和 Podolak（1977），在那里给出了结果（5.3.22）. 我们关于零指标正常 Fredholm 算子的广义度的介绍取自 Elworthy 和 Tromba（1970）. 至于较高指标的算子的类似结果可在 Smale（1965）中找到，也可参看 Palais（1967）.

5.4 节：在 Plastock（1974）中可找到结果（5.4.1），而结果（5.4.5）属于 Krasnoselski（1964）. 区域不变性定理最早由 Schauder 获得，这里给出的证明取自 Granas（1961）. 在 Rothe（1953）中可以找到 Rothe 定理（5.4.12）. 而（5.4.24）可在 Cronin（1973）中找到. （5.4.28）最初是由 Rabinowitz（1973）证明的，这里给出的证明属于 Ize（1975）. （5.4.29）可在 Berger 和 Podolak（1975）中查到，它的推广（5.4.32）则可见 Berger 和 Podolak（1977）. 5.4F 中讨论的锥保持映射基于 Krasnoselski 的论证（1964），它已成为当代大量研究的课题，可看 Amann 对现代工作的评述（1976）.

5.5 节：如书中所述，拟线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题是 Hilbert 在他的演讲（1900）中提出的问题之一. 在 Serrin 的文章（1969），以及 Ladyhenzskaya 和 Uralsteva（1968）写的书中可以找到关于这个问题的非常好的现代评介，其中有很多新的结果. 半线性椭圆型边值问题的正解已经吸引了那样多的现代研究，它们比（5.5.6）要前进了很多. 如想对这个问题有一全面的了

解，可看 Amann (1976) 以及 Krasnoselski (1964). 在 Levi-Civita (1925) 中可找到他们关于周期水波的早期工作。 Wehausen (1968) 是从物理学观点所作的很好的总结. Krasovskii 的文章(1961)包含了结果(5.5.12). 关于 Hamilton 系统周期解的连续性问题可以追溯到 Poincaré。 这方面有趣的实验结果是由 Stromgren 和他的同事得到的，可看 Stromgren (1932)。 可在 Krasnoselski (1964) 中找到(5.5.24). 结果(5.5.30)属于 Landesmann 和 Lazar(1970) 以及 Williams (1972)，这里给出的证明属于 Podolak (1974).

第六章　梯度映射的临界点理论

这一章讨论与梯度映射有关的算子方程的某些基本性质。因为梯度映射 $F'(x)$ 的零点正好是实值泛函 F 的临界点，我们将着重讨论 F' 的那些性质，这些性质可以借助于 F 的图象的几何学来讨论。对于属于变分学范围的许多古典问题来说，所得到的一般结果有着基本的重要性。和第一章一样，还通过解一系列微分几何和数学物理中的问题来说明这些结果的应用。

梯度映射的特殊性质以及与之有关的临界点理论导致对第五章中所述一般问题的深刻理解。我们将看到，这些相同的问题怎样可用变分法进行研究。与第五章一般的技巧所能得到的结果相比较，这里的方法一般提供了更多的信息。

首先，我们研究那些是泛函 F 在线性空间 X 上的绝对极小点的临界点。然后转向等周问题，即 F 在 X 的弯曲子空间上的绝对极小。当把 F 看作 X 上的泛函时，可把等周问题看作是研究 X 上泛函 F 的鞍点的简单分析方法。最后讨论一个关于鞍点的更深刻的内容，即鞍点的分类以及它和 F 的图象的拓扑不变量之间的关系。这些拓扑不变量不为零保证了各种类型的临界点的存在性。在每个情形，我们都把所得结果用于讨论几何和物理中的有关问题。

6.1　极小化问题

科学上一个基本的且富有启发性的原则可以归纳为："很多现象可以理解为一个能量泛函 $\varphi(u)$ 在某个适当的对象类 C 上的极小化"。在第一章，我们从这个角度讨论了测地线和极小曲面。对数学物理中的问题来说，周期的跃迁、弹性不稳定性、光的衍射等等都属于这种现象，都可以从这个观点来研究它们。事实上，根

据变分原则，现象的这个特征是从古典物理进展到现代物理的奠基石。

于是，对定义在 Banach 空间 X 的开集 U 上的实值 C^1 泛函 $\varphi(u)$，在数学上，很自然要研究它的一类简单的，但是重要的临界点，这就是相对极小点，亦即点 $u_0\in U$，对于 u_0 附近的一切 u，都有 $\varphi(u)\geqslant\varphi(u_0)$.

除了上面富有启发性的原则外，这类点的重要性还在于如下的事实：这样的点不仅是梯度算子方程 $\varphi'(u)=0$ 的解，而且具有值得注意的稳定性. 粗糙地说，这些稳定性分为两类：第一类断定，在 u_0 有相对极小的泛函 $\varphi(u)$ 的光滑扰动也应在附近有相对极小；第二类断定，从 $\varphi(u)$ 的严格相对极小点 u_0 附近开始的摆动总停留在 u_0 附近. 我们指出，无论对于相对极小的实际计算或者对它们的实际意义的解释来说，这样的稳定性都是关键的. 在这节和下一节，我们研究泛函的极小，并把所得的结果用于有一般意义的具体问题.

6.1A 达到下确界

在一个有穷维 Banach 空间 X 中，定义在有界闭集 M 上的任一连续泛函都达到它的极值. 众所周知，对于无穷维空间来说，这个性质不一定成立[1]，因为这时的有界闭集不一定紧. 于是，在一个无穷维的 Hilbert 空间 H 中，一个没有点谱的有界自共轭线性算子 L 具有这样的性质：在单位球面 $\partial\Sigma=\{u\,|\,\|u\|=1\}$ 上达不到 $\alpha=\inf\limits_{\Sigma}(Lu,u)$. 事实上，如果在 $\partial\Sigma$ 上达到 α，α 将是 L 的特征值，因而是 L 的点谱.

自从 Weierstrass 第一个举出了达不到下确界的泛函的例子之后，人们一直研究这样一个问题：对 Banach 空间 X 的闭子集 M 和泛函 $\varphi(u)$ 加些什么限制条件就可以保证达到下确界？基本限制条件主要围绕集合 $M^\alpha=\{u\,|\,u\in M,\varphi(u)\leqslant\alpha\}$ 各种紧的概

1) 历史上，对于位势理论 Riemann 方法的合理性来说，这点是非常关键的.

念以及 φ 的各种下半连续性。在第一章讨论极小曲面时已经引进了下半连续性的概念，它是 Lebesgue 积分中(参看 Fatou 引理)熟知的性质。泛函 $\varphi(u)$ 的下半弱连续理解为：每当 u_n 在 X 中弱收敛于 u，就有 $\varphi(u) \leqslant \underline{\lim}\,\varphi(u_n)$。于是根据 (1.3.11)，Banach 空间 X 的范数在 X 上下半弱连续。

这方面的一个简单结果是

(6.1.1) **定理** 设 X 是自反 Banach 空间，M 是 X 中(序列)弱闭非空子集，$\varphi(u)$ 是定义在 M 上的有界泛函。如果 $\varphi(u)$ 在 M 上强制(意指：当 $u \in M$，$\|u\| \to \infty$ 时就有 $\varphi(u) \to \infty$)，还设 $\varphi(u)$ 在 M 上下半弱连续，那么 $c = \inf\limits_M \varphi(u)$ 是有限数，且在某点 $u_0 \in M$ 达到。特别，如果 $M = X$ 且 $\varphi(u)$ 属于 C^1 类，那么 $\varphi'(u_0) = 0$，从而 $c = \varphi(u_0)$ 是 $\varphi(u)$ 的临界值，$\varphi^{-1}(c)$ 中任一元素是 $\varphi(u)$ 的一个临界点。

证明：根据 φ 在 M 上的强制性，对任何有限数 α，集 $M^\alpha = \{u \mid u \in M, \varphi(u) \leqslant \alpha\}$ 有界。因为泛函 $\varphi(u)$ 本身有界，于是 $c = \inf\limits_M \varphi(u)$ 有下界大于 $-\infty$。此外，任何极小序列 $\{u_n\} \subset M^{\alpha+1}$ 有界，于是有弱收敛子序列(仍记为 $\{u_n\}$)，其弱极限记为 $\bar{u}$。因为从 $\varphi(u)$ 的下半弱连续性推出

$$\varphi(\bar{u}) \leqslant \lim \varphi(u_n) = c = \inf_M \varphi(u),$$

由此可得 $c = \varphi(\bar{u})$。因为 M 弱闭，所以 $\bar{u} \in M$。故 $\bar{u} = u_0$ 是所希望的极小点。如果 $M = X$ 且 $\varphi(u)$ 属于 C^1 类，那么对任何点 $u \in \varphi^{-1}(c)$，$\varphi(u + th) \geqslant \varphi(u)$，于是对任何 $t \in \mathbf{R}^1$ 和 $h \in X$，

$$(6.1.2) \qquad (d/dt)\varphi(u + th)\Big|_{t=0} = (\varphi'(u), h) = 0,$$

所以 $\varphi'(u) = 0$。

为能应用这个结果，关键在于导出保证泛函 $\varphi(u)$ (i) 下半弱连续，(ii) 强制的判别法。下面两个引理提供了漂亮的一般判别法，今后很有用。

(6.1.3) **下半弱连续的判别法** 设 $\mathscr{S}(u)$ 是自反 Banach 空间 X 上的可微泛函，如果可以表作 $\mathscr{S}(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u)$，其中 $\varphi_1(u)$ 凸，

$\varphi_2(u)$ 弱连续，那么 $\mathscr{S}(u)$ 下半弱连续。更一般地，如果 $\varphi(u) = \varphi(u,u)$，其中 $\varphi(x,y)$ 是定义在 $X\times X$ 上的泛函，对于固定的 y，$\varphi(x,y)$ 对 x 凸，对 y 弱连续，且这弱连续对 X 中有界集一致，那么 $\varphi(u)$ 下半弱连续。

证明：首先验证凸泛函 $\mathscr{S}(x)$ 的下半弱连续性。根据(2.1.11.)，如果在 X 中 x_n 弱收敛到 x，那么

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(x_n)-\mathscr{S}(x) &= \int_0^1 (x_n - x, \mathscr{S}'(x_n(s)))ds \\ &= \int_0^1 (x_n - x, \mathscr{S}'(x))dx + \int_0^1 (x_n - x, \mathscr{S}'(x_n(s)) \\ &\quad - \mathscr{S}'(x))ds,\end{aligned}$$

其中 $x_n(s) = sx_n + (1-s)x$。由 $\mathscr{S}$ 的凸性，右端后面一个积分非负(因为被积函数本身非负)。另一方面，因为在 X 中 x_n 弱收敛到 x，第一项趋于零，于是 $\underline{\lim}[\mathscr{S}(x_n) - \mathscr{S}(x)] \geqslant 0$。

其次假定 $\varphi(x)$ 满足定理中提到的更一般的性质。那么，如果在 X 中 x_n 弱收敛到 x，改写

(6.1.4) $\quad \varphi(x_n,x_n) = \varphi(x_n, x) + (\varphi(x_n, x_n) - \varphi(x_n, x))$，

我们得到 $\varphi(\cdot,x) = \mathscr{S}(\cdot)$ 凸，下半弱连续。于是当 $n\to\infty$ 时，$\varphi(x, x) \leqslant \underline{\lim}\,\varphi(x_n, x)$。进一步，因为 x_n 弱收敛到 x，$\{\|x_n\|\}$ 一致有界。由假设条件，$|\varphi(x_n, x_n) - \varphi(x_n, x)| \to 0$ 一致成立，因而

$$\varphi(x) = \varphi(x,x) \leqslant \underline{\lim}\,\varphi(x_n,x_n) = \underline{\lim}\,\varphi(x_n).$$

结果得证。

(6.1.5) **强制性判别法** 设 $\varphi(u)$ 是定义在自反 Banach 空间 X 上的 C^1 泛函，满足下二条件之一[*)]：

(i) $(\varphi'(u), u) \geqslant g(\|u\|)$ 对某个连续函数 $g(r)$ 成立，$g(r)$ 满足 $\int_0^\infty g(r)/r\,dr = \infty$；

(ii) $\varphi'(u) = Lu + R'(u)$ 是半线性算子，使得 $m = \inf\limits_{\|u\|_X=1}(Lu,$

[*)] (i) 中 X 不需自反，(ii) 中 X 必须是 Hilbert 空间——译者注.

$u)\in\sigma_e(L)$*)，且当 $\|u\|_X$ 充分大时，

$$R(u)+\frac{m}{2}\|u\|_X^2\geqslant\eta(\|u\|_{\tilde{X}}),$$

其中 X 连续嵌入到 Banach 空间 $\tilde{X}$，$\eta(r)$ 是一个连续泛函，当 $r\to\infty$ 时 $\eta(r)\to\infty$. 那么 $\varphi(u)$ 在 X 上强制.

证明：(i) 我们证明，当 $\|u\|\to\infty$ 时 $\lim\varphi(u)=\infty$. 对 X 中范数为 1 的任何 w 和 $s\geqslant 0$,

$$\varphi(sw)-\varphi(0)=\int_0^s(w,\varphi'(tw))dt=\int_0^s(tw,\varphi'(tw))\frac{dt}{t}.$$

根据定理条件，有正数 $R>0$（R 与 w 无关），使

$$\varphi(sw)\geqslant\varphi(0)+\varphi(Rw)+\int_R^s\frac{g(t)}{t}dt.$$

随着 $\|u\|\to\infty$，$\varliminf\varphi(u)\geqslant\int_R^\infty\frac{g(t)}{t}dt+$ 常数，从而 $\varphi(u)$ 强制.

(ii) 设 N 是 $L-mI$ 的有限维零化子空间，$\{u_k\}$ 是使 $\|u_k\|_X\to\infty$ 的序列，我们有 $u_k=u_k'+u_k''$，其中 $u_k'\perp N$，$u_k''\in N$. 因为 $m\in\sigma_e(L)$，有绝对常数 $c_0>0$，使

$$\varphi(u_k)=\frac{1}{2}(Lu_k,u_k)+R(u_k)>c_0\|u_k'\|_X^2+\eta(\|u\|_{\tilde{X}}).$$

于是，如果 $\|u_k'\|_X\to\infty$，我们有 $\varphi(u_k)\to\infty$. 否则应有 $\|u_k'\|_X\leqslant C$（某个正常数）和 $\|u_k''\|_X\to\infty$. 因为 $\dim(L-mI)<\infty$，并且定义在有限维 Banach 空间上的一切范数等价，所以 $\|u_k'\|_{\tilde{X}}\leqslant C'$（某个正常数），$\|u_k''\|_{\tilde{X}}\to\infty$，由此得出 $\|u_k\|_{\tilde{X}}\to\infty$，因而又有 $\varphi(u_k)\to\infty$.

(6.1.6) **例**

(i) 如果 $\varphi'(u)=Lu+\mathfrak{N}'(u)$ 是半线性算子，L 的本质谱 $\sigma_e(L)$ 非负，那么 $\varphi(u)$ 在 X 下半弱连续. 事实上，这时

---

*) L 应为自共轭算子——译者注.

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)+\mathfrak{N}(u).$$

由 L 的本质谱非负，$L=L_1+L_2$，$L_1\geqslant 0$，L_2 紧。于是 $\varphi(u)$ 可以写成凸泛函 $\frac{1}{2}(L_1u,u)$ 和泛函 $\varphi_2(u)=\frac{1}{2}(L_2u,u)+\mathfrak{N}(u)$ 之和，显然 $\varphi_2(u)$ 弱连续，于是可用(6.1.3)。

(ii) 设 $\{g_{ij}(x)\,|\,i,j=1,2,\cdots,N\}$ 是光滑函数，在函数空间 $W_N=\mathring{W}_{1,2}[[a,b],\mathbf{R}^N]$ 上考虑泛函

$$\varphi(x)=\sum_{i,j=1}^{N}\int_a^b g_{ij}(x)\dot{x}_i\dot{x}_j,$$

其中 $\sum\limits_{i,j=1}^{N}g_{ij}(\eta)\xi_i\xi_j$ 是 ξ 的正定二次型 ($\eta\in\mathbf{R}^N$ 固定)。为用(6.1.3)，令

$$\varphi(x,y)=\sum_{i,j=1}^{N}\int_a^b g_{ij}(y)\dot{x}_i\dot{x}_j,$$

对固定的 y，$\varphi(x,y)$ 定义在 W_N 上，对 x 凸。另一方面，如果在 W 中 $y_n\to y$ 弱收敛，那么在 $[a,b]$ 上，$g_{ij}(y_n)$ 一致收敛到 $g_{ij}(y)$。于是有绝对常数 $K>0$，使

$$\begin{aligned}&|\varphi(x,y_n)-\varphi(x,y)|\\&=\left|\sum_{i,j}\int_a^b\{g_{ij}(y_n)-g_{ij}(y)\}\dot{x}_i\dot{x}_j\right|\\&\leqslant K\sup_{i,j}\sup_{[a,b]}|g_{ij}(y_n)-g_{ij}(y)|\,\|x\|_W^2\to 0,\end{aligned}$$

其中的收敛在 W_N 中的有界集上一致。

设 $\varphi(u)$ 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 C^1 泛函，有另一个有用的判别法可判断它是否达到下确界。这个判别法不要求半连续，但要求 $\varphi(u)$ 满足下面的"紧性条件"。

条件(C)：如果序列 $\{x_n\}\subset X$ 使 $\varphi(x_n)$ 一致有界，$\varphi'(x_n)\to 0$，那么 x_n 有收敛的子序列。

事实上，下面的结果成立：

(6.1.1′) 定理 设 $\varphi(x)$ 是定义在 Hilbert 空间 X 上的 C^1 泛函，

$\varphi'(x)$ 满足一致 Lipschitz 条件[*)],并且 $\varphi(x)$ 有下界。那么,如果 $\varphi(x)$ 满足条件 (C),则在某点 $\bar{x}$ 达到 $\inf\limits_{X}\varphi(x)$,且 $\varphi'(\bar{x})=0$.

证明: 假定达不到极值 $c=\inf\limits_{X}\varphi(x)$,于是 c 不是 $\varphi(x)$ 的临界值。那么从条件 (C) 推出,对某个 $\varepsilon>0$, $I^{c+\varepsilon}=\{x|\varphi(x)\leqslant c+\varepsilon\}$ 也不包含临界点(否则将有收敛的临界点列 $\{x_n\}$ 使 $\varphi(x_n)$ 趋于 c,由条件 (C) 推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\bar{x}$ 是个临界点, $\varphi(\bar{x})=c$)。现在把 3.2 节中的最速下降法用于这种情形。考虑初值问题

$$\frac{dx}{dt}=-\varphi'(x),\quad x(0)=x_0,$$

其中 x_0 是 $I^{c+\varepsilon}$ 中的任一点。根据前面的结果,只要 $x(t)$ 一致有界,对于所有的 t,这个初值问题有解 $x(t)$。此外,沿着 $x(t)$,

$$(*)\qquad \frac{d}{dt}\varphi(x(t))=-\|\varphi'(x(t))\|^2;$$

于是,因为 $\varphi(x(t))$ 有下界,当 $t\to\infty$ 时, $\varliminf\limits_{t\to\infty}\|\varphi'(x(t))\|=0$。其次,由 $\varphi(x)$ 满足条件 (C),断定对某序列 $t_n\to\infty$,因为 $\varphi(x(t_n))$ 一致有界,所以 $x(t_n)$ 有收敛子序列 $x(t_{n_j})$,其极限记为 $\bar{x}$。由 $\varphi'(x)$ 的连续性, $\varphi'(\bar{x})=0$. 于是 $\bar{x}$ 是 $\varphi(x)$ 的临界点,由 $(*)$, $\bar{x}\in I^{c+\varepsilon}$,这就是所要的矛盾.

6.1B 一个例子

定理 (6.1.1) 的一个简单 (但并非平凡的) 例子是: 考虑非自治 Hamilton 方程

$$(6.1.7)\qquad \ddot{x}=\nabla U(x,t)$$

的 T 周期解,其中 $x(t)$ 是一个 N 维向量函数, $U(x,t)$ 是 x, t 的 C^1 实值函数. 假定 $U(x,t)$ 对 t 是 T 周期的,求 (6.1.7) 的 T 周期解。我们可以证明

[*)] 当 $\varphi'(x)$ 满足局部 Lipschitz 条件时本定理仍成立——译者注.

(6.1.8) 定理 如果T周期函数$U(x,t)$强制，当$|x|\to\infty$时，对t一致地有$U(x,t)\to\infty$，那么(6.1.7)有T周期解，它是泛函

$$\varphi(x)=\int_0^T\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2+U(x,t)\right)dt \tag{6.1.9}$$

在所有的T周期C^1类N维向量函数$x(t)$上的极小值点。

证明： 用W_N记所有绝对连续，且使$\dot{x}(t)\in L_2[0,T]$的T周期向量函数$x(t)$的空间。那么$W_N\subset W_{1,2}([0,T],\mathbb{R}^N)$是 Hilbert 空间，其内积为

$$(x,y)_{W_N}=\int_0^T\{x(t)y(t)+\dot{x}(t)\dot{y}(t)\}dt. \tag{6.1.10}$$

下面证明，在某个$\bar{x}(t)\in W_N$达到

$$\inf_{W_N}\varphi(x)=\inf_{W_N}\int_0^T\{\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)+U(x,t)\}dt. \tag{6.1.11}$$

那么由 1.5 节中提到的结果，$\bar{x}(t)$是C^2类函数，从而$\bar{x}(t)$是(6.1.7)的所希望的T周期解。为验证$\inf\limits_{W_N}\varphi(x)$是有限数，且在$\bar{x}(t)$达到，我们用定理(6.1.1)并验证$\varphi(x)$的下半弱连续性和强制性。首先注意到，如果$x_n$在$W_N$中弱收敛到$x$，根据 Sobolev 嵌入定理，$x_n$在$[0,T]$上一致收敛到$x$。于是$\varphi(x)$是凸二次泛函$\int_0^T\dot{x}^2(t)dt$与弱连续泛函$\int_0^T U(x,t)dt$之和。由(6.1.3)，$\varphi(x)$下半弱连续。为证$\varphi(x)$强制，令

$$(Lx,x)=\int_0^T\dot{x}^2dt \text{ 和} \tag{6.1.12}$$

$$R(x)=\int_0^T U(x,t)dt.$$

显然这样定义的算子L是自共轭 Fredholm 算子，$m=\inf\limits_{\|x\|=1}(Lx,x)=0$。而且 $\operatorname{Ker}L$ 由常N向量$\{c\}$组成。所以W_N中的元素$x(t)$可以唯一表成$x(t)=y(t)+c$，其中$y(t)$在$[0,T]$上的平均值为 0。现在有

$$\|y(t)\|_{W_N}\leqslant K\|\dot{y}(t)\|_{L_2[0,T]}，\text{对某个 } K>0. \tag{6.1.13}$$

因为当$|x|\to\infty$时$U(x,t)$一致趋于无穷，所以$U(x,t)$在$[0,T]$上有一致的下界(譬如说$-K_0$)。于是

$$\varphi(x(t))=\varphi(c+y(t))\geqslant\frac{1}{2}\|\dot{y}\|^2_{L_2}-K_0T\geqslant K_1\|y\|^2_{W_N}-K_0T, \tag{6.1.14}$$

其中 $K_1 = \frac{1}{2K^2}$. 故当 $\|y(t)\|_{W_N} \to \infty$ 时, $\varphi(x(t)) \to \infty$. 因而, 只需考虑那种可能性,即当常数列 $|c_n| \to \infty$ 时,序列 $x_n(t) = y_n(t) + c_n$ 使 $\{\|y_n\|_{W_N}\}$ 一致有界. 为此令

(6.1.15) $\quad \Omega_n = \{t | t \in [0,T],\ |y_n(t)| > \frac{1}{2}|c_n|\}$,

那么 $\int_{\Omega_n} \frac{1}{4} c_n^2 \leqslant \|y_n(t)\|_{L_2} \leqslant C_0$ (某个常数), 使得 $\mu(\Omega_n) \leqslant 4C_0/c_n^2$. Ω_n 的余集 Ω_n' 的测度 $\mu(\Omega_n') \geqslant T - 4C_0/c_n^2$. 令 n 足够大,使 $\mu(\Omega_n') > T/2$. 那么在 Ω_n 上,

$$|x_n| = |y_n + c_n| \geqslant |c_n| - |y_n| \geqslant |c_n|/2.$$

根据假设条件, 存在函数 $\eta(r)$, 使得当 $r \to \infty$ 时有 $\eta(r) \to \infty$, $U(x,t) \geqslant \eta(\|x\|)$, 以及

(6.1.16) $$R(x_n) = \int_0^T U(y_n(t) + c_n, t)dt = \int_{\Omega_r} + \int_{\Omega_n'} \geqslant -TK_0 + \eta\left(\frac{|c_n|}{2}\right)\frac{T}{2}.$$

于是当 $c_n \to \infty$ 时, $R(x_n) \to \infty$. 我们断定 $\varphi(x)$ 在 W_N 上强制, 从而定理得证.

6.1C 和拟线性椭圆型方程有关的极小化问题

在一些具体的变分问题中,有一些涉及到单重积分,另一些则和多重积分有关. 已知在这二者之间有着重大的差别. 但是前一节的一般考虑没有区分这个差别. 事实上, 对于一大类"正则"的形若 $\varphi(u) = \int_a^b F(x,u,u_x)dx$ 的变分问题 ($u(x)$ 是 x 的 N 向量函数),在小范围内, 可以同时建立 $\varphi(u)$ 的任何临界点 $\tilde{u}(x)$ 的存在性和极小性. 于是寻求 $\varphi(u)$ 在大范围内的临界点问题可以分解成局部问题的连接. 对于涉及多重积分的变分问题则不能这样作. 例如曲线的长度可以用折线逼近来定义. 但是在 1.1 节中已讲过,曲面的面积就不能用类似的简单东西来逼近.

而且,相对地说,与单重积分有关的泛函的绝对极小的正则性

较容易建立，而迄今为止，多重积分的极小的类似正则性质却只是部分得到证明。

然而，和拟线性椭圆型算子有关的泛函的临界点却具有某种有趣的"局部"极小性质。事实上，设Ω是有界区域，$\tilde{u}(x)$是

(6.1.17) $$\varphi(u)=\int_{\Omega}F(x,D^{\alpha}u,D^{\beta}u)dx$$

的一个光滑临界点，其中$|\alpha|\leqslant m-1$，$|\beta|=m$，$u(x)$是$C^m(\Omega)$中的函数，它们以及它们的小于$m-1$的导数在$\partial\Omega$上都为零。函数$F(x,y,z)$属于C^2类，对于固定的x,y，F对z严格凸（于是与φ相应的 Euler-Lagrange 方程是椭圆型的）。那么$\tilde{u}$有如下的极小性质：

(6.1.18) 设$\eta(x)\not\equiv 0$是C^{∞}函数，对某点$x_0\in\Omega$，$\eta(x)$在x_0的充分小邻域Ω_{x_0}之外为零，那么$\varphi(\tilde{u}+\eta)>\varphi(\tilde{u})$，从而$\tilde{u}$不可能是相对极大。

证明： 因为$\varphi'(\tilde{u})=0$，Taylor 定理指出，对某个$t\in[0,1)$有

(6.1.19) $$\varphi(\tilde{u}+\eta)=\varphi(\tilde{u})+\frac{1}{2}(\varphi''(\tilde{u}+t\eta)\eta,\eta),$$

其中$(\varphi''(v)\eta,\eta)=\sum_{|\alpha'|,|\beta'|\leqslant m}\int_{\Omega}F_{X'_{\alpha'}X'_{\beta'}}(x,D^{\alpha}v,D^{\beta}v)D^{\alpha'}\eta D^{\beta'}\eta$，我们证明 (6.1.19) 中的第二项严格正，从而证得$\varphi(\tilde{u}+\eta)>\varphi(\tilde{u})$。为此注意到，对$|\alpha|<m$，$\|\eta\|_{\alpha,2}\leqslant\varepsilon(\Omega_{x_0})\|\eta\|_{m,2}$，其中$\varepsilon(\Omega_{x_0})$随$\mu(\Omega_{x_0})\to 0$而趋于零。由简单的计算可知，对于充分小的$\mu(\Omega_{x_0})$，有与$\mu$无关的常数$c_1,c_2>0$，使

$$\begin{aligned}(\varphi''(\tilde{u}+t\eta)\eta,\eta)&\geqslant c_1\|\eta\|^2_{m,2}-c_2\|\eta\|^2_{m-1,2}\\&\geqslant(c_1-c_2\varepsilon(\Omega_{x_0}))\|\eta\|^2_{m,2}>0.\end{aligned}$$

其次考虑这样的问题，找一个定义在有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^N$上的函数$u$，$u$达到泛函$\varphi(u)=\int_{\Omega}F(x,D^{\alpha}u,D^{m}u)dx$的下确界（其中$|\alpha|<m$），且在$\Omega$的边界$\partial\Omega$（$\partial\Omega$光滑）上满足 Dirichlet 边界

条件 $D^\alpha u|_{\partial\Omega} = f_\alpha(x)$ (对 $|\alpha| \leqslant m-1$). 这方面的一个已知结果是

(6.1.20) **定理** 设在 $W_{m,p}(\Omega)$ 中存在函数 $f(x)$, 使得 $D^\alpha f$ 在 $\partial\Omega$ 上的迹和 f_α 重合, $|\alpha| \leqslant m-1$, 进一步还假定函数 $F(x,y,z)$ 和它的偏导数 $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$ 连续, F 满足下面两个条件:

(6.1.21a) $F(x,y,z) \geqslant c_0|z|^p - c_1$, 其中 c_0, c_1 是大于零的常数;

(6.1.21b) 对于固定的 x, y, $F(x,y,z)$ 是 z 的凸函数.

那么 $\varphi(u)$ 在 $\mathfrak{C} = \{u|u\in W_{m,p}(\Omega),\ D^\alpha u|_{\partial\Omega} = f_\alpha, |\alpha| \leqslant m-1\}$ 上的下确界 $\inf\varphi(u)$ 是有限数, 且由某个函数 $\tilde{u}(x) \in \mathfrak{C}$ 达到.

证明: 首先注意到, 根据条件 $f(x)\in\mathfrak{C}$, 所以 $\mathfrak{C}$ 非空. 其次, 由于 $\varphi(u)$ 和 $\varphi(u)+c$ (c 是任一常数)有相同的临界点, 我们可以假定 (6.1.21a) 对 $c_1 = 0$ 成立. 从条件 (6.1.21a) 还推出 $\varphi(u)$ 在 $\mathfrak{C}$ 上强制. 这是因为 $\varphi(u) \geqslant c_0\int_\Omega |D^m u|^p$, 同时由 Sobolev 嵌入定理, 存在与 u 无关的正常数 c_α, $|\alpha| \leqslant m-1$, 使得

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u\|_{L_p} &\leqslant \|D^\alpha(u-f)\|_{L_p} + \|D^\alpha f\|_{L_p}\\ &\leqslant c_\alpha\|D^m(u-f)\|_{L_p} + \|D^\alpha f\|_{L_p}\\ &\leqslant c_\alpha\|D^m u\|_{L_p} + \text{常数}.\end{aligned}$$

因而当 $\|u\|_{m,p} = \left\{\sum_{|\beta|\leqslant m}\|D^\beta u\|_{L_p}^p\right\}^{1/p} \to \infty$ 时, $\varphi(u)\to\infty$. 此外 $\varphi(u)$ 有下界. 于是一旦我们由 (6.1.21b) 证明, 对 $W_{m,p}(\Omega)$ 中的弱收敛 $\varphi(u)$ 下半连续, 马上就可用 (6.1.1) 得到证明. 设 u_n 在 $W_{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛到 u, $u_n\in\mathfrak{C}$, 那么 $u\in\mathfrak{C}$, 而且对 $|\alpha| < m$, 在 $L_p(\Omega)$ 中 $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ 强收敛. 故 $\{u_n\}$ 有弱收敛子序列 (仍记为 $\{u_n\}$) 在 Ω 中几乎处处收敛到 u. 根据 Egorov 定理, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在集合 $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$, 使得对 $|\alpha| \leqslant m-1$, 在 Ω_ε 上一致地有 $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$, 同时 $\mu(\Omega_\varepsilon) \geqslant \mu(\Omega) - \varepsilon$. 令

$$\Omega_{\varepsilon,N} = \left\{x|x\in\Omega_\varepsilon,\ \sum_{|\alpha|\leqslant m}|D^\alpha u| \leqslant N\right\}.$$

因为 $u\in W_{m,p}(\Omega)$, 当 $\varepsilon\to 0$ 和 $N\to\infty$ 时, $\mu(\Omega - \Omega_{\varepsilon,N}) \to 0$. 有

了这些准备，我们现在用凸性条件 (6.1.21b) 证明所希望的下半连续性. 定义

$$\varphi_{\varepsilon,N}(u, v) = \int_{\Omega_{\varepsilon,N}} F(x, D^\alpha u, D^m v)dx$$

和 $$\varphi_{\varepsilon,N}(u) = \varphi_{\varepsilon,N}(u, u),$$

我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{\varepsilon,N}(u_n) - \varphi_{\varepsilon,N}(u) &= \{\varphi_{\varepsilon,N}(u_n,u_n) - \varphi_{\varepsilon,N}(u_n,u)\} \\ &\quad + \{\varphi_{\varepsilon,N}(u_n,u) - \varphi_{\varepsilon,N}(u,u)\}.\end{aligned}$$

根据条件 (6.1.21b),

$$\begin{aligned}&\varphi_{\varepsilon,N}(u_n, u_n) - \varphi_{\varepsilon,N}(u_n, u) \\ &\geqslant \int_{\Omega_{\varepsilon,N}} F_z(x,D^\alpha u_n,D^m u)(D^m u_n - D^m u).\end{aligned}$$

同时在 $\Omega_{\varepsilon,N}$ 上一致地有

$$F(x, D^\alpha u_n, D^m u) \to F(x, D^\alpha u, D^m u),$$
$$F_z(x, D^\alpha u_n, D^m u) \to F_z(x, D^\alpha u, D^m u).$$

于是，因为在 $L_p(\Omega)$ 中 $D^m u_n \to D^m u$ 弱收敛，所以当 $n \to \infty$ 时，$\underline{\lim}\,\varphi_{\varepsilon,N}(u_n) \geqslant \varphi_{\varepsilon,N}(u)$. 因为 $F(x,y,z)$ 非负，$\varphi_{\varepsilon,N}(u_n) \leqslant \varphi(u_n)$; 又 ε 和 N 任意，故当 $n \to \infty$ 时 $\underline{\lim}\,\varphi(u_n) \geqslant \varphi(u)$. 于是 (6.1.20) 得证.

如已提过的，如果 m, N 同时大于 1，还没有找到一个一般性的结果，以保证在 (6.1.20) 中得到的极小值点 $\tilde{u}(x)$ 的正则性. 于是一般不能说 $\tilde{u}(x)$ 满足所得的 Euler-Lagrange 方程

$$\sum(-1)^{|\alpha|}D^\alpha F_\alpha(x, Du, \cdots, D^m u) = 0,$$
$$D^\alpha u|_{\partial\Omega} = f_\alpha, \quad |\alpha| \leqslant m-1,$$

其中 $F_\alpha = \partial F(x, X^\beta)/\partial X^\alpha$.

当 $m = 1$ 时，最近已对任意 N 成功地解决了这个问题，这是好几本书的课题(例如 Morrey (1966), Ladyhenskaya 和 Uraltseva (1968)). 对 $N = 1$，问题相当简单. 事实上此时 $\tilde{u}(x)$ 绝对连续，而且在 $W_{m,p}(a,b)$ 中 $(p > 1)$，$\tilde{u}(x)$ 还是指数为 $m - 1/p$ 的 Hölder

连续函数. 在 1.5 节已得到这个结果.

下面需要用到两个简化假设. 首先假定泛函 $\varphi(u)$ 相应的 Euler-Lagrange 方程 $\varphi'(u)=0$ 是半线性的，其次设方程 $\varphi'(u)=0$ 是二阶的. 半线性的意义是双重的:

(i) 如 1.5 节所述，任何广义解的光滑性常常可以归结到线性椭圆型方程的正则性理论;

(ii) 已有下半连续性准则 (6.1.3) 和强制性准则 (6.1.5) 以供应用. 于是，如果

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)+\mathfrak{N}(u);\quad u\in \mathring{W}_{m,2}(\Omega),$$

其中 $(Lu,u)=\int_\Omega\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}a_{\alpha,\beta}(x)D^\alpha uD^\beta u$ 是线性椭圆算子 L 相应的二次型，$\mathfrak{N}(u)=\int_\Omega F(x,u)$，$F(x,u)$ 是 C^1 非负函数，以固定的抛物线 $p(u)=c_1u^2+c_2(c_1>0)$ 作下界. 假定 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 是有界区域，系数 $a_{\alpha\beta}(x)$ 在 Ω 中光滑，把 Gårding 不等式 (1.4.22) 用于 (Lu,u)*)，把 Fatou 定理用到 $\mathfrak{N}(u)$ 就可得出 $\varphi(u)$ 在 $\mathring{W}_{m,2}(\Omega)$ 上的下半弱连续性. 为得出 $\mathfrak{N}(u)$ 下半弱连续，请注意，如果 u_n 在 $\mathring{W}_{m,2}(\Omega)$ 中弱收敛到 u，那么 u_n 在 Ω 上依测度收敛到 u，由 Fatou 定理就从 $F(x,u)$ 的非负性推出 $\varliminf_{n\to\infty}\int_\Omega F(x,u_n)\geqslant\int_\Omega F(x,u)$. $\varphi(u)$ 的强制性的证明较困难. 但是，只要 $p(u)$ 中的正常数 c_1 满足 $c_1+\frac{m}{2}>0$**)，从 (6.1.5(ii)) 也可推出强制性（此时 $X=$

---

*) 所说"把 Gårding 不等式用于 (Lu,u)"似不妥　因该不等式应用的条件是一致椭圆算子，而现在题设中 L 只是椭圆型.

　　(Lu,u) 的下半弱连续性可这样来得到:

　　记 $L=L_1+L_2$，其中 $(L_1u,u)=\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=m}\int_\Omega a_{\alpha,\beta}(x)D^\alpha uD^\beta u$，那么 (L_1u,u) 是凸的(从椭圆型得出)，故下半弱连续. 而不难证明 (L_2u,u) 是弱连续的——译者注.

**) 其中 m 是 L 的负谱中绝对值最大者——译者注.

$L_2(\Omega)$). 这里关键之点在于毋需对函数 $F(x, u)$ 的增长加以限制. 其理由是：对 $u \in \mathring{W}_{m,2}(\Omega)$, $F(x, u)$ 非负的假设已经保证了 $F(x,u)$ 可积. 以及，如果 $\varphi(u)$ 在 $W_{m,2}(\Omega)$ 上的下确界 $\inf\varphi(u)$ 是有限数(譬如说是 c)，对任何固定的 $\varepsilon > 0$, 我们只需考虑定义在集合 $\mathring{W}_{m,2}(\Omega) \cap \varphi^{-1}(c, c+\varepsilon)$ 上的 $\varphi(u)$.

二阶拟线性椭圆型方程相应的变分问题具有特别简单的性质. 这主要是由于 $W_{1,p}(\Omega)$ 中函数的特殊性质以及有那些众所周知的方法(例如极大原则)，用这些方法可得到这类方程的解的先验估计. 我们用这种简化的一个简单(但是有用)的例子来结束这一小节.

(6.1.22) 关于先验估计

设泛函 $\varphi(u) = \int_\Omega F(x, u, Du)dx$ 在 $\tilde{u}(x)$ 达到 $\mathfrak{C}$ 上的极小，其中 $\mathfrak{C}$ 是 $W_{1,p}(\Omega)$ $(p \geqslant 1)$ 中所有满足给定边界条件 $u|_{\partial\Omega} = f$ 的函数 u 的集合. 如果有 $k > 0$ 使得对所有的 $x \in \Omega$ 和 $|z| > 0$:

(i) 当 $y > k$ 时, $F(x, y, z) > F(x, k, 0)$;

(ii) 当 $y < -k$ 时, $F(x, y, z) > F(x, -k, 0)$;

(iii) 在 $\partial\Omega$ 上 $\operatorname{ess\,sup}|f| \leqslant k$;

那么在 Ω 上 $\operatorname{ess\,sup}|\tilde{u}(x)| \leqslant k$. 而且，如果

(iv) 当 $|z| \to \infty$ 时，对有界的 $|x| + |y|$, $F_z(x, y, z) = O(|z|^{p-1})$, $F_y(x,y,z) = O(|z|^p)$,

那么 $\tilde{u}$ 是相应 Euler-Lagrange 方程的广义解.

证明：首先指出，从 $W_{1,p}(\Omega)$ 的特性可推出 $\mathfrak{C}$ 上函数的截短函数仍属于 $\mathfrak{C}$. 事实上，设 $v \in \mathfrak{C}$, $\operatorname{ess\,sup}|v| > k$, 用 $\tilde{v}$ 记 v 的截短函数

$$(6.1.23) \qquad \tilde{v}(x) = \begin{cases} \inf(v, k) & \text{对 } v \geqslant 0 \\ \sup(v, -k) & \text{对 } v < 0. \end{cases}$$

那么 $\tilde{v}(x) \in W_{1,p}(\Omega)$，由 (iii), $\tilde{v}|_{\partial\Omega} = f$, 于是 $\tilde{v} \in \mathfrak{C}$.

其次，用 (i) 和 (ii) 可证明 $\varphi(\tilde{v}) < \varphi(v)$, 从而就证明了 (6.1.22) 的第一部分. 事实上，从 (i) 和 (ii) 推出

(6.1.24) $\varphi(v)-\varphi(\tilde{v})$

$$=\int_{|v|\geq k}(F(x,v,v_x)-F(x,\tilde{v},\tilde{v}_x))dx>0,$$

于是在Ω上 $\operatorname{ess\,sup}|\tilde{u}(x)|\leqslant k$.

下证第二部分．我们指出，$\tilde{u}(x)$ 也是 $\varphi(u)$ 在限制类 $\mathfrak{C}_{k+1}$ 上的极小，$\mathfrak{C}_{k+1}=\{u|u\in\mathfrak{C},\|u\|_{L^\infty}\leqslant k+1\}$．从 (iv) 推出，对任 $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$，$\varphi(\tilde{u}+t\zeta)$ 在 $\mathfrak{C}_{k+1}$ 中可微，因而

$$\frac{d}{dt}\varphi(\tilde{u}+t\zeta)|_{t=0}=0,$$

以及对所有的 $\zeta\in C_0^\infty(\Omega)$，

$$\int_\Omega\{F_z(x,\tilde{u},\tilde{u}_x)\zeta_x+F_y(x,\tilde{u},\tilde{u}_x)\zeta\}dx=0.$$

于是如所希望的，$\tilde{u}$ 是 $\varphi(u)$ 的 Euler-Lagrange 方程的广义解．

现在考虑定义在有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上的二阶半线性边值问题

(6.1.25) $Lu+f(x,u)=0,\ u|_{\partial\Omega}=g(x)$.

这里 L 是具有光滑系数的线性二阶椭圆微分算子．

只要我们可对 $|\tilde{u}(x)|$ 作出先验估计，就可以用 (6.1.22) 第二部分中所用的论证．事实上，我们证明如下的命题

(6.1.26) 无需对 $f(x,u)$ 的增长加上任何限制，只要 $g(x)$ 连续，且

$$Lu=\sum_{|\alpha|,|\beta|=1}D^\alpha\{a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u\}-cu,\ c>0.$$

同时对某个常数 $M>0$ 有

(6.1.27) $(\operatorname{sgn}y)f(x,y)<0$, 对 $|y|>M>\max_{\partial\Omega}|g(x)|$ 成立．

那么方程(6.1.25)总有解 $\tilde{u}(x)$，$\tilde{u}(x)$ 使相应的泛函 φ 达到极小．此外，在上述条件下，方程 (6.1.25) 在Ω中所有的解 $W(x)$ 满足 $\sup|W(x)|\leqslant M$.

证明：我们先用二阶椭圆型方程的极大原则证明 (6.1.26) 的第二部分．定义 $f_M(x,y)$ 为

$$(6.1.28)\quad f_M(x,y)=\begin{cases}f(x,M), & \text{对 } y>M,\\ f(x,y), & \text{对 } -M\leqslant y\leqslant M,\\ f(x,-M), & \text{对 } y<-M,\end{cases}$$

它是 Lipschitz 连续函数. 方程

(6.1.29) $Lu + f_M(x, u) = 0,\ u|_{\partial\Omega} = g$

在Ω中的任何解都与(6.1.25)的解重合. 事实上,如用 $\widetilde{W}$ 记$W(x)$在Ω中的正的极大值,并设它在某点 $x_0 \in \Omega$ 达到,那么$LW(x_0) = 0$, 于是 $f(x_0, W(x_0)) \geqslant 0$. 从而根据 L 的极大原则(参看Protter 和 Weinberger, 1967), $\widetilde{W} \leqslant M$. 另一方面,对负的极小值 $\widetilde{W}$, 由同样的论证得到 $\widetilde{W} \geqslant -M$. 于是$|W(x)| \leqslant M$, $f_M(x,W(x)) = f(x,W(x))$.

因为$f_M(x,u)$自动满足正则化 (1.5.7),(1.5.8) 所要求的增长限制条件, 与(6.1.29) 相应的极小化问题就不难解决. 把解记作$\bar{u}(x)$, 由定理的第二部分,应有$|\bar{u}(x)| \leqslant M$, 且满足(6.1.25)*),所以 $\bar{u}(x)$ 也使

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - \int_\Omega F(x, u)$$

达到极小. 其中 $F(x,u) = \int_0^u f(x, s)ds$.

(6.1.26) 的重要性在于它与非唯一性的考虑无关. 考虑定义在Ω上的如下 Dirichlet 问题,可对这点作出很好的解释.

(6.1.30) $\varepsilon^2\Delta u + u - g^2(x)u^3 = 0,\ u|_{\partial\Omega} = 0$. **)

我们曾在 4.4 节简单讨论过这个问题. 现在证明关于解$u_1(x,\varepsilon)$连续性的一个结果. 即使对于充分小的 $\varepsilon > 0$, 这个方程组都有任意多个不同的解(我们将在 6.6 节中证明).

(6.1.31) 定理 4.4 节中所述 (6.1.30) 的解 $u_1(x,\varepsilon)$ 可以被唯一延

---

*) 原文中此处还有一段话"从条件 (6.1.27) 推出,对 $F_M(x,u) = \int_0^u f_M(x, s)ds$, 故 $\int_\Omega F_M(x,u) \geqslant \int_\Omega F(x, u)$. 因为在 $W_{1,2}(\Omega)$ 中具指定边界值 $g(u)$ 的函数类上有

$$\varphi_M(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) - \int_\Omega F_M(x, u) \leqslant \varphi(u)\text{"},$$ 似有误,而删去不影响定理的证明,故移此—— 译者注.

**) 对 $g(x)$ 应有一定要求, 如在 $\bar{\Omega}$ 光滑, 严格正. 可参看 4.4 节的 (H_ε)——译者注.

拓到开区间 $(0,\lambda_1^{-\frac{1}{2}})$ 上成为 ε 的连续正函数，而且不能进一步延拓。其中 λ_1 是 Ω 上 Laplace 算子零边值条件的最小特征值。

证明： 我们首先注意到，对每个 $\varepsilon>0$，对 $K=\sup\limits_{\Omega}\sqrt{2}/|g(x)|$，方程满足(6.1.22)的条件。如果令

$$\varphi_\varepsilon(u)=\int_\Omega\left(\varepsilon^2|\nabla u|^2-u^2+\frac{1}{2}g^2u^4\right),$$

那么必在某点，譬如说，$v_1(x,\varepsilon)\in C^2(\Omega)$ 达到 $\inf\limits_{\mathring{W}^{1,2}(\Omega)}\varphi(u)$，而且 $v_1(x,\varepsilon)$ 满足(6.1.30)。进一步，对 $\varepsilon^2\geqslant 1/\lambda_1$，根据 λ_1 的变分特性，对 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 中光滑的 $u(x)\neq 0$，$\varphi_\varepsilon(u)>0$。故对

$$\varepsilon^2\geqslant\frac{1}{\lambda_1},\quad v_1(x,\varepsilon)\equiv 0.$$

另一方面，对 $\varepsilon^2<1/\lambda_1$ 有 $\varphi_\varepsilon(u_1)<0$，其中 u_1 是与 λ_1 相应的正特征函数。同时，对 $u\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 有 $|u|\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 和 $\varphi_\varepsilon(|u|)=\varphi_\varepsilon(u)$，于是可以假定对 $\varepsilon^2<1/\lambda_1$，在 Ω 中有 $v_1(x,\varepsilon)>0$。从而剩下来的只是证明 $v_1(x,\varepsilon)$ 是(6.1.30)的唯一正解和 $v_1(x,\varepsilon)$ 连续依赖于 ε。

(6.1.32)引理 对 $\varepsilon\in(0,\lambda_1^{-1/2})$，(6.1.30)的解 $u_1(x,\varepsilon)$ 是唯一正解，且连续依赖于 ε。

证明： 假定对固定的 $\varepsilon^2\in(0,\lambda_1^{-1})$，(6.1.30)有两个不同的正解 u_1 和 u_2。那么对 $\lambda=\varepsilon^{-2}$，$v=u_1-u_2$ 满足方程(对 $\mu=\lambda$)

(6.1.33) $\Delta v-\lambda g^2(u_1^2+u_1u_2+u_2^2)v+\mu v=0$，在 Ω 中；$v|_{\partial\Omega}=0$。

把(6.1.33)看作 μ 的特征值问题，λ 固定，记(6.1.33)的最小特征值为 μ_1。类似地，把正解 u_1 看作下列方程的一个特征函数(对 $\nu=\lambda$)

(6.1.34) $\Delta w-\lambda g^2u_1^2w+\nu w=0$，在 Ω 中，$w|_{\partial\Omega}=0$。

用 ν_1 记(6.1.34)当 λ 固定时的最小特征值。从最小特征值 μ_1 和 ν_1 的变分特性推出 $\mu_1>\nu_1$。另一方面，(6.1.34)的正特征函数属于最小的特征值，我们有 $\lambda=\nu_1$；由 μ_1 是最小特征值，$\mu_1\leqslant\lambda$，因而 $\mu_1\leqslant\nu_1$，得出矛盾。从而 $v\equiv 0$，亦即 $u_1=u_2$。

最后，我们分两步证明 $u_1(x,\varepsilon)$ 连续依赖于 ε。首先假定 $\varepsilon_n\to\bar{\varepsilon}\in(0,\lambda_1^{-1/2})$，那么 $u_1(x,\varepsilon_n)$ 满足(6.1.30)。于是序列 $\{|\Delta u_1(x,\varepsilon_n)|\}$ 和 $\{|u_1(x,\varepsilon_n)|\}$ 在 Ω 上都一致有界，故有正常数 c_Ω 使得 $\sup\limits_{\Omega}|\nabla u_1(x,\varepsilon_n)|\leqslant c_\Omega$，从而序列 $\{u_1(x,\varepsilon_n)\}$ 一致有界且等度连续。根据 Arzela-Ascoli 定理，$\{u_1(x,\varepsilon_n)\}$

有一致收敛的子序列 $\{u_1(x,\varepsilon_{n_j})\}$，记其极限为 $\bar{u}(x)$. 显然对 $\varepsilon=\bar{\varepsilon}$, $\bar{u}$ 满足(6.1.30)。因为 $\bar{u}$ 是非负函数列的一致极限,所以非负. 又因 $\varphi_{\varepsilon_{n_j}}(u_1(x,\varepsilon_{n_j}))\to\varphi_{\bar{\varepsilon}}(\bar{u})$, $\min\varphi_\varepsilon(u)$ 是 ε 的单调递增*)函数，对 $\varepsilon<\lambda_1^{-1/2}$ 严格负**),所以 $\bar{u}$ 不恒为零. 于是由唯一性可得 $\bar{u}=u_1(x,\bar{\varepsilon})$. 其次，如果假设 $\sup\limits_{\Omega}|u_1(x,\varepsilon_n)-u_1(x,\bar{\varepsilon})|\not\to 0$，那么对某个子序列（仍记为 $\{\varepsilon_n\}$）有绝对常数 α 使

$$\sup_{\Omega}|u_1(x,\varepsilon_n)-u_1(x,\bar{\varepsilon})|\geqslant\alpha>0.$$

这和前面的结果相矛盾.

6.2 几何学和物理学中某些极小化问题

为改进上一节的一般结果，现在考虑微分几何和数学物理中某些特殊的重要的极小化问题.

6.2A 常值负 Hermite 曲率的 Hermite 度量

从 1.2 节讨论的Riemann曲面经典的单值化定理推出,对任何 C^∞ 紧 Riemann 2维流形 $(\mathfrak{M},g)$,当且仅当 $\mathfrak{M}$ 的 Euler 特征 $\chi(\mathfrak{M})$ 为负数时，$(\mathfrak{M},g)$ 可有常值负 Gauss 曲率的保角等价度量 $\tilde{g}$. 作为 Hadamard 定理(5.1.5)的一个应用，我们在第五章证明了这个结果. 这里，用一个适当的纯量曲率函数代替 Gauss 曲率，我们将对高维的紧复 Kähler 流形证明一个类似的结论（对它不能用(5.1.5)).

对这样的复流形 $\mathfrak{M}$，我们要找的必要且充分条件只和 $(\mathfrak{M},g)$ 的适当纯量曲率函数的积分的符号有关. 因为我们的结果一般与 g 无关，于是根据经典的 Gauss-Bonnet 定理，这结果是复一维流形情形的直接推广.

我们给出的证明在很大程度上依赖于两点，一个是极小化方法，另一个是流形上半线性椭圆型偏微分方程的全局性理论. 离

---

* 原书此处误为单调递减函数——译者注.

**) 原书此处误为严格正——译者注.

维情形的主要困难在于，要找出适当的工具代替 Sobolev 嵌入定理。此时后者已失效，这是因为，当 $\mathfrak{M}$ 的维数大于一时，对任意的 $u\in W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$，$\exp u$ 不可积。

（I） 把问题化为偏微分方程

设 $\mathfrak{M}$ 是复 N 维的 C^∞ 紧复流形，具 Kähler 度量 g（在某个局部坐标下），g 由 $ds^2=\sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha d\bar z^\beta$ 定义。那么，如果 σ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 上的实 C^∞ 函数，考虑由 $\overline{ds^2}=e^{2\sigma}ds^2$ 定义的 Hermite 度量 $\tilde g$，然后求 R 和 $\tilde R$，它们分别是 $(\mathfrak{M},g)$ 和 $(\mathfrak{M},\tilde g)$ 的 Hermite 纯量曲率，其间有关系

(6.2.1) $\quad \tilde R=e^{-2\sigma}(R-N\Delta\sigma)$，

其中 Δ 记定义在 $(\mathfrak{M},g)$ 上的相应的实 Laplace-Beltrami 算子。这个公式是这样导出的：相对于 Hermite 联络[1]，关于 $(\mathfrak{M},\tilde g)$ 的 Ricci 张量 $\tilde R_{\alpha\bar\beta}$ 的分量由下式给出

(6.2.2) $\quad \tilde R_{\alpha\bar\beta}=-\dfrac{\partial^2\log\tilde G}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}$，其中 $\tilde G=\det|\tilde g_{\alpha\bar\beta}|$。

因为 $\tilde G=e^{2N\sigma}G$，如用 $(\mathfrak{M},g)$ 的 Ricci 张量 $R_{\alpha\bar\beta}$ 的分量来表示，我们求出

$$\tilde R_{\alpha\bar\beta}=R_{\alpha\bar\beta}-2N\frac{\partial^2\sigma}{\partial z^\alpha\partial\bar z^\beta}.$$

因为所期望的纯量曲率是它们各自的 Ricci 张量的迹，又得到（参见附录 B）

(6.2.3) $\quad \tilde R e^{2\sigma}=R-2N\square\sigma$，

其中 $\square=\dfrac{1}{2}\Delta$ 是关于 $(\mathfrak{M},g)$ 的“复 Laplace 算子”。显然，从 (6.2.3) 可导出 (6.2.1)。于是如果 c^2 是某个正数，就可以这样来确定具 Hermite 纯量曲率 $-c^2$ 的保角度量，即证明偏微分方程

1) 这是和 $\mathfrak{M}$ 的复结构一致的唯一联络，当 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{M}>1$ 时，它和相应于 $(\mathfrak{M},g)$ 的 Riemann 结构的 Levi-Civita 联络不同。

(6.2.4) $N\Delta\sigma - R - c^2 e^{2\sigma} = 0$

有定义在整个$(\mathfrak{M}, g)$上的 C^∞ 解 σ. 显然,如果 $\sigma(x)$ 满足(6.2.4),在 $\mathfrak{M}$ 上积分 (6.2.4) 就得到

$$\int_{\mathfrak{M}} R(x) dV = -c^2 \int_{\mathfrak{M}} e^{2\sigma} dV < 0.$$

于是 (6.2.4) 可解的一个直接的必要条件是 $\int_{\mathfrak{M}} R(x) dV < 0$. 事实上,这个条件还是充分的,我们有

(6.2.5) 定理 设 $(\mathfrak{M}, g)$ 是紧 Kähler 流形,那么,当且仅当

$$\int_{\mathfrak{M}} R(x) dV < 0$$

时,$(\mathfrak{M}, g)$ 有具负常数曲率的保角等价 (Hermite) 度量.

证明: 上面已经证明了必要性部分,现在只需证明当 $R(x)$在$\mathfrak{M}$上的平均值为负时,(6.2.4) 对某个 $c \neq 0$ 可解. 为此先证明下面三个引理.

引理 (α) 泛函

(6.2.6) $\varphi(u) = \int_{\mathfrak{M}} \left(\frac{N}{2} |\nabla u|^2 + R(x)u + \frac{1}{2} c^2 e^{2u}\right) dV$

在函数类 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 上的下确界可由某元素$\bar{u} \in W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$达到,其中 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g) = \{u \mid \int_{\mathfrak{M}} (|\nabla u|^2 + u^2) dV_g < \infty\}$.

引理 (β) 当$\sup_{\mathfrak{M}} R(x) < 0$时,引理 (α) 中的 $\bar{u}$ 可以选成本质有界函数.

引理 (γ) 引理 (α) 中的函数 $\bar{u}$ 可以选成是 C^∞ 函数,且满足方程 (6.2.4).

现在来证明这三个结果. 显然,综合这些引理,不论是否 $\sup_{\mathfrak{M}} R(x) < 0$, 我们都可得到定理的证明.

引理 (α) 的证明: 为证明可达到在 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 上的下确界 $\inf \varphi(u)$, 我们用 (6.1.1). 为此依如下步骤应用 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 的 Hilbert 空间的结构.

(i) 首先证明,由 (6.2.6) 定义的 $\varphi(u)$ 在 $H = W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 上

有下界，若记其下界为 η, $\eta > -\infty$. 那么，如果 $\delta = \inf_H \varphi(u)$，令 $\varphi_{\delta+1} = \{u | u \in H, \varphi(u) \leqslant \delta + 1\}$. 由验证 (ii) $\varphi(u)$ 在 $\varphi_{\delta+1}$ 上强制，(iii) $\varphi(u)$ 在 $\varphi_{\delta+1}$ 下半弱连续，把 (6.1.1) 用到 $\varphi_{\delta+1}$ 上以证明 $\varphi_{\delta+1}$ 是序列弱闭集.

为证 $\varphi(u)$ 在 $W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$ 上有下界，我们注意到，如令 $u = u_0 + \bar{u}$，其中 u_0 在 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的平均值为零，$\bar{u} = (\mathrm{vol}(\mathfrak{M},g))^{-1} \cdot \int_{\mathfrak{M}} u dv$，那么

$$\varphi(u) = \int_{\mathfrak{M}} \frac{N}{2} |\nabla u_0|^2 + \int_{\mathfrak{M}} R(x) u_0 + \bar{u} \int_{\mathfrak{M}} R(x) + \frac{1}{2} c^2 e^{2\bar{u}} \int_{\mathfrak{M}} e^{2u_0}.$$

综合应用 Poincaré 不等式 $\|\nabla u_0\|_{0,2} \geqslant c^{-1} \|u_0\|_{0,2}$ 和 $e^{2u_0} \geqslant 1 + 2u_0$，从 Cauchy-schwarz 不等式求出，对任何 $\varepsilon > 0$,

$$\varphi(u) \geqslant \frac{N}{2} \|\nabla u\|_{0,2}^2 - \frac{c}{\varepsilon} \|R(x)\|_{0,2}^2 - c\varepsilon \|\nabla u\|_{0,2}^2 + \bar{u} \int_{\mathfrak{M}} R(x) dV + \frac{1}{2} c^2 e^{2\bar{u}} \mathrm{vol}(\mathfrak{M}, g). \tag{6.2.7}$$

于是，令 $\varepsilon = N/2c$，我们有（因为 $\int_{\mathfrak{M}} R(x) < 0$）

$$\varphi(u) \geqslant \frac{c^2}{N} \|R(x)\|_{0,2}^2 + \eta(\bar{u}), \tag{*}$$

其中 $\eta(\bar{u})$ 随 $|\bar{u}| \to \infty$ 而趋于无穷，故 $\inf_H \varphi(u) > -\infty$.

(ii) 用同样的方法可以验证 $\varphi(u)$ 在 $\varphi_{\delta+1}$ 上强制，其中 $\delta = \inf_H \varphi(u)$. 为此，令 $u_n \in H = W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$, $\|u_n\|_{1,2} \to \infty$，我们证明 $\varphi(u_n) \to \infty$. 请注意，可以把 $\|u\|_{1,2}^2 = \|\nabla u_0\|^2 + |\bar{u}|^2$ 选为 $W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$ 上的等价范数，因而只需考察当 $\|\nabla u_n\|_{0,2} \to \infty$ 但 $|\bar{u}_n|^2$ 有界，或 $|\bar{u}_n|^2 \to \infty$ 时 $\varphi(u_n)$ 的性状. 在第一种情形，令 $c\varepsilon = \frac{N}{4}$，就从 (6.2.7) 推出所要的结果. 在第二种情形，我们采用(*)式.

(iii) 不难证明 $\varphi(u)$ 在 $\varphi_{\delta+1}$ 上的下半弱连续性. 事实上, 如果在 $W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$ 中 $u_n \to u$ 弱收敛,那么由 Rellich 引理,在 $L_2(\mathfrak{M},g)$ 中 $u_n \to u$ 强收敛, 于是 $\int R(x)u_n \to \int R(x)u$. 根据 Fatou 定理和 (6.1.3), $\underline{\lim}\,\varphi(u_n) \geqslant \varphi(u)$. 从这个事实还可看出 $\varphi_{\delta+1}$ 是序列弱闭集.

引理 (β) 的证明: 我们证明,存在一个有限实数 $k > 0$,使对任意元素 $u \in \varphi_{\delta+1}$, 截段函数

$$(6.2.8) \qquad u^{(k)} = \begin{cases} \inf(u,k), & \text{对 } u \geqslant 0, \\ \sup(u,-k), & \text{对 } u < 0, \end{cases}$$

使 $\varphi(u^{(k)}) \leqslant \varphi(u)$. 因为 $u^{(k)} \in \varphi_{\delta+1} \cap W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$, 故极小化序列 $\{u_n\}$ 也应如此. 因而引理 (α) 中的 $\bar{u}$ 可以选成那样的函数, 其 $\operatorname{ess\,sup}_{\mathfrak{M}}|u| \leqslant k$. 为找到这样的实数 k, 首先注意到,如果 $u \in W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$, 则 $u^{(k)} \in W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$. 事实上,$\|\nabla u^{(k)}\|_{0,2} \leqslant \|\nabla u\|_{0,2}$,因而只需考虑将 u 换成 $u^{(k)}$ 时对泛函

$$J(u) = \int_{\mathfrak{M}} \{R(x)u + \frac{1}{2}c^2e^{2u}\}dV$$

的影响. 因为$\mathfrak{M}$紧, $\sup_{\mathfrak{M}} R(x) < 0$,故有两个正数 a_1 和 a_2 使 $-a_1 \leqslant R(x) \leqslant -a_2$. 因而当 $u \to +\infty$ 时,被积函数

$$f(u) = R(x)u + \frac{1}{2}c^2e^{2u} \to \infty.$$

所以存在正数 k_1, 使得对 $u \geqslant k_1$ 有 $f(k_1) \leqslant f(u)$. 另一方面, 如果 $u \to -\infty$, 因 $\sup_{\mathfrak{M}} R(x) < 0$, 所以 $f(u)$ 也趋于 ∞. 于是存在正数 k_2, 当 $u \leqslant -k_2$ 时有 $f(k_2) \leqslant f(u)$, 从而可把 $\sup(k_1, k_2)$ 选作 (6.2.8) 中所要的正数 k.

引理 (γ) 的证明: 分成两种情形来证.

情形 I: $\sup_{\mathfrak{M}} R(x) < 0$,此时由引理 ($\beta$) 断定 $\bar{u}$ 本质有界. 因而,如果 v 是定义在 $(\mathfrak{M},g)$ 上的任意 C^∞ 函数, 从 $\bar{u}$ 的极小性推出

$$(6.2.9)\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\{\varphi(\bar{u}+\varepsilon v)-\varphi(\bar{u})\}$$

$$=\int_{\mathfrak{M}}\{N\nabla\bar{u}\nabla v+R(x)v+c^2e^{2\bar{u}}v\}=0.$$

因为 C^∞ 函数在 $W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$中稠，我们得到，对所有的 $v\in W_{1,2}(\mathfrak{M},g)$，(6.2.9) 右端的积分恒有意义。于是 $\bar{u}$ 可以看作下面的 ω 的线性非齐次方程的弱解

$$(6.2.10)\quad N\Delta\omega=R+c^2e^{2\bar{u}}.$$

因为对有限的 $p>1$，(6.2.10) 的右端属于 $L_p(\mathfrak{M},g)$。从线性椭圆型方程的正则性理论推出，对一切 $1<p<\infty$，$\bar{u}\in W_{2,p}(\mathfrak{M},g)$，于是根据 Sobolev 嵌入定理（可能在一个零测集上重新定义后），$\bar{u}\in C^{1,\alpha}(\mathfrak{M},g)$（指数为 α 的一阶导数 Hölder 连续函数空间）。因为当 (6.2.10) 的右端属于 $C^{1,\alpha}(\mathfrak{M},g)$ 时，$\omega=\bar{u}$ 在弱的意义下满足该式，故可以把 Schauder 正则性理论用于 (6.2.10)。于是 $\bar{u}\in C^{2,\alpha}(\mathfrak{M},g)$，$\bar{u}$ 在古典的意义下满足 (6.2.4)。重复 Schauder 正则性理论，就得到 $\bar{u}\in C^\infty(\mathfrak{M},g)$.

情形 II: $\sup_{\mathfrak{M}}R(x)\geqslant 0$. 我们用下面的方法把这个情形化成情形 I. 把 (6.2.4) 的尝试解写成 $u=v+W$，其中

$$(6.2.11)\quad N\Delta v-\bar{R}-c^2e^{2W}e^{2v}=0,$$

$$\bar{R}=\{\mathrm{vol}(\mathfrak{M},g)\}^{-1}\int_{\mathfrak{M}}RdV_g,$$

$$(6.2.12)\quad N\Delta W-R(x)+\bar{R}=0.$$

显然 (6.2.12) 唯一可解（精确到一个常数）。又因为由假设条件 $\bar{R}<0$，可把引理 (α) 和 (β) 中的论证用于 (6.2.11)（其中 W 固定）。而且，一旦找出泛函 $\varphi(v)$ 关于 (6.2.11) 的极小化本质有界的 $\bar{v}$，情形 I 的正则性论证成立。因为 (6.2.12) 的解 W 是 C^∞ 函数，故 $u=\bar{v}+W$ 是 C^∞ 函数，把 (6.2.11) 和 (6.2.12) 相加，不难看出 u 满足 (6.2.4)。

下面用 $(\mathfrak{M},g)$ 的解析不变量来解释条件$\int_{\mathfrak{M}}R(x)dv<0$. 在复一维的情

形，从 Gauss-Bonnet 定理推出$\mathfrak{M}$的 Euler-poincaré 示性数 $\chi(\mathfrak{M})$ 为负. 更一般些，从 Kähler 流形理论一个有趣的公式推出

$$\int_{\mathfrak{M}} R(x)dV = k_N\int_{\mathfrak{M}} c_1\wedge\omega^{N-1},\quad k_N\text{是正常数},$$

其中 c_1 是 $\mathfrak{M}$ 的第一类 Chern 类，ω 是 $(\mathfrak{M}, g)$ 的基本形. 于是我们有

(6.2.13) 推论 当且仅当 $\int_{\mathfrak{M}} c_1\wedge\omega^{N-1}<0$ 时，复 N 维紧 Kähler 流形 $(\mathfrak{M}, g)$ 有保角等价于 g 的度量 $\bar{g}$，$\bar{g}$ 有常值负 Hermite 纯量曲率.

对 $\mathfrak{M}$ 的代数簇来说，这个条件可以用 $\mathfrak{M}$ 的标准因子的度的符号来表示.

6.2B 非线性弹性理论中的稳定平衡状态

一般说来，一个弹性体 B，它在给定的保守力的作用下的平衡状态可以作为某个泛函 $\varphi(u)$ 的临界点来确定，其中 $\varphi(u)$ 是一个适当光滑的位能泛函. 因为可能的平衡状态极其复杂，很重要的是确定那些对应于 $\varphi(u)$ 的绝对极小的状态. 事实上，由4.3B节的附注，这种状态是稳定的. 现在着手讨论这样一个问题，即证明对于下面的各种弹性问题，实际上可以达到 $\varphi(u)$ 的下确界.

情形 I：可变形板. 假定有一个可弯曲的弹性薄板，它的边被夹紧，受到外力的联合作用，一些力沿着边作用，一个力 $\bar{f}$ 沿着板面的法线方向. 其平衡状态由 Von Kármán 方程(1.1.12)决定. 第二章的讨论指出，这些平衡状态是算子方程 $\mathfrak{A}_\lambda(u) = f$ 的解，其中 $f\in \mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 是 $\bar{f}$ 的表现，它和 $\bar{f}$ 的大小成正比. 此外，在 (2.5.7) 和 (2.7.18) 中，我们指出，算子

$$\mathfrak{A}_\lambda(u) = u + Cu - \lambda Lu$$

(i) 是映 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的梯度映射，其位势为

$$\varphi_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{2,2}^2 - (\lambda/2)(Lu,u) + \frac{1}{4}(Cu,u),$$

$\varphi'_\lambda(u) = \mathfrak{A}_\lambda(u)$；(ii) $\mathfrak{A}_\lambda(u)$ 是正常映射(在 2.7 节的意义下). 对 $\tilde{\varphi}_\lambda(u) = 2\varphi_\lambda(u) - (f,u)$，显然有类似的结果成立.

为证明 $\tilde{\varphi}_\lambda(u)$ 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 上强制，令 $\|u_n\|\to\infty$，那么

$$\tilde{\varphi}_\lambda(u_n)=\|u_n\|^2+\frac{1}{2}(Cu_n,u_n)-\lambda(Lu_n,u_n)-(f,u_n)$$

$$=\|u_n\|^2+\frac{1}{2}\|C(u_n,u_n)\|^2-\lambda(C(u_n,u_n),F_0)$$

$$-(f,u_n).\ ^{*)}$$

于是对任意 $\varepsilon>0$，根据 Cauchy-Schwarz 不等式，

$$\tilde{\varphi}_\lambda(u_n)\geqslant\|u_n\|^2+\left(\frac{1}{2}-\lambda\varepsilon\right)\|C(u_n,u_n)\|^2$$

$$-(\lambda/\varepsilon)\|F_0\|^2-2\|f\|\|u_n\|.$$

取 $\lambda\varepsilon=\frac{1}{2}$，遂有

$$\tilde{\varphi}_\lambda(u_n)\geqslant\|u_n\|^2-2\|f\|\|u_n\|-2\lambda^2\|F_0\|^2.$$

从而对固定的 λ，当 $n\to\infty$ 时，$\tilde{\varphi}_\lambda(u_n)\to\infty$．$\tilde{\varphi}_\lambda(u)$ 的下半弱连续性是判别法 (6.1.3) 以及算子 L 和 C 的完全连续性的直接推论．从 (6.1.1)，我们断定

(6.2.14)对任何固定的 λ 和 f，泛函 $\tilde{\varphi}_\lambda(u)$ 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 上有下界，并达到它在该集上的下确界． 而且这个下确界由相应的 von Kármán 方程的一个光滑解达到．

情形 II：可变形薄壳．现在推广刚才得到的板的结果．代替平板，考虑一个薄弹性结构 S，它有某个初始弯曲，这个初始弯曲由函数 $k_1(x,y)$，$k_2(x,y)$ 描述，它们是 S 的 Gauss 曲率的量度．假定壳受外力作用，一些力作用在边界上，另一些力 Z 沿法线方向作用于壳上．所得的变形可由非线性 Von Kármán 方程 (4.3.1)—(4.3.2) 和边界条件 (4.3.23)—(4.3.24) 一起确定．为简单起见，我们还设 $Z=\lambda\psi_0$，以及 λF_0 是线性方程 $\Delta^2F=0$ 在边界条件 (4.3.23)—(4.3.24) 下的解．那么可以找形如 $(w,F+\lambda F_0)$ 的解 (w,f)，其中 w 和 F 满足

---

*) 请参看 (2.5.7)—— 译者注．

(6.2.15) $\Delta^2 F = -\frac{1}{2}[w,w] - (k_1 w_x)_x - (k_2 w_y)_y$,

(6.2.16) $\Delta^2 w = [F,w] + \lambda[F_0,w] + (k_1 F)_x + (k_2 F)_y + \lambda Z'$

(其中 $Z' = Z + (k_1 F_0)_x + (k_2 F_0)_y$) 和齐次边界条件

(6.2.17) $D^\alpha F|_{\partial\Omega} = D^\alpha w|_{\partial\Omega} = 0$, 对 $|\alpha| \leqslant 1$.

和(2.5.7)一样,这些方程可以写作 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中算子方程的形式

(i) $F = -\frac{1}{2}C(w,w) - Lw$,

(ii) $w = C(F,w) + \lambda C(F_0,w) + Lw + \lambda Z'$.

把(i)代入(ii),用(2.5.7)的结果,可把相应的位能泛函选为

(6.2.18) $$\mathcal{g}(w,\lambda) = \|w\|^2 + \left\|\frac{1}{2}C(w,w) + L_1 w\right\|^2 - \lambda(Lw,w) - \lambda(Z',w).$$

现在来证明

(6.2.19) **定理** 对一切 Z, ψ 和函数 ψ_0, k_1, k_2, $\inf_{\mathring{W}_{2,2}} \mathcal{g}(\Omega)(w,\lambda)$ 有限,并由 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$中某个元素达到,这个元素由(6.2.15)—(6.2.17)的解 (w,F) 确定.

证明: 用(6.1.1)证明. 先证(6.2.18)所定义的 $\mathcal{g}(w,\lambda)$ 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 下半弱连续,并且强制. 由(6.1.3),在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 上的下半弱连续性是显然的,因为由(2.5.7),算子 $C(w,w)$, $L_1(w)$ 和 L 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 上全连续,这意味着 $\mathcal{g}(w,\lambda)$ 是一个凸泛函和一个弱连续泛函之和. 余下只是证明 $\mathcal{g}(w,\lambda)$ 的强制性. 为此考虑集合

(6.2.20) $$E_1 = \{w \mid \|w\| = 1, \|w\|^2 - \lambda(Lw,w) < \frac{1}{2}\}.$$

显然,在 E_1 的弱闭包 E_1' 上, $\inf_{E_1'}\|w\| > 0$. 不然的话,将有序列 $w_n \in E_1$, 使 w_n 弱收敛到零元. 于是由 L 的完全连续性, $(Lw_n, w_n) \to 0$, 因而对充分大的 n, $\|w_n\| < 1$. 所以在 E_1' 上有 $\inf\|C(w,w)\| \geqslant \alpha^2 > 0$ (否则将有 $\bar{w} \in E_1$, $C(\bar{w},\bar{w}) = 0$,使曲面 $\bar{w} = \bar{w}(x,y)$ 几乎处处有零 Gauss 曲率,以及在 $\partial\Omega$ 上 $\bar{w} = 0$, 这推出 $\bar{w} = 0$). 现令 $w = \|w\|v$, $\|v\| = 1$, 对 $v \in E_1$, 我们有当 $\|w\| \to \infty$ 时,

(6.2.21) $$\mathcal{g}(w,\lambda) \geqslant \|w\|^2\{1 - \lambda(Lv,v) + \frac{\alpha^2}{4}\|w\|^2 - \|L_1 v\|^2\} - \lambda(Z',w)$$

$$\geqslant\|w\|^2\left\{\frac{\alpha^2}{4}\|w\|^2-K\right\}.$$

其中K是与w和v无关的常数；而对$v\in E_1$有

$$(6.2.22)\quad g(w,\lambda)\geqslant\|w\|^2\{\|v\|^2-\lambda(Lv,v)\}-\lambda(Z',w)$$
$$\geqslant\frac{1}{4}\|w\|^2-K.$$

因而无论在哪种情形，当$\|w\|\to\infty$时都有$g(w,\lambda)\to\infty$。

6.2C Plateau 问题

作为对 6.1 节中想法的修改，这里解决单连通可求长 Jordan 曲线$\Gamma\subset\mathbb{R}^3$（参看 1.1A）的 Plateau 问题。更确切些，我们在$\mathbb{R}^3$中找由Γ张成的光滑的单连通参数曲面S，使S的面积最小。于是，如果Ω是$\mathbb{R}^2$中单位开圆盘，我们要找一个向量$r(x,y)=(u_1(x,y),u_2(x,y),u_3(x,y))$，它用如下的方法表示$\Gamma$所张成的曲面$S$：(1) $\partial\Omega$被连续地一对一的映射到Γ上，(2)S的面积

$$(6.2.23)\quad A(S)=\iint_{\Omega}(|J(u_1,u_2)|^2+|J(u_2,u_3)|^2+|J(u_1,u_3)|^2)^{1/2}dxdy$$

为最小，其中$|J(u,v)|$是u和v对x,y的 Jacobi 行列式。

从微分几何的考虑可以把这个问题大大简化。对任意曲面

$$S=\{r\,|\,r=(u_1(x,y),u_2(x,y),u_3(x,y))\},$$

我们把第一基本形式写成

$$ds^2=dr\cdot dr=g_{11}dx^2+2g_{12}dxdy+g_{22}dy^2,$$

其中$g_{11}=r_x\cdot r_x$，$g_{12}=r_x\cdot r_y$和$g_{22}=r_y\cdot r_y$，S的面积为

$$A(S)=\iint_{\Omega}(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)^{1/2}dxdy.$$

因为对任何三个正数α,β,γ都有

$$\sqrt{\alpha\gamma-\beta^2}\leqslant\sqrt{\alpha\gamma}\leqslant\frac{1}{2}(\alpha+\gamma),$$

而且当且仅当$\alpha=\gamma$，$\beta=0$时等号成立。从这个事实我们得到

$$A(S) \leqslant \frac{1}{2}\iint_{\Omega}(g_{11} + g_{22})dxdy,$$

当且仅当 $g_{12} = 0$, $g_{11} = g_{22}$ 时等号成立。于是，如果在 S 上引进等位线参数，就有

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_{\Omega}\frac{1}{2}(g_{11} + g_{22})dxdy \\ &= \frac{1}{2}\iint_{\Omega}(|r_x|^2 + |r_y|^2)dxdy. \end{aligned}$$

因为 S 的面积与曲面的参数化无关，由选取 S 上的等位线参数，当 Dirichlet 积分

(6.2.24) $$D[r(x, y)] = \iint_{\Omega}(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + |\nabla u_3|^2)dxdy$$

达到在所有的向量 $r = (u_1, u_2, u_3)$ 上的极小时，$A(S)$ 达到极小，这些向量 r 在 $\partial\Omega$ 上满足边界条件 (1)。因为所得的 Euler-Lagrange 方程很简单，是

$$\Delta u_1 = \Delta u_2 = \Delta u_3 = 0,$$

我们可以只考虑那些分量是 Ω 中调和函数的向量 $r = (u_1, u_2, u_3)$（即调和向量），这些向量 r 还应满足条件

(6.2.24′) $|r_x|^2 = |r_y|^2$ 和 $r_x \cdot r_y = 0$.

对下面的定理，我们只概略地列出证明的主要步骤。

(6.2.25) **定理** 设 Γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中一条可求长 Jordan 曲线，$\mathfrak{C}$ 是所有如下向量 $r(x, y)$ 的集合，$r(x, y)$ 的分量属于 $W_{1,2}(\Omega)$，满足：

(i) $D[r(x, y)] \leqslant M$，其中 M 充分大；

(ii) $r(x, y)$ 满足边界条件 (6.2.24′)。

那么存在调和向量 r_∞ 使 Dirichlet 积分 (6.2.24) 达到 $\mathfrak{C}$ 上的极小，于是 r_∞ 是 Plateau 问题的解。

证明的梗概：我们首先注意到，(6.2.24) 中提出的变分问题的自然允许类 $\mathfrak{C}$ 非空。事实上，如果 $r = (u_1, u_2, u_3)$，可求长 Jordan 曲线由弧长 s 参数化，那么可以用极坐标 (r, θ) 把 u_i 写成 Fourier 级数

$$u_i = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k(\alpha_k \cos ks + \beta_k \sin ks), \quad 对 \ r < 1,$$

使得

$$\int_{\Omega} |\nabla u_i|^2 = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

因为 Γ 可求长,从而对 $\mathfrak{C}$ 中某个向量 r, $\sum k(\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ 收敛,所以 $D[r] < \infty$.

其次证明为什么在 $\mathfrak{C}$ 中能达到 $\inf D[r]$. 为此注意到,因为 $D[r]$ 不是定义在自反 Banach 空间上,故不能直接引用(6.1.1)的一般结论.但是我们可以这样来证明:对任何使 $D[r_n] \to \inf\limits_{\mathfrak{C}} D[r]$ 的极小化序列 $r_n \in \mathfrak{C}$, 我们都可以用调和向量序列 r_n' 来代替 r_n, r_n' 和 r_n 有相同的边界值,使 $r_n' \in \mathfrak{C}$. 因为 $D[r_n'] \leqslant D[r_n]$, 于是得到一个改进了的极小化序列. 用同样的方法,因为 Dirichlet 积分 $D[r]$ 在 Ω 到自身的保角变换作用下不变,我们可以假定调和向量 $\{r_n'\}$ 是标准的,即要求它们映 $\partial\Omega$ 上三个不同的点 p_1, p_2 和 p_3 成 Γ 上的三个不同的点 q_1, q_2, q_3.然后对允许类 $\mathfrak{C}$ 用 Garabedian (1964) 证明的紧性引理,即 $\{r_n'\}$ 存在一致收敛子序列,$\{r_n'\}$ 的边界值等度连续. 因而(必要时取子序列), $\{r_n'\}$ 一致收敛到调和函数 r_∞, 它满足条件 (i). 如再能证明 r_∞ 满足条件(ii),则 $r_\infty \in \mathfrak{C}$*) 从 $D[r]$ 在 $\mathfrak{C}$ 上的下半连续性推出 $\inf\limits_{\mathfrak{C}} D[r] = D[r_\infty]$.

最后,我们证明调和向量 r_∞ 满足 (6.2.24′). 为此, 只需改变 r_∞ 的参数表示同时又保持几何曲面不变. 这是因为, 在这样的坐标变换下,Dirichlet 积分不变. 对小的 $\varepsilon > 0$, 令 $f: (x, y) \to (x', y')$ 为

$$x' = x + \varepsilon\lambda(x, y), \quad y' = y + \varepsilon\mu(x, y),$$

它是从 Ω 到区域 Ω' 上的微分同胚. 对任何允许的调和向量 $r(x, y)$, 再令 $Z_\varepsilon(x', y') = r(x, y)$. 用 D' 记在 Ω' 上对 x', y' 的

*) 此处对原文作了一点更动—— 译者注.

Dirichlet 积分，由简单的计算可知，

(6.2.26) $$\frac{d}{d\varepsilon}D'[Z_\varepsilon]|_{\varepsilon=0} = \iint_\Omega (r_x^2 - r_y^2)(\lambda_u - \mu_v) + 2r_x \cdot r_y(\lambda_v - \mu_u).$$

由平面上单连通区域的 Riemann 映射定理，我们可把 λ 和 μ 选成任意连续函数，它们有分段连续一阶导数（只要 ε 足够小）。于是，可以在分段连续函数类中任意选取函数 $\lambda_u - \mu_v$ 和 $\lambda_v + \mu_u$。对 $r = r_\infty$，我们求得

$$\frac{d}{d\varepsilon}D'[Z_\varepsilon]|_{\varepsilon=0} = 0.$$

根据变分学的基本引理，从 (6.2.26) 推出 $r_x^2 = r_y^2$ 和 $r_x \cdot r_y = 0$，亦即满足条件 (6.2.24′)。因而 r_∞ 确定所希望的极小曲面的一个参数表示。

6.2D Euclid 量子场论中的动力学不稳定性

A.Wightman (1974) 建议用如下的方法描述某些和简单量子场论模型有关的非唯一性问题。考虑定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的如下半线性椭圆型偏微分方程(参看 1.1B)

(6.2.27) $\Delta u - Q'(u) = f, \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$,

其中

$$Q(u) = \frac{1}{2}m^2u^2 + P(u)$$

是偶次(大于 2) 多项式，当 $|u| \to \infty$ 时 $Q(u)$ 趋于 ∞，而且对某个固定的 $\alpha > 0$ 有 $Q(u) \geqslant \alpha u^2$。下面证明一个结论，它与 (6.2.27) 在 $W_{1,2}(\mathbf{R}^2)$ 中的解有关，这个解是泛函

$$\varphi_f(u) = \int_{\mathbf{R}^2}\left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + Q(u) + fu\right)dV$$

的临界点。后面再对所得结果作出量子场论的解释。

(6.2.28) **定理** 在所给关于 $Q(u)$ 的条件下，$\varphi_f(u)$ 在 $W_{1,2}(\mathbf{R}^2)$ 上

的下确界 $c(f)=\inf\varphi_f(u)$ 有限且由某元素 $u(f)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 达到，而且当 $|x|\to\infty$ 时 $u(f)\to 0$. 如果 $\|f\|_{L_2}$ 充分小，则绝对极小 $u(f)$ 唯一，当 $\|f\|_{L_2}\to 0$ 时它趋于 0.

证明: 从 (6.1.1) 以及 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ 直接推出 $c(f)$ 有限且可达到. 事实上，对 $|u|$ 充分大，

$$Q(u)+fu\geqslant\frac{\alpha}{2}u^2,$$

于是不难由 6.1 节的判别法推出 $\varphi_f(u)$ 的强制性和下半弱连续性. 为证对于足够小的 $\|f\|_{L_2}$, 方程 (6.2.27) 在 $w=0$ 附近有唯一解，我们用压缩映射定理. 事实上，可把 (6.2.27) 改写成

(6.2.29) $\quad \Delta u-m^2u-P'(u)=f;\quad \deg P'(u)\geqslant 2.$

我们注意，对 $m>0$, $(\Delta-m)$ 在 $W_{1,2}(\mathbb{R}^2)$ 中有逆，又 $P'(u)$ 是高阶项，于是对充分小的 $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}$, (6.2.29) 在 0 的一个小邻域中有唯一解 w_f, 它连续依赖于 $\|f\|_{L_2}$. 此外，对 $\varphi_f(u)$ 在 w_f 的二阶变分的简单计算指出，对某个 $\beta>0$,

$$\delta^2\varphi(w_f,v)=\int_{\mathbb{R}^2}\left\{\frac{1}{2}|\nabla v|^2+\left[\frac{1}{2}m^2+P''(w_f)\right]v^2\right\}$$

$$\geqslant\beta\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla v|^2+v^2),$$

故 w_f 是 $\varphi(f)$ 的孤立相对极小. 从 1.5 节的正则性理论直接推出任何极小元 $u_f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.

为证对充分小的 $\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}$ 极小元 $u(f)$ 唯一，论证如下：(a)在 $w=0$ 附近，方程 (6.2.29) 有唯一的解 w_f; (b) 只要 $\|f\|_{L_2}$ 充分小，我们就把 $u(f)$ 和 w_f 等同起来；(c) 再证 0 是 $\varphi_0(u)$ 的孤立临界值，它对应于 $c(0)$; 最后，(d) 这个绝对极小在下面的意义下稳定：当用 $\varphi_f(u)$ 扰动 $\varphi_0(u)$ 时，$c(f)$ 和 $c(0)$ 相差很小. 为断定 (b), (c), (d), 只需证明，如果 $f=0$, $c(0)=0$ 是 φ_0 的一个孤立临界值，以及对充分小的 $\varepsilon>0$, $\varphi_f(u)$ 在 $\varphi_f^{-1}[c(f),c(f)+\varepsilon]$ 中的临界点都包含于半径为 $\delta(\varepsilon)$ 的球中，且当 $\|f\|_{L_2}\to 0$ 时 $\delta(\varepsilon)\to 0$.

为证 $c(0)=0$ 是 $\varphi_0(u)$ 的孤立临界值，假定对某个序列 $\{u_n\}$,

$\varphi_0'(u_n) = 0$ 和 $\varphi_0(u_n) \to 0$；那么由 $\varphi_0(u)$ 的强制性，可以假定 $\{u_n\}$ 弱收敛。因为 $\varphi_0(u_n) \to 0$，所以 $\|u_n\|_{1,2} \to 0$。于是由(1.3.11)，$\{u_n\}$ 强收敛于 0，但这与 (a) 矛盾。

最后注意到，如果考虑集合 $\varphi_f^{-1}[c(f), c(f)+\varepsilon]$，我们发现，对这个集合上的任何临界点 u，

$$\alpha\|u\|_{1,2}^2 \leqslant \varepsilon + \|f\|_{L_2}\|u\|_{1,2}.$$

由此推出，当 ε 和 $\|f\|_{L_2} \to 0$ 时，$\|u\|_{1,2} \to 0$。

为对 (6.2.28) 作出量子场论的解释，设 m^2 表示单个粒子的质量，我们希望依据于模型 (6.2.27)，用多项式

$$Q(v) = \frac{1}{2} m^2 v^2 + P(v)$$

解释量子场论的性质。其中我们仅仅假定 $Q(u)$ 有下界，由有限个值 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 达到 $\inf Q(v) = \beta$。如果 $k = 1$，从(6.2.28)推出，只要 $\|f\|_{L_2}$ 充分小，(6.2.27) 有一个且只有一个绝对极小 u_f，使 $u_f - c_1 \in W_{1,2}(\mathrm{R}^2)$。而且当这个 L_2 范数趋于0时，$u_f \to c_1$。如果 $k \geqslant 2$，从 (6.2.28) 推出，在令 $u = v - c_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ 以后，在下面的意义下有动力学的不稳定性：当施以不同的扰动 f 时，我们可以得到解 $u_1(f)$，$u_2(f)$，它们的性质以及渐近性状完全不同。请看图 1.2。

6.3 等周问题

在很多与临界点有关的问题中同时含有参数和约束条件，这时，如果在确定问题的方程中这些参数和约束条件是显式地引进的，6.1 节所讲的方法仍然有效。

这些因素对给定 $\varphi(u)$ 所产生的影响是：相应的算子方程 $\varphi'(u) = 0$ 有"鞍点"型的解。例如，线性 Hamilton 方程 $\dot{x} + Ax = 0$ (1.2 节中谈到过)的周期为 β 的正规方式 $x(t)$ 就是能量泛函

$$\int_0^\beta (\dot{x}^2(t) - Ax(t)\cdot x(t))dt$$

的一个鞍点。这是因为正规方式应该和常 N 向量正交。

在这些情形，要求对基于 $\varphi(u)$ 极小的论证进行补充，即在确定这个问题的方程中显式地引进适当的参数和约束条件。这样一来，求泛函 $\varphi(u)$ 的临界点的问题常常转化为求某个泛函 $G_0(u)$ 在约束条件 $G_i(u)=\alpha_i$ $(i=1,\cdots,N)$ 下的临界点。所讲的等周变分问题类形成一个用纯粹分析工具研究"鞍点型"的临界点的自然方法。

所谓等周问题是指决定定义在 Banach 空间 X 上的泛函 $G_0(x)$ 限制在 $\mathfrak{C}$ 上时的极值，其中 $\mathfrak{C}$ 是 X 的真子集。回想起 (3.1.31)，如果 x_0 是 C^1 泛函 $G_0(x)$ 的一个条件极值点，满足约束条件

$\mathfrak{C}=\{x\mid G_i(x)=0, G_i(x)\in C^1(X,\mathrm{R}),\ i=1,2,\cdots,N\}$，

那么向量 $G_i'(x)(i=0,1,\cdots,N)$ 线性相关。因而，根据 (3.1.31)，存在实数 λ_i (不全为 0) 使

$$\sum_{i=0}^{N}\lambda_i G_i'(x_0)=0. \tag{6.3.1}$$

可以从不同的观点来看方程 (6.3.1)。首先，如果集合 $\mathfrak{C}$ 弱闭，那么可以用 (6.1.1) 证明存在 $x_0\in\mathfrak{C}$，x_0 满足 (6.3.1)，其中参数 λ_i 待定。在给定问题包含隐参数的情形(如早些时候提到过的)，注意到这点是重要的。另一方面，如果能证明 $\lambda_i=0(i=1,\cdots,N)$，那么，$\lambda_0\neq 0$，且极值点 x_0 满足算子方程 $G_0'(x_0)=0$。于是这时我们说，点 x_0 是 $G_0(x)$ 关于"自然"约束 $\mathfrak{C}$ (参看 6.3B) 的临界点。这里所用术语"自然"一词强调这样一个事实：$G_0(x)$ 限于 $\mathfrak{C}\subset X$ 的临界点也是 $G_0(x)$ 在 X 自身上的临界点。现在对这两种可能性进行仔细的考察。

6.3A 梯度映射的非线性特征值问题

和隐参数有关的一个重要情形是求算子方程 $Au=\lambda Bu$ 的非平凡解 (u,λ) 的问题，其中 $A(0)=B(0)=0$。已经提到过，这个问题可以看作确定线性算子点谱在非线性时的推广。显然，如

果 A 和 B 是梯度算子，$Ax = \mathfrak{A}'(x)$，$Bx = \mathscr{B}'(x)$，那么(6.3.1)的解将是 $\mathfrak{A}(x)$ 限制在水平集 $\mathscr{B}_c = \{x \mid \mathscr{B}(x) = c$，$c$ 是常数，$x \in X\}$ 上的临界点，其中 c 在实数集上变化。

作为 (6.3.1) 存在非平凡解的第一个结果，我们有

(6.3.2) **定理** 设 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是定义在自反 Banach 空间 X 上的 C^1 泛函，具有如下性质：

(i) 在 $X \cap \{\mathscr{B}(x) = 常数\}$ 上，$\mathfrak{A}(x)$ 下半弱连续和强制；

(ii) $\mathscr{B}(x)$ 对序列弱收敛连续，仅当 $x = 0$ 时 $\mathscr{B}'(x) = 0$。

那么对一切 $R \in (\mathscr{B}(X) - \mathscr{B}(0))$*)，方程 $\mathfrak{A}'(x) = \lambda\mathscr{B}'(x)$ 有单参数非平凡解族 (x_R, λ_R) 使 $\mathscr{B}(x_R) = R$；且 x_R 是 $\mathfrak{A}(x)$ 在集 $\{x \mid \mathscr{B}(x) = R\}$ 上的极小点。

证明： 这是 (6.1.1) 的直接推论。事实上，因为 $\mathscr{B}(x)$ 在 X 上弱连续，集合 $\mathscr{B}_R = \{x \mid \mathscr{B}(x) = R\}$ 是弱闭集，如果集合 $\mathscr{B}_R$ 不空，那么由 (6.1.1) 保证存在一个 $x_R \in \mathscr{B}_R$，使 $\mathfrak{A}(x_R) = \inf\limits_{x \in \mathscr{B}_R} \mathfrak{A}(x)$。因为 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 可微，从 (6.3.1) 推出，存在数 λ_1，λ_2 (不同时为 0) 满足 $\lambda_1\mathfrak{A}'(x_R) + \lambda_2\mathscr{B}'(x_R) = 0$。现在 $\lambda_1 \neq 0$，否则将由 $\mathscr{B}'(x_R) = 0$ 推出 $x_R = 0$ (注意假设条件)。于是 x_R 满足方程 $\mathfrak{A}'(x_R) = \lambda\mathscr{B}'(x_R)$，其中 $\lambda = -\lambda_2/\lambda_1$。

(6.3.3) **附注****)

设 X 是可分自反 Banach 空间，$\mathscr{B}(x)$ 是定义在 X 上的 C^2 泛函，且 $\mathscr{B}'(x)$ 是 Fredholm 算子，$\dim(\mathrm{Ker}\mathscr{B}''(x)) \leqslant 2$。那么，由于从 (3.1.47) 推出实数集 $Z = \{R \mid \mathscr{B}'(x) = 0, \mathscr{B}(x) = R\}$ 是 Lebesgue 零测集，(6.3.2) 可以得到加强。于是可能除一个零测集外，对 $\mathscr{B}$ 的值域中的一切实数 (6.3.2) 成立。

如果算子 $\mathfrak{A}'(x) = Lx$ 线性(在很多应用中就是如此)，可以把 (6.3.2) 改进为

(6.3.4) **定理** 设 L 是有界线性自共轭 Fredholm 算子，映 Hilbert

---

*) 原书此处误为 $R \in \mathscr{B}(X)$——译者注。

**) 原书的附注有错，译文已作较大更动——译者注。

空间H到自身，有非负的本质谱. $\mathfrak{N}(x)$ 是 C^1 严格凸泛函*)，对H中的弱收敛连续，且 $\mathfrak{N}(x) \geqslant \mathfrak{N}(0)=0$. 那么，如果在 $C_R=\{x \mid \mathfrak{N}(x)=R, \mathfrak{N}'(x) \perp \operatorname{Ker} L\}$ 上二次型 (Lx, x) 强制，即对 $x \in C_R$，当 $\|x\| \rightarrow \infty$ 时有 $(Lx, x) \rightarrow \infty$**). 那么方程 $Lx=\lambda \mathfrak{N}'(x)$ 有非平凡解 (x_R, λ_R), $\lambda_R \neq 0$, 且在 x_R 处达到 $\inf\limits_{x \in C_R}(Lx, x)$***).

证明：结果分三步得出. 首先我们确定一个"自然"约束集 C_R，使极小化问题 ($G_0(x)$ 在 C_R 上的极小)的解 x_R 是$Lx=\lambda \mathfrak{N}'(x)$ 的一个解. 其次证明对每个 $R>0, C_R$ 非空. 最后证明在$x_R \in C_R$ 达到 $\inf\limits_{x \in C_R} G_0(x)$.

第一步：下面证明，任何元素 u_0，如果达到

$$G_0(x)=\frac{1}{2}(Lx, x)$$

在约束条件 $C_R=\{x \mid x \in H, \mathfrak{N}(x)=R, (\mathfrak{N}'(x), w)=0$, 对一切 $w \in \operatorname{Ker} L\}$ 下的极小，那么它是方程 $Lx=\lambda \mathfrak{N}'(x)$ 的一个解，且显然 $\mathfrak{N}(u_0)=R$. 事实上，由 (3.1.31), u_0 应满足下面的方程

$$\beta_0 L u=\beta_1 \mathfrak{N}'(u)+\mathfrak{N}''(u) \bar{w}, \tag{6.3.5}$$

其中 $\bar{w} \in \operatorname{Ker} L$. 我们证明 $\bar{w}=0$，而β_0 和β_1 都不为 0. 取 (6.3.5) 和 $\bar{w}$ 的内积，由对任意 $w \in \operatorname{Ker} L$, $Lw=0$ 和 $(\mathfrak{N}'(u_0), w)=0$, 求得 $(\mathfrak{N}''(u_0) \bar{w}, \bar{w})=0$. 又因 $\mathfrak{N}$ 严格凸，于是 $\bar{w}=0$. 下证$\beta_0 \neq 0$. 因为如果它为 0，则 $\beta_1 \neq 0$ 和 $\mathfrak{N}'(u_0)=0$，又由 $\mathfrak{N}$ 严格凸，$u_0=0$，这和 $\mathfrak{N}(u_0)=R>0$ 相矛盾. 为证$\beta_1 \neq 0$，用反证法，设若不然，那么 $Lu_0=0$，故 $u_0 \in \operatorname{Ker} L$. 于是由 $u_0 \in C_R$, $(\mathfrak{N}'(u_0), u_0)=0$; 又由 $\mathfrak{N}(u)$ 严格凸，有 $u_0=0$，这又和 $\mathfrak{N}(u_0)=R>0$ 相矛盾.

第二步：现在证明

---

*) 本书中 $\mathfrak{N}(x)$ 严格凸均指 $\forall \eta \neq 0$，有 $(\mathfrak{N}''(x)\eta, \eta)>0$——译者注.

**) 应要求 $R>0$——译者注.

***) 原书误为 $\sup\limits_{x \in C_R}(Lx, x)$——译者注.

(6.3.6) 引理 假定 $\mathfrak{N}(x)$ 满足 (6.3.4) 的假设条件，那么对任何 $R>0$，约束集 $C_R=\{x\,|\,\mathfrak{N}(x)=R,(\mathfrak{N}'(x),w)=0,w\in \mathrm{Ker}L\}$ 非空.

证明： 令 $\mathfrak{S}_i=\{x\,|\,(\mathfrak{N}'(x),w_i)=0\}$，$i=1,2,\cdots,N$. 那么约束条件 $\mathfrak{S}_i$ 可以写成

$$(\mathfrak{N}'(y+\sum_{i=1}^{N}\beta_i w_i),w_j)=0,\quad j=1,\cdots,N,$$

其中$(w_1,w_2,\cdots,w_N)$是 $\mathrm{Ker}L$ 的一组正交基，$y\in[\mathrm{Ker}L]^{\perp}$. 把上面方程的左端看作 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_N)$ 的函数，固定 $y\in[\mathrm{Ker}L]^{\perp}$，那么，那些是泛函

$$F(\beta)=\mathfrak{N}(y+\sum_{i=1}^{N}\beta_i w_i)$$

的临界点的N向量 β 满足 $(\mathfrak{N}'(x),w_i)=0$，$i=1,\cdots,N$. 由泛函 $\mathfrak{N}$ 的严格凸性，对固定的$y\in[\mathrm{Ker}L]^{\perp}$，$F(\beta)=\mathfrak{N}\left(y+\sum_{i=1}^{N}\beta_i w_i\right)$有且仅有一个临界点 $\beta(y)=(\beta_1(y),\cdots,\beta_N(y))$. 从而对每个正数 s，有元素$y(s)=sy+\sum_{i=1}^{N}\beta_i(sy)w_i$，使得对一切 $w\in\mathrm{Ker}L$ 有 $(\mathfrak{N}'(y(s)),w)=0$. 现在对于固定的非零 $y\in[\mathrm{Ker}L]^{\perp}$，泛函

$$G(s,\beta_1,\cdots,\beta_N)=\mathfrak{N}(sy+\sum_{i=1}^{N}\beta_i w_i)$$

是定义在 $\mathbf{R}^{N+1}$ 上的严格凸泛函，如果

$$|s|+\sum_{i=1}^{N}|\beta_i|\to\infty,$$

就有 $G(s,\beta_1,\cdots,\beta_N)\to\infty$. 因而当$|s|\to\infty$ 时，作为 s 的函数，$g(s)=\mathfrak{N}(sy+\sum_{i=1}^{N}\beta_i(sy)w_i)\to\infty$. 从而只要我们证明了 $g(s)$ 是 s 的连续函数，引理就得证. 而这是凸理论的直接推论，盖因 $g(s)=\inf G(s,\beta_1,\cdots,\beta_N)$ (下确界是对 $\beta_1,\cdots,\beta_N$ 取的)，而G严格凸.

第三步： 现在证明 $\inf_{C_R} \frac{1}{2}(Lx,x)$ 由元素 $u_0 \in C_R$ 达到. 因为 C_R 是 Hilbert 空间H中的弱闭集，由(6.1.1)，只需证明泛函 (Lx,x) 在H下半弱连续. 但因L可以分解成一个自共轭正算子 L_1 和一个紧自共轭算子 L_2 之和，(Lx,x) 的下半弱连续性就是(6.1.3)的直接推论.

在非线性特征值问题的研究中，(6.3.2)中所提到的变分问题的对偶问题也是有用的. 对每个固定的数 R，考虑水平集$\mathfrak{A}_R=\{x \mid \mathfrak{A}(x)=R\}$ 和数 $C_R=\sup_{\mathfrak{A}_R}\mathscr{B}(x)$，可证

(6.3.7) 定理 设 $\mathfrak{A}(x)$ 和 $\mathscr{B}(x)$ 是定义在自反 Banach 空间X上的 C^1 泛函，满足性质：(i) $\mathfrak{A}(x)$ 强制，在X下半弱连续，对每个固定的非零的 $x\in X$，实函数 $f(t)=\mathfrak{A}(tx)$ 是 t 的非零，递增函数*)；(ii) $\mathscr{B}(x)$ 对弱收敛连续，且从 $\mathscr{B}'(x)=0$ 得出 $x=0$，以及对每个非零的 $x\in X$，$g(t)=\mathscr{B}(tx)$ 是 t 的严格递增函数. 那么，对 $\mathscr{B}(X)-\mathscr{B}(0)$ 中的每个 R，上面定义的数 C_R 是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{A}_R$ 上的临界值. 此外，如果对 $x_R\in\mathfrak{A}_R$，$\mathscr{B}(x_R)=C_R$，则 (x_R,λ_R) 是方程 $\mathfrak{A}'(x)=\lambda\mathscr{B}'(x)$ 的非平凡解.

证明：因为 $\mathfrak{A}(x)$ 强制，水平集 $\mathfrak{A}_R$ 有界，故泛函 $\mathscr{B}(x)$ 在 $\mathfrak{A}_R$ 上有界，其中 $\mathscr{B}(x)$ 对弱收敛连续. 于是 $C_R=\sup_{\mathfrak{A}_R}\mathscr{B}(x)$有限. 因而任意极大化序列 $\{x_n\}\subset\mathfrak{A}_R$ 有界，以及(必要时取子序列) x_n 弱收敛，其弱极限为 $\bar{x}$，由 $\mathscr{B}(x)$ 对弱收敛的连续性推出 $C_R=\mathscr{B}(\bar{x})$. 令 $\bar{x}=x_R$，为得到所希望的结果，我们证明 $x_R\in\mathfrak{A}_R$，且对某个有限数 λ_R，x_R 满足方程 $\mathfrak{A}'(x)=\lambda_R\mathscr{B}'(x)$. 为此假定 $x_R\bar{\in}\mathfrak{A}_R$，由 $\mathfrak{A}(x)$ 的下半弱连续性，我们可设 $\mathfrak{A}(x_R)<R$. 由 $\mathfrak{A}(x)$ 的强制性推出，对某个 $t>1$，$\mathfrak{A}(tx_R)=R$. 由条件(ii)推出，$\mathscr{B}(tx_R)>C_R=\sup_{\mathfrak{A}_R}\mathscr{B}(x)$(一个矛盾). 从而 $x_R\in\mathfrak{A}_R$. 根据(3.1.31)，有数 λ_1，λ_2，使 $\lambda_1\mathfrak{A}'(x_R)+\lambda_2\mathscr{B}'(x_R)=0$，其中 $\lambda_1\neq 0$，否则将有

---

*) 略修改证法就可不必要求 $f(t)$ 是 t 的非零、递增函数——译者注。

$\mathscr{B}'(x_R)=0$，由假设条件 (ii) 就推出 $x_R=0$，这和 $R\neq\mathfrak{A}(0)$ 相矛盾。

上面提出的研究非线性特征值问题的等周方法有明显的局限性，即它们只能得出类似于算子 A 第一特征元的元素．在线性算子的情形，并不需要继续讨论任何进一步的临界点理论，因为正交和正交补的概念使得重复运用等周方法可以得到 A 的全部特征元的集合．但是，对于非线性算子，我们不能得到这个完整结果的完全类似物，除非发展更深入的临界点理论．事实上，必须去找拓扑"约束条件"，它使得能够讨论非线性算子的"较高的"特征元．

例：为理解 (6.3.2) 的要旨和精确含义，考虑定义在有界区域 Ω[1] $\subset R^N(N>2)$ 上的半线性 Dirichlet 问题：

(6.3.8) $$\Delta u+k(x)u+\lambda g(x)u^{\sigma}=0,\quad u|_{\partial\Omega}=0,$$

其中 $k(x)$ 和 $g(x)$ 是光滑函数(譬如说 Hölder 连续)，且在 $\bar{\Omega}$ 上有 $g(x)>0$．作为 (6.3.2) 的应用，我们证明

(6.3.9) 定理 如果 σ 位于开区间 $\left(1,\dfrac{N+2}{N-2}\right)$，那么对每个正数 $R>0$，方程 (6.3.8) 有单参数非平凡光滑解族 (u_R,λ_R)，使

$$\int_\Omega g(x)u_R^{\sigma+1}=R,$$

且在 Ω 中有 $u_R>0$*)．

证明：显然，在应用 (6.3.2) 时要用到的泛函 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 可以定义为

$$\mathfrak{A}(u)=\int_\Omega(|\nabla u|^2-k(x)u^2)dx,$$

$$\mathscr{B}(u)=\int_\Omega g(x)u^{\sigma+1}dx.$$

暂时假定 σ 是奇数，不难验证 (i) 泛函 $\mathfrak{A}(u)$ 在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 下半弱连

---

[1] 在后面的几何内容部分再次考虑了这个问题，但把 Ω 换作一个 N 维紧 Riemann 流形 $\mathfrak{N}^N$——原注．

*) 要保证在 Ω 中有 $u_R>0$ 的结论，还需加上如下条件：在 $\bar{\Omega}$ 上 $k(x)\leqslant 0$——译者注．

续，(ii) 对 $\sigma\in\left(0,\frac{N+2}{N-2}\right)$，泛函 $\mathscr{B}(u)$ 在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 弱连续，严格凸. 于是只需验证 $\mathfrak{A}(u)$ 在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 上关于 $\mathscr{B}$ 强制*)，为此首先注意到，根据 Jensen 不等式 (1.3.4)，对 $\alpha=\inf\limits_{\Omega}g(x)$，

$$\left\{\int_\Omega |u|dx\right\}^{\sigma+1}\leqslant(\mu(\Omega))^\sigma\int_\Omega |u|^{\sigma+1}dx$$
$$=(\mu(\Omega))^\sigma\int_\Omega u^{\sigma+1}dx$$
$$\leqslant\frac{1}{\alpha}(\mu(\Omega))^\sigma\int_\Omega g(x)u^{\sigma+1}dx.$$

因而，如果 $\mathscr{B}(u)\leqslant$ 常数，则 $\|u\|_{L_1(\Omega)}$ 一致有界. 而且，由应用 (1.3.28)，存在绝对常数 $c_1>0$, c_2，使

$$\mathfrak{A}(u)=\int_\Omega(|\nabla u|^2-k(x)u^2)dx\geqslant c_1\|u\|_{1,2}^2-c_2\|u\|_{0,1}^2.$$

于是当 $\|u\|\to\infty$ 但 $\mathscr{B}(u)\leqslant$ 常数时有 $\mathfrak{A}(u)\to\infty$. 因为泛函 $\mathscr{B}$ 的值域是 $[0,\infty)$，当且仅当 $u=0$ 时 $\mathscr{B}(u)=0$，所以 $R=0$ 是 $\mathscr{B}(u)$ 值域中唯一被排除的点. 从而对开区间 $(0,\infty)$ 中每个 R，方程 (6.3.8) 有非平凡弱解族 (u_R,λ_R)，$\int_\Omega g(x)u^{\sigma+1}dx=R$. 而且，如果 $u\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$，则 $|u|\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$，当把 u 换成 $|u|$ 时泛函 $\mathfrak{A}(u)$ 和 $\mathscr{B}(u)$ 都不变. 因而可以断定，对 $\inf\limits_{\mathscr{B}_R}\mathfrak{A}(u)$ 的任何极小化序列 $\{u_n\}\subset\mathscr{B}_R$，如把 $\{u_n\}$ 换成 $\{|u_n|\}$，它们仍是极小化序列. 因为 $\{u_n\}$ 的一个子序列几乎处处收敛到 u_R，我们可以假定 $u_R\geqslant 0$ 在 Ω 中几乎处处成立. 而且，如在 1.5 节中提到的，线性正则性理论使我们可以假定 u_R 在 Ω 中以及在 $\partial\Omega$ 所有充分光滑的部分上足够光滑，按点满足 (6.3.8). 为证在 Ω 中 $u_R>0$，我们利用极大原则**) (参看 Protter 和 Weinberger, 1967). 事实上，如果对某个 $x\in\Omega$ 有 $u_R(x)=0$，由 (6.3.8) 推出在 Ω 中 $u_R\equiv 0$.

---

*) 意指 $\mathfrak{A}(u)$ 在 $\mathscr{B}_R=\{u(x)|u(x)\in\mathring{W}_{1,2}(\Omega),\mathscr{B}(u)=$ 常数$\}$ 上强制——译者注.

**) 这里要用到 $k(x)\leqslant 0$ 的假设——译者注.

最后去掉对 σ 的奇性限制．我们注意到，如果在 (6.3.8) 中用 $g(x)|u|^{\sigma-1}u$ 代替 $g(x)u^{\sigma}$，重复刚才的论证，对于修改了的方程又求出一个解 $u_R \geqslant 0$．但是这时有 $g(x)u_R^{\sigma} = g(x)|u_R|^{\sigma-1}u_R$，从而结果得证．

立即可以想到 (6.3.9) 两种可能的重要推广：

(i) 对 $\sigma \geqslant \dfrac{N+2}{N-2}$，(6.3.9) 成立的可能性；

(ii) 去掉 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中有界区域的限制．

在这两种情形，主要困难在于泛函 $\mathscr{B}(u)$ 不再弱连续（或等价地，$\mathscr{B}'(u)$ 不再全连续）．

在 (i) 的情形，我们指出，如同在 (1.2.7) 中的讨论所导出的，(6.3.9) 在如下意义上得到了改进*)．

(6.3.10) 在方程 (6.3.8) 中，设 Ω 是星形区域**)，$k(x)\equiv 0$，$g(x)\equiv\beta^2>0$，$\sigma \geqslant \dfrac{N+2}{N-2}$，那么 (6.3.8) 没有非平凡光滑正解．

在 (ii) 的情形，稍后在 (6.7.25) 中将证明

(6.3.11) 定理 设 $\Omega = \mathbf{R}^N$，$g(x)\equiv g>0$ 是正常数，$k(x)\equiv k<0$ 是负常数．那么方程 (6.3.8) 在 $W_{1,2}(\mathbf{R}^N)$ 中有非平凡光滑正解的必要充分条件是 $\sigma < \dfrac{N+2}{N-2}$．

在一般情形，考虑定义在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 上的泛函

$$\mathfrak{A}(u) = \int_\Omega F(x, D^\alpha u), \quad |\alpha| \leqslant m$$

和

$$\mathscr{B}(u) = \int_\Omega G(x, D^\beta u) \qquad |\beta| \leqslant m-1.$$

Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中有界区域．那么，只要函数 $F(x, y)$ 和 $G(x, y)$ 满足适

---

*) (6.3.10)不是由(1.2.7)导出的，而是由 Pohozaev 等式导出的，请参看 С.И. Похожаев, Доклады Акад, Наук, СССР, **165**: 1(1965), 36—39——译者注．

**) 此句为译者所加——译者注．

当的 Sobolev 增长限制条件，以保证 $\mathfrak{A}(u)$ 和 $\mathscr{B}(u)$ 是定义在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 上的 C^1 泛函，从定理 (6.3.7) 就导出对 $|\gamma| \leqslant m$，方程

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha F_\alpha(x,D^\gamma u) = \lambda \sum_{|\beta|\leqslant m-1}(-1)^{|\beta|}D^\beta G_\beta(x,D^\gamma u),$$

$$D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \quad |\alpha| \leqslant m-1$$

存在非平凡解 (u_R, λ_R) 的条件.

需要验证的主要条件包括 (a) $\mathfrak{A}(u)$ 在 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 的下半弱连续性，(b) $\mathscr{B}(u)$ 对 $\mathring{W}_{m,p}(\Omega)$ 弱收敛的连续性，以及 (c)$\mathfrak{A}(u)$的强制性. 为满足这些条件，函数 $F(x,D^\gamma u)$, $G(x,D^\gamma u)$ 所必须具有的性质在前面已经讨论过了.

6.3B 半线性梯度算子方程的可解性

现在转向早些时候提到过的等周变分问题应用的第二个方面：如下方程的严格可解性准则(类似于 5.4E 中的这个问题). 考虑非齐次梯度算子方程

(6.3.12) $\quad \varphi'(u) = f.$

但和 5.4E 不同，并未要求 $\varphi'(u)$ 按线性速度增长，这里 $\varphi(u)$ 是定义在 Hilbert 空间 H 上的 C^1 实值泛函. 此外假定 φ' 是映 H 到自身的半线性梯度算子，$\varphi' = L + \mathfrak{N}'$，其中 L 是自共轭 Fredholm 算子，$\mathfrak{N}'$ 是(非线性的)全连续映射，映 H 到自身. 因为在最有意义的那些情形，算子 L 或者有负谱，或者有非平凡的核，(6.3.12)的解*不再对应于*泛函 $I(u) = \varphi(u) - (f,u)$ 的*绝对极小点*. 事实上，解 u_0 一般对应于 $I(u)$ 的一个鞍点. 对二次泛函 $\varphi(u)$ 巧妙地应用正交性，可把这样的临界点化成绝对极小点. 这里指出，在某些情形，我们可以找到正交性的一个"非线性的推广"，这对于用解析方法研究 (6.3.12) 的可解性是合适的. 在下一节我们再讲怎样用拓扑方法研究泛函 $\varphi(u)$ 的鞍点.

为了找出 (6.3.12) 有解的适当的必要且充分条件，我们引进"自然约束"的概念：假定 C^1 泛函 $\varphi(u)$ 的临界值不是它在 Hilbert 空间 H 上的绝对极小，但是有 H 的子流形 $\mathfrak{M}$ 使得

(i) 由某个元素 $\bar{u}\in\mathfrak{M}$ 达到 $c=\inf\limits_{\mathfrak{M}}\varphi(u)$;

(ii) 对任何 $\bar{u}\in\mathfrak{M}\cap\varphi^{-1}(c)$, $\varphi'(\bar{u})=0$, 使得 $\bar{u}$ 不仅是 φ 限于 $\mathfrak{M}$ 上的临界点,而且是 φ 看作定义在 H 本身上时的临界点;

(iii) $\varphi(u)$ 的全部临界点都属于 $\mathfrak{M}$.

在那些解应当满足固定的几何条件(例如可看下面的6.4B)的几何问题中通常就是这种情形. 对于和 C^2 泛函 $\varphi(u)$ 相应的自然约束,下面的结果给出清楚的一般结构.

(6.3.13) **定理** 设 N 是 Hilbert 空间 H 的闭线性子空间, 假定 $\varphi(u)$ 是定义在 H 上的 C^2 泛函. 令

$$S=\{u\mid u\in H, \varphi'(u)\perp N\},$$

假设 (a) 对弱序列收敛 S 闭且不空;

(b) $\varphi(u)$ 在 S 上强制,下半弱连续;

(c) 对每个 $u\in S$, $\varphi''(u)$ 在 N 上强正定(或强负定)[*].

那么

(i) $c=\inf\limits_{S}\varphi(u)$ 有限,由某个元素 $\bar{u}\in S$ 达到,

(ii) S 是泛函 $\varphi(u)$ (在 H 上)的自然约束.

证明: (i) 可直接从条件 (a), (b) 以及 (6.1.1) 推出,于是只需证明 (ii). 为此注意到 S 的元素是算子 $P\varphi'(u)$ 在 H 上的零点,其中 P 是 H 到 N 的标准投影. 算子 $P\varphi'(u)$ 是从 H 到 N 中的映射, 它的导算子 $P\varphi''(u)$ 满射. 事实上, 由条件 (c), 对每个 $u\in H$, $P\varphi''(u)$ 映 N 到自身满值(应用 Lax-Milgram 定理 (1.3.21)). 因而从 (3.1.37) 推出,对 $\varphi(u)$ 限于 S 上时的极值点 $\bar{u}$, 有固定的元素 $w\in N$, 使 $\bar{u}$ 是 H 上的泛函 $\varphi(u)-(P\varphi'(u),w)$ 的临界点, 因而 $\bar{u}$ 满足

$$\varphi'(\bar{u})=\varphi''(\bar{u})w.$$

将这个方程与 w 作内积,根据 S 的定义,得出 $(\varphi''(\bar{u})w, w)=0$. 从条件 (c) 推出 $w=0$, 所以 $\varphi'(\bar{u})=0$. 于是为验证 S 是 $\varphi(u)$

---

[*] 原文误为 $\varphi''(u)$ 在 N 上正定(或负定)—— 译者注.

在H上的自然约束，只需证明$\varphi(u)$（看作定义在H上）的每个临界点都属于S。因为从$\varphi'(v)=0$得出$\varphi'(v)$必然和N正交，这就直接推出了最后要证的这个事实。

为应用上面构造算子方程(6.3.12)的自然约束的一般法则，我们用φ'半线性这个事实(即$\varphi'(u)=Lu+\mathfrak{N}'(u)$)。相应地，仔细选择子空间$N$以照顾到$L$的谱性质。更清楚些，我们将基于$L$的谱性质确定泛函$\varphi(u)$的尝试临界值$c$的特征，然后用(6.3.13)和与映射$\mathfrak{N}'(u)$有关的假设条件，以确保$c$实际上是$\varphi(u)$的临界值。

于是，如果$\mathfrak{N}''(u)\equiv 0$，不难验证，当$L$是自共轭 Fredholm 算子时*)，

(a) 泛函$J(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)-(f,u)$唯一可能的临界值$\bar{c}$由下面的公式决定

$$\bar{c}=\inf_{x\in H_+}\sup_{y\in H_-}\sup_{z\in \mathrm{Ker}L} J(x+y+z), \tag{6.3.14}$$

其中H_+和H_-是H的线性子空间，L在H_+上正定；H_-是H的子空间，L在H_-上负定。

(b) $\bar{c}$有限且被达到的充要条件是f和$\mathrm{Ker}L$正交。

从(a)和(b)就推出定义在H上的算子方程$Lu=f$的严格可解性准则。公式(6.3.14)展示这样一个事实：和$J(u)$相应的临界值一般不是绝对极小值。

现在来建立(a)和(b)。首先注意，如果f不和$\mathrm{Ker}L$正交，则$J(z)=-(f,z)$可以取任何实数值(正或负)。从H_+,H_-和$\mathrm{Ker}L$相互正交推出

$$J(x+y+z)=J(x)+J(y)+J(z).$$

于是，如果f不同$\mathrm{Ker}L$正交，那么$\bar{c}$不可能有限；反之，如果$f\perp\mathrm{Ker}L$，$J(x+y+z)=J(x)+J(y)$，故

$$\bar{c}=\inf_{H_+}J(x)+\sup_{H_-}J(y). \tag{6.3.15}$$

因为算子L是自共轭 Fredholm 算子，故有绝对常数$\alpha>0$，使得对$x\in H_+$和$y\in H_-$，

---

*) 此条件为译者所加，否则下面的分解$H=H_+\oplus H_-\oplus\mathrm{Ker}L$无根据——译者注。

(6.3.16) $(Lx, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$, $(Ly, y) \leqslant -\alpha\|y\|^2$.

根据(6.3.16)，在某个 $\bar{x} \in H_+$ 达到 $\inf_{H_+} J(x)$. 由 $J(x)$ 的严格凸性推出这个 $\bar{x}$ 唯一. 因为 $\sup_{H_-} J(y) = \inf_{H_-}\{-J(y)\}$，对 $\sup_{H_-} J(y)$ 有类似结论成立，且点 $\bar{y} \in H_-$ 唯一. 于是从(6.3.15)推出，对任何 $z \in \mathrm{Ker}L$，可在任意形若 $\bar{u} = \bar{x} + \bar{y} + z$ 的点达到 $\bar{c}$. 令 P_+ 和 P_- 分别是 H 到 H_+ 和 H_- 上的标准正交投影，那么

$$
\begin{aligned}
J'(\bar{u}) &= L\bar{u} - f = (L\bar{x} - P_+f) + (L\bar{y} - P_-f) \\
&= P_+J'(\bar{x}) + P_-J'(\bar{y}) = 0.
\end{aligned}
$$

在一般情形，我们首先考虑泛函

$$
\varphi(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) + R(u),
$$

令

(6.3.17) $$c = \inf_{x \in H_+} \sup_{y \in H_-} \sup_{z \in \mathrm{Ker}L} \varphi(x + y + z),$$

定义一个类似于 $\bar{c}$ 的数 c. 对泛函 $R(u)$ 确定条件以保证 c 有限，并且是 $\varphi(u)$ 在 H 上的临界值. 然后令 $R(u) = \mathfrak{N}(u) - (f, u)$，并证明这些条件导出方程

(6.3.18) $$Lu + \mathfrak{N}'(u) = f$$

有解的必要且充分条件. 在 $\mathfrak{N}'(u) \equiv 0$ 的情形，它转化成通常的 Fredholm 正交条件. 为此，我们证明如下的两个结果:

(6.3.19) **引理** 设 $R'(u)$ 全连续，C^2 泛函

$$
\varphi(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) + R(u)
$$

满足如下条件:

(i) 集合 $\mathfrak{S}_0 = \{u \mid \varphi'(u) \perp \mathrm{Ker}L\} \neq \varnothing$;

(ii) 对固定的 $u \in \mathfrak{S}_0$，在 $w \in \mathrm{Ker}L \oplus H_-$ 中，泛函 $\varphi(u + w)$ 严格凹，当 $\|w\| \to \infty$ 时，$\varphi(u + w) \to -\infty$;

(iii) 对 $u \in \mathfrak{S} = \{u \mid \varphi'(u) \perp \{H_- \oplus \mathrm{Ker}L\}\}$，当 $\|u\| \to \infty$ 时 $\varphi(u) \to \infty$.

那么，由(6.3.17)定义的数 c 有限且是 $\varphi(u)$ 在 H 上的临界值.

用同样的记号并令 $\mathfrak{N}'(u)-f=R'(u)$，我们有

(6.3.20) 定理 设算子 $\mathfrak{N}'(u)$ 全连续，且满足如下的条件：

(i) 对 $u\in\mathfrak{M}=\{u|(\mathfrak{N}'(u)-f)\perp \mathrm{Ker}L\}$，$L+\mathfrak{N}''(u)$ 在 $H_-\oplus\mathrm{Ker}L$ 上负定，当 $w\in H_-\oplus\mathrm{Ker}L$，$\|w\|\to\infty$ 时 $\varphi(u+w)\to-\infty$；

(ii) 对 $u\in\mathfrak{S}=\{u|(Lu+\mathfrak{N}'(u)-f)\perp H_-\oplus\mathrm{Ker}L\}$，当 $\|u\|\to\infty$ 时 $\varphi(u)\to\infty$.

那么，当且仅当集合 $\mathfrak{M}$ 是非空集时，方程 (6.3.18) 可解. 此外，如果可解，则 $\varphi(u)$ 的临界值由 (6.3.17) 给出.

用 (6.3.19) 证明 (6.3.20)：事实上，如果 (6.3.18) 有解，集 $\mathfrak{M}$ 必然非空，这是因为 (6.3.18) 的任何解都是 $\mathfrak{M}$ 的元素. 另一方面，如果 $\mathfrak{M}\neq\varnothing$，从引理 (6.3.19) 推出，由 (6.3.17) 定义的数 c 是 $\varphi(u)$ 在 H 上的临界值，从而 (6.3.18) 必然可解.

(6.3.19) 的证明：我们验证集合 $\mathfrak{S}=\{u|\varphi'(u)\perp(H_-\oplus\mathrm{Ker}L)\}$ 和泛函 $\varphi(u)$ 满足 (6.3.13) 的条件 (a)—(c)，从 (6.3.13) 就推出要证的结果.

首先证明 $\mathfrak{S}$ 是非空集，对弱收敛闭. 因为 $\varphi'(u)=Lu+R'(u)$，由在 H 中 u_n 弱收敛于 u 推出在 H 中 Lu_n 弱收敛到 Lu，以及在 H 中 $R'(u_n)\to R'(u)$ 强收敛，故由 $u_n\in\mathfrak{S}$ 推出 $u\in\mathfrak{S}$. 证明 $\mathfrak{S}$ 非空是利用 $\mathfrak{S}_0$ 非空这个事实. 因为 $\mathfrak{S}_0$ 非空，对某个 $\bar{x}$，$\bar{y}$，

$$\delta=\sup_{\mathrm{Ker}L}\varphi(\bar{x}+\bar{y}+z)<\infty.$$

同时从 $\mathrm{Ker}L$ 有限维推出对某个 $\bar{z}\in\mathrm{Ker}L$，有 $\delta=\varphi(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})$. 令 $\bar{u}=\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$，对 $y\in H_-$ 和 $z\in\mathrm{Ker}L$，考虑泛函 $\varphi_1(\bar{u}+y+z)=-\varphi(\bar{u}+y+z)$. 由条件 (ii)，$\varphi_1$ 在 $H_-\oplus\mathrm{Ker}L$ 上强制. 又因 φ_1 在其上是下半弱连续的，从 (6.1.1) 推出，对某个 $\tilde{y}+\tilde{z}$，

$$P\varphi_1'(\bar{u}+\tilde{y}+\tilde{z})=0,$$

其中 P 是从 H 到 $H_-\oplus\mathrm{Ker}L$ 上的投影，于是 $\bar{u}+\tilde{y}+\tilde{z}\in\mathfrak{S}$.

为得到 $\varphi(u)$ 在 $\mathfrak{S}$ 上的下半弱连续性，我们又把任意元素 $v\in\mathfrak{S}$（和上面一样）唯一分解成 $v=x+y+z$，并且注意到可从

$P\varphi'(v)=0$ 推出 $Ly=-PR'(v)$. 于是，如果 u_n 弱收敛到 u, 因为 $PR'(u_n)$ 强收敛，故 Ly_n 强收敛，从而对 $u\in\mathfrak{S}$, 二次型对弱收敛连续. 相应地，对 $u\in\mathfrak{S}$, 可把泛函 $\varphi(u)$ 写成

$$(6.3.21)\qquad \varphi(u)=\frac{1}{2}(Lx,x)+(Ly,y)+R(u).$$

因为 (6.3.21) 中后面两项都对弱收敛连续，于是由 (6.1.3), $\varphi(u)$ 下半弱连续.

$\varphi(u)$ 在 $\mathfrak{S}$ 上的强制性是 (6.3.19) 条件 (iii) 的直接推论. 最后，对 $u\in\mathfrak{S}$, $\varphi''(u)$ 在 N 上负定是 $\varphi(u+w)$ 的严格凹性的直接推论，而严格凹性是由条件 (ii) 给出的.

因此，由 (6.3.13), $\mathfrak{S}$ 是 $\varphi(u)$ 在 H 上的自然约束，而且 $\inf\limits_{\mathfrak{S}}\varphi(u)$ 是 $\varphi(u)$ 在 H 上的临界值. 余下来的就是证明 (6.3.14) 定义的 c 实际上等于 $\inf\limits_{\mathfrak{S}}\varphi(u)$. 这可从下面的事实推出：$\mathfrak{S}$ 的点正好是方程

$$P\varphi'(x+y+z)=0,\quad u=x+y+z$$

的解，这个解集的元素是：当 $x\in H_+$ 固定时达到临界值 $\sup\limits_{w\in H_-\oplus \mathrm{Ker}L}\varphi(x+w)$ 的点 $x+w$. 然后令 x 在 H_+ 变化，达到极值的点即为达到 (6.3.17) 所定义的 c 的点，从而引理 (6.3.19) 得证.

在导出 (6.3.12) 进一步的推论之前，我们先指出，在一定条件下，由限制 L 的谱可以大大减弱结论的条件.

(6.3.22) 推论 设 $\sigma_e(L)$ 非负，那么 (6.3.19) 条件 (ii) 的强制性部分可以取消，只要我们假定，对 $u\in\mathfrak{m}$ 和某个 $\varepsilon>0$, 在 $\mathrm{Ker}L\oplus H_-$ 上 $\varphi''(u)-\varepsilon L$ 负定.

证明: 设 $u\in\mathfrak{m}$, 分解 $w=y+z$, $y\in H_-$, $z\in \mathrm{Ker}L$. 那么由 Taylor 公式有

$$(6.3.23)\qquad \varphi(u+w)=\varphi(u)+(\varphi'(u),w)+\int_0^1(1-s)(\varphi''(u+sw)w,w)ds.$$

因为 $u\in\mathfrak{m}$, $(\varphi'(u),z)=0$; 又因 L 是 Fredholm 算子，则存在有限绝对常数

γ，使得对一切 $y\in H_-$，有 $(Ly,y)\leqslant-\gamma\|y\|^2$．根据假设，对某个 $\varepsilon>0$，$\tilde{\varphi}''(u)=\varphi''(u)-\varepsilon L$ 使 $(\tilde{\varphi}''(u)w,w)<0$．此外，从 $\sigma_e(L)\subset[0,\infty)$ 推出 $\dim(H_-\oplus\text{Ker}L)<\infty$，故有正数 α，使对固定的 $u\in\mathfrak{m}$，$\max\limits_{\|w\|=1}(\tilde{\varphi}''(u)w,w)=-2\alpha$．

由 φ'' 的连续性，存在 $\rho>0$ 使得当 $\|h-u\|<\rho$ 时，

$$\|\tilde{\varphi}''(h)-\tilde{\varphi}''(u)\|\leqslant\alpha.$$

于是对充分小的 s，譬如说 $\|sw\|\leqslant\rho$，以及 $h=u+sw$，有

$$(\tilde{\varphi}''(h)w,w)=(\tilde{\varphi}''(u)w,w)-([\tilde{\varphi}''(u)-\tilde{\varphi}''(h)]w,w)$$
$$\leqslant-\alpha\|w\|^2.$$

综合这些式子以及(6.3.23)，我们得到

$$\varphi(u+w)\leqslant\varphi(u)+(\varphi'(u),y)+\frac{\varepsilon}{2}(Lw,w)$$
$$+\int_0^{\rho/\|w\|}(1-s)(-\alpha\|w\|^2)ds.$$

从 Cauchy-Schwarz 不等式推出，对任意 $\delta>0$，

$$\varphi(u+w)\leqslant\text{常数}+\delta\|y\|^2-\frac{\gamma\varepsilon}{2}\|y\|^2-\alpha\rho\|w\|.$$

取 $\delta=\frac{\gamma\varepsilon}{2}$，我们得出，当 $\|w\|\to\infty$ 时 $\varphi(u+w)\to-\infty$．这正是所要求的。

作为上面结果的一个有用的应用，考虑半线性梯度算子方程

(6.3.24) $\qquad Lu+\mathfrak{n}'(u)=g$，

其中 $\mathfrak{n}(u)$ 是 u 的 C^2 严格凹泛函，$\mathfrak{n}'(u)$ 全连续，且对一切 $u\in H$，$\|\mathfrak{n}'(u)\|\leqslant$ 常数．还设 L 的本质谱非负，那么下面的类似于(5.4.29)的结果成立．

(6.3.25) 定理 (6.3.24)可解的必要充分条件是集合 $\mathfrak{m}_g=\{u\,|\,(\mathfrak{n}'(u)-g)\perp\text{Ker}L\}$ 非空．此外，当把算子 $L+\mathfrak{n}'$ 看作从 H 到自身的映射时有开的值域．

证明: 我们把这个结果的第一部分留给有兴趣的读者，因为它可从刚才建立的事实常规地推出．

下面证明如果 $\mathfrak{m}_{g_0}$ 非空，那么对某个固定的 $\varepsilon>0$，对满足 $\|g_0-g'\|\leqslant\varepsilon$ 的 g'，$\mathfrak{m}_{g'}$ 亦然．由此来证明映射 $L+\mathfrak{n}'$ 有开的值域．令 $g_0\in\text{Range}(L+\mathfrak{n}')$，那么，根据定理的第一部分，集合

$$\mathfrak{m}_{g_0}=\{u\,|\,u\in H,(\mathfrak{n}'(u)-g_0)\perp\text{Ker}L\}$$

包含某个点 $u_0\in H$．此外，对任何 $\omega\in[\text{Ker}L]^\perp$，集合

$$\mathfrak{m}_w=\{u\,|\,u\in H,(\mathfrak{n}'(u)-g_0-w)\perp\text{Ker}L\}$$

非空，因为它包含 u_0．最后，设 $z\in\text{Ker}L$ 有充分小的范数，我们证明集合

(6.3.26) $\quad \mathfrak{M}_\varepsilon=\{u \mid u\in H,(\mathfrak{n}'(u)-g_0-\varepsilon)\perp \operatorname{Ker}L\}$

也非空，因为它包含 u_0 附近的一个元素 $u(\varepsilon)$. 事实上，如果可以解算子方程

(6.3.27) $\quad P_0(\mathfrak{n}'(u(\varepsilon)))=P_0(\varepsilon+g_0)$,

则 $u(\varepsilon)\in\mathfrak{M}_\varepsilon$, 其中 P_0 是从 H 到 $\operatorname{Ker}L$ 上的标准投影. 如果 $\varepsilon=0$, u_0 满足(6.3.27). 于是对充分小的 $\|\varepsilon\|$, 由反函数定理可知，如果把(6.3.27)的左端看作从 $\operatorname{Ker}L$ 的原点的小邻域到 $\operatorname{Ker}L$ 中的映射，那么(6.3.27)有解. 事实上，在这里可以用反函数定理，这是因为 L 是 Fredholm 算子，$\dim \operatorname{Ker}L<\infty$, 故从 $\mathfrak{n}(u)$ 的严格凹性推出 $C_0\mathfrak{n}''(u_0)$ 是一对一线性映射(它映 $\operatorname{Ker}L$ 到自身)，故有逆.

最后，用结果的第一部分，在上节的基础上可以求出，对所有使 $\|g-g_0\|$ 充分小的 $g\in H$, 方程 $Lu+\mathfrak{n}'(u)=g$ 有解，于是映射 $L+\mathfrak{n}'$ 有开的值域.

6.4 几何学和物理学中的等周问题

现在指出，怎样把上节的一般结果用于解数学物理和微分几何中的各种具体问题.

6.4A 非线性 Hamilton 方程的大振幅周期解族

我们希望证明，当适当限制位势函数 $U(x)$ 时，N 维动力自治方程组 $\mathfrak{S}_N$

(6.4.1) $$x_{tt}+\nabla U(x)=0$$

存在周期解族，这个方程组以 $U(x(t))$ 在一个周期上的平均值为参数. 这个问题和 4.1 节的 Liapunov 判别法一样，可能的周期解的周期是隐参数. 和 4.1 节中的讨论不同的是，这时对所希望的周期解族没有明显的首次逼近. 此外，使系统 $\mathfrak{S}_N$ 的位能

$$\int_0^1 U(x(s))ds$$

在如下函数类上达到极大的等周问题 (π_R), 以及它的对偶问题，都不能给出所需的解族. 这个函数类由周期为 1 的 N 向量函数 $x(t)$ 组成，$x(t)$ 有固定的动能，即 $\int_0^1|\dot{x}|^2ds=R$. 事实上，不难看出，对"强制"位势函数 $U(x)$ 来说，(π_R) 中的极大值为无穷. 同

于 (π_R) 对偶的等周问题中的极小为零。但是在(6.3.4)的基础上，我们可以证明

(6.4.2) **定理** 设 $U(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^N$ 上的 C^1 凸泛函，满足

(i) $U(x) \geqslant U(0) = 0$,

(ii) 当 $|x| \to \infty$ 时 $U(x) \to \infty$。

那么对一切 $R > 0$，(6.4.1) 有不同周期单参数解族 x_R，使 $U(x_R(t))$在一个周期上的平均值是 R。此外，如果 $U(x)$是 $\frac{1}{2}Ax\cdot x$ 和 $x = 0$ 附近的高阶项之和，其中 A 是正定矩阵，那么当 $R \to 0$ 时，$x_R(t)$ 的周期趋于相应线性方程组的最小非零周期。

证明： 我们这样证明这个结论. 首先，对严格凸 C^2 位势泛函 $U(x)$，用 (6.3.4) 证明它成立，然后对满足 (i)，(ii) 的一般的 C^1 凸位势泛函 $U(x)$，用适当选取的严格凸泛函 $U_N(x)$ 来逼近$U(x)$。

第一步： 我们首先对 $U(x)$ 是 C^2 严格凸泛函，且满足 (i) 和 (ii) 的情形来证明 (6.4.2)。为此在 (6.4.1) 中作变量代换 $t = \lambda s$，显式地引出周期参数，并求方程

$$(6.4.3) \qquad x_{ss} + \lambda^2\nabla U(x) = 0$$

的 1 周期解 $x(s)$ $(\neq 0)$，这样的解 $x(s)$ 对应于 (6.4.1) 的 λ 周期解。

显然，由 (6.3.4)，在我们的条件下，这样的解可以由解如下极小化问题得到：

(π_N) $\int_0^1 |x_s|^2 ds$ 在 $W_N(0, 1)$ 上的极小问题，其中 $W_N(0, 1)$ 的元素是 (6.1.8) 中所讲的N向量函数，绝对连续，平方可积，且满足约束条件

$$(6.4.4) \quad \mathfrak{C}_R = \left\{x(s) \,|\, x(s) \in W_N, \int_0^1 U(x(s))ds = R, \int_0^1 \nabla U(x(s))ds = 0\right\}.$$

事实上，当看成 $W_N(0, 1)$ 上的算子时，x_{ss} 的核由常N向量组成，于是 (6.3.4) 中的约束条件 $\mathfrak{C}_R$ 正好是 (6.4.4)。为完成第一步，根

据 (6.3.4)，只需检验一下是否满足它的条件．显然

$$\mathfrak{M}(x)=\int_0^1 U(x(s))ds$$

是 $W_N(0,1)$ 上的 C^1 严格凸泛函． 从结果 (2.5.6) 推出 $\mathfrak{M}(x)$ 弱连续，同时，和在 (6.3.9) 中一样，从 Jensen 不等式推出 (Lx,x) 强制．事实上，如果 $x(s)=(x_1(s),\cdots,x_N(s))$，

$$U\left(\int_0^1 x_1(s)ds,\cdots,\int_0^1 x_N(s)ds\right)\leqslant\int_0^1 U(x(s))ds=R.$$

那么由上面条件 (ii)，$|\int x(s)ds|$ 在 $\mathfrak{S}_R$ 上一致有界．因而，如果 $\|x(s)\|_{W_N}\to\infty$，$x(s)\in\mathfrak{S}_R$，和(6.1.8)的证明一样，有 $\int_0^1|x_s|^2ds\to\infty$．当 $R\to 0$ 时的性状则直接从 4.2 节的结果得出．

第二步：现在去掉 $U(x)$ 严格凸及属于 C^2 类的限制． 注意存在函数序列 $U_1(x),U_2(x),\cdots$，使

(α) 对 $x\in\mathbb{R}^N$，$U_k(x)\geqslant U_k(0)=0$；

(β) $U_k\in C^2(\mathbb{R}^N)$，对一切 x，U_k 的 Hesse 矩阵正定；

(γ) 当 $k\to\infty$ 时 $U_k\to U$，$\text{grad}U_k\to\text{grad}U$ 在 $\mathbb{R}^N$ 的紧集上一致；

(δ) 当 $|x|\to\infty$ 时，$U_k(x)\to\infty$ 对 k 一致．

这样的函数列是存在的，例如，用卷积把 U 光滑化，加上一个小的量 $|x|^2/k$ 以保证条件 (α)，(β)(同时保持在 $x=0$ 处达到极小)．用第一步，得到 W_N 中 1 周期偶函数列 $\{x_k(s)\}$ 满足

$$(6.4.5)\qquad \int_0^1\dot{x}_k\cdot\dot{\phi}ds=\lambda_k^2\int_0^1\text{grad}U_k(x_k)\cdot\phi ds,$$

对一切 $\phi\in W_N$，

并且 $\int_0^1|\dot{x}_k(s)|^2ds=\inf\int_0^1|\dot{x}(s)|^2ds$，其下确界是在集合

$$S_{k,R}=\left\{x(s)\,|\,x(s)\in W_N,\int_0^1\text{grad}U_k(x(s))ds=0,\int_0^1 U_k(x(s))ds=R\right\}$$

上取的．其次指出，只需证明 $\left.\int_0^1|\dot{x}_k(s)|^2ds\right\}$ 一致有界．如证明了这点，因为 $\int_0^1 U_k(x_k(s))ds=R$，从 $\{U_k(x)\}$ 的性质 (δ) 就可推出序列 $\{\sup|x_k(s)|\}$ 和 $\{\|x_k\|\}$ 一致有界，因而 $\{x_k\}$ 在 W_N 中有弱收敛子序列(仍记为 $\{x_k\}$)，其弱极限为 $\bar{x}$；此外 x_k 还一致收敛到 $\bar{x}$，使得

$$\int_0^1 \mathrm{grad}U(\bar{x}(s))ds = 0, \quad \int_0^1 U(\bar{x}(s))ds = R > 0,$$

如果 $\bar{x}(s)$ 恒为常数，譬如说 $\bar{x}(s) \equiv c$，那么 $\mathrm{grad}U(c) = 0$. 因而，如果 x 处在连接 $x = 0$ 和 $x = c$ 的线段上，那么 $x \cdot \mathrm{grad}U(x) = 0$，从而在这个线段上有 $U(x) = 0$，特别 $U(c) = 0$，这与上面最后一个式子相矛盾. 于是 $\bar{x}(s)$ 不恒为常数. 进一步，在(6.4.5)中令 $\phi = x_k$，取极限得到 $\{\lambda_k^2\}$ 一致有界(因为当 $U(x) > 0$ 时 $x \cdot \mathrm{grad}U(x) > 0$). 因而 $\{\lambda_k^2\}$ 有收敛子序列，其极限 $\lambda^2 \neq 0$，于是 $\bar{x}$ 满足

$$\int_0^1 \dot{\phi} \cdot \dot{\bar{x}} ds = \lambda^2 \int_0^1 \mathrm{grad}U(\bar{x}) \cdot \phi ds, \quad \text{对一切 } \phi \in W_N.$$

因而 $\bar{x}$ 光滑，并且也满足 $\ddot{\bar{x}} + \lambda^2 \mathrm{grad}U(\bar{x}) = 0$. 显然它就是所讨论的等周问题的临界点.

下面证明 $\left\{\int_0^1 |\dot{x}_k(s)|^2 ds\right\}$ 一致有界以完成定理的证明. 为此令 $x(s) = (\sin 2\pi s, 0, \cdots, 0)$，那么有数 $t_k > 0$ 和向量 $c_k \in \mathbb{R}^N$，使得(根据 U_k 的性质)

$$y_k(s) = t_k x(s) + c_k \in S_{k,R},$$

这就是 $\int_0^1 \mathrm{grad}U_k(y_k(s))ds = 0$, $\int_0^1 U_k(y_k(s))ds = R$. 令 $C > 0$ 足够大使从 $|x| > C$ 可推出 $U_k(x) \geqslant 2R \quad (k = 1, 2, \cdots)$，那么

$$2R\,\mathrm{meas}\{s \mid 0 \leqslant s \leqslant 1, \ |y_k(s)| > C\} \leqslant R,$$

使得

$$\mathrm{meas}\{s \mid 0 \leqslant s \leqslant 1, \ |y_k(s)| \leqslant C\} \geqslant \frac{1}{2}.$$

因而存在区间 $[\xi, \eta] \subset [0, 1]$，在其上有 $|y_k(s)| \leqslant C$, $\eta - \xi \geqslant \frac{1}{4}$ 和 $|\sin 2\eta - \sin 2\xi| \geqslant \theta \equiv 1 - \sin \frac{1}{4} > 0$. 因为 $|y_k(\eta) - y_k(\xi)| \leqslant 2C$，故 $t_k \leqslant 2C/\theta$，因而

$$\int_0^1 |\dot{y}_k(s)|^2 ds \leqslant 4\left(\frac{2C}{\theta}\right)^2.$$

于是序列 $\left\{\int_0^1 |\dot{x}_k(s)|^2 ds\right\}$ 也以 $4\left(\frac{2C}{\theta}\right)^2$ 为上界.

附注:

如果位势函数 $U(x)$ 是偶函数，定理(6.4.2)的条件可以大大减弱. 事实上，凸性条件可以换成对 $x \neq 0$, $\nabla U(x) \cdot x > 0$. 考虑 $W_N(0,1)$ 的一个闭子空间，它由这样的函数 $x(s)$ 组成，$x(s)$ 是奇函数，在 0 和 1 这两点取值为

0，就不难得到这个结果.

用下面的问题可对这样一个整体性结果的重要性作出很好的说明：考虑众所周知的 Kepler 二体问题，讨论在自治 Hamilton 小扰动下它的周期轨道的保持问题．更清楚些，对 $N=2$ 或 3，在适当的 Cartese 坐标下，这个问题可以写成如下形式：

$$\ddot{x}+\frac{x}{|x|^3}-\varepsilon\nabla V(x)=0, \tag{6.4.6}$$

其中 $V(x)$ 是 C^1 实值函数，对小的 $|x|$，$|\nabla V(x)|=o(1)$，ε 是小参数 假定对 $\varepsilon=0$，由(6.4.6)描述的系统有负的总能量，亦即对任何解 $x(t)$，有

$$\frac{1}{2}|\dot{x}|^2+\frac{1}{|x|}<0^{*)}.$$

那么对 $\varepsilon=0$，(6.4.6)所有的解将是周期的．我们求 $x=0$ 附近的那些周期轨道，它们对 $\varepsilon\neq0$ 保持不变．显然，一个要解决的重要问题是在奇点 $x=0$ 附近 $x/|x|^3$ 一项的性状．为克服 $N=2$ 时的这个困难，我们用有用的 Levi-Civita 正则化理论(在 1.1 节中提到过)．还要指出我们关于(6.4.6)周期解的整体性结果的重要性．

为此，用复的记号把 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 写成 $x=x_1+ix_2=u^2$，$u=u_1+iu_2$，$r=|x|$．对自变量也作变换 $s=\int_0^t dt/r$，使得$\frac{ds}{dt}=1/r$．那么，(6.4.6)固定的能量曲面为 H：

$$L(x)=\frac{1}{2}|\dot{x}|^2+\frac{1}{r}+\varepsilon V=\text{常数}.$$

当限制在这曲面上时，Lagrange 泛函成为

$$L^*=rL=\frac{r}{2}(|x'|^2/r^2)+1+r(c+\varepsilon V),\quad c\text{ 为常数}.$$

因为 $|x'|^2=4|u|^2|u'|^2$ 和 $r=|u|^2$，用 u 来表示，L^* 就成为 $2|u'|^2+1+u\bar{u}(c+\varepsilon V)$．于是变换后的方程可以写成

$$u''+\nabla U(u)=0, \tag{6.4.7}$$

其中

$$U(u)=-\frac{1}{4}|u|^4(c+\varepsilon V(u^2)).$$

---

*) 这里以及下面的 L，L^*，(6.4.8)中的泛函都应加上积分号，因此这里写出的仅是被积函数．但请注意，加积分号后常数也应相应改变——译者注．

从而(6.4.7)的使

$$\frac{1}{2}|\dot{x}|^2+\frac{1}{r}+\theta V+c=0$$

的周期解一一对应于(6.4.7)的使

(6.4.8) $$2|u'|^2+1-4U=0$$

的周期解. 显然,为求(6.4.7)满足(6.4.8)的周期解自然需要整体性的结果. 事实上,仅仅知道(6.4.7)在 $u=0$ 附近的解的存在性是不够的, 因为这样的解并不一定满足(6.4.8). 对适当的函数 V, 定理(6.4.2)保证(6.4.7)有一个周期解族 $u_R(t)$, 它们之中有一个解满足(6.4.8).

6.4B 具零 Euler-Poincaré 特征的紧2维流形的 Riemann 结构,该结构有指定的 Gauss 曲率

(6.4.9) $$\Delta u-k(x)+K(x)e^{2u}=0$$

是一个半线性椭圆型偏微分方程,定义在一个紧二维 Riemann 流形 $(\mathfrak{M}, g)$ 上, $\chi(\mathfrak{M})=0$, 其中 Δ 记 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的 Laplace-Beltrami 算子, $k(x)$ 是光滑函数, $\int_{\mathfrak{M}} k(x)dV_g=0$, $K(x)$ 是给定的 Hölder 连续函数. 我们来确定上述方程有解的必要充分条件. 如早些时候提到过的(见(6.2.9)), 这个问题的肯定回答有如下的几何意义: $K(x)$ 是 Riemann 度量 $(\mathfrak{M}, \bar{g})$ 的 Gauss 曲率, 其中 $\bar{g}=e^{2u}g$ (按点)保角等价于 g[1]. 一个更一般的保角映射的概念与微分同胚于 $\mathfrak{M}$ 的逐点保角映射的构成有关(图 6.1). 从这个几何观点来看,(6.4.9)可解的直接的必要条件正是 $0=\int_{\mathfrak{M}} K(x)e^{2u}dV_g$. 它由在 $\mathfrak{M}$ 上积分(6.4.9)得出,意味着 $\mathfrak{M}$ 关于度量 $\bar{g}$ 的"整曲率"应该满足 Gauss-Bonnet 定理. 这正是我们在 6.3B 节中提到过的"自然"约束.

另一方面,从 6.3 节所采用的观点来看,因为在集合

1) 在 Kazdan 和 Warner (1974) 中,(6.4.10)用于证明 $\chi(\mathfrak{M})=0$ 时 Gauss-Bonnet 定理的逆定理.

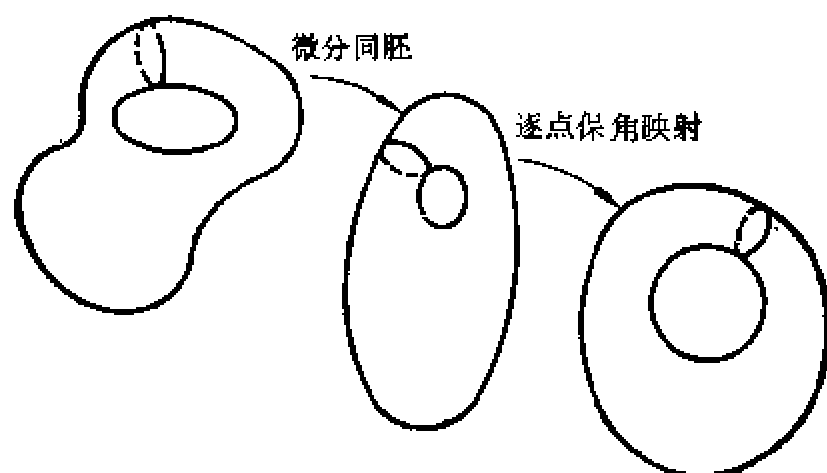


图 6.1 解 $\chi(\mathfrak{M})=0$ 时的 Gauss-Bonnet 定理的广义逆定理所必需的保角映射.

$$S=\{u\mid u\in W_{1,2}(\mathfrak{M},g),\ \int_{\mathfrak{M}}K(x)e^{2u}dV=0\}$$

上，泛函 $\mathfrak{g}(u)=\int_{\mathfrak{M}}\left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2+k(x)u^2\right\}dV$ 显然不强制，于是方程 (6.4.1) 处于奇异的情形. 由此推出，为把 (6.4.9) 的解表作极小，集合 $\mathfrak{S}$ 应加以扩充. 下面证明，如果在 (6.4.9) 的自然等周问题中加入一个简单的隐式限制，就可导出强制性. 事实上，我们要证明如下改进了的结果.

(6.4.10) 定理 设 $\mathfrak{M}$ 的 Euler-Poincaré 示性数 $\chi(\mathfrak{M})=0$，那么方程 (6.4.9) 可解的必要且充分条件是：或者 $K(x)\equiv 0$，或者 $K(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上改变符号且 $\int_{\mathfrak{M}}K(x)e^{2u_0}dV<0$，其中 u_0 是 $\Delta u=k(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的任一解.

必要性的证明：如果 u 满足 (6.4.9) 和 $\chi(\mathfrak{M})=0$，那么

$$\int_{\mathfrak{M}}K(x)e^{2u}dV=0.$$

于是如果 $K(x)$ 不恒为 0，$K(x)$ 应在 $\mathfrak{M}$ 上改变符号. 另一方面，如果令 $u=u_0+w$，函数 w 满足方程 $\Delta w+K(x)e^{2u_0+2w}=0$. 用 e^{-2w} 乘这个方程，在 $\mathfrak{M}$ 上积分. 由分部积分得到

$$2\int_{\mathfrak{M}}e^{-2w}|\nabla w|^2dV=-\int_{\mathfrak{M}}K(x)e^{2u_0}dV>0.$$

在继续往下进行之前，我们叙述一个 (6.4.9) 的解的等周问题。

引理 设 $\chi(\mathfrak{M})=0$，$K(x)$ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 上的已给泛函，对某个定义在 $\mathfrak{M}$ 上的 Riemann 度量 g，$\int_{\mathfrak{M}} K(x)e^{2u_0}dV<0$，那么泛函 $g(u)=\int_{\mathfrak{M}}\left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2+k(x)u\right\}dV$ 在 S' 上的(光滑)临界点是方程 (6.3.9) 的一个解(可能相差一个常数)，其中

$$S'=\left\{u \mid u\in W_{1,2}(\mathfrak{M},g),\ \int_{\mathfrak{M}} udV=0,\ \int_{\mathfrak{M}} K(x)e^{2u}dV=0\right\}.$$

证明：(3.1.31) 的证明指出，上面定义的等周变分问题的光滑临界点 u 满足

(†) $$\beta_0(\Delta u-k(x))+\beta_1K(x)e^{2u}=\beta_2,$$

其中 $\beta_i(i=0,1,2)$ 是常数，不全为 0。显然，$\beta_0\neq 0$。否则从 $u\in S'$ 推出 $\beta_1=\beta_2=0$，故我们可令 $\beta_0=1$。因为

$$\int_{\mathfrak{M}} K(x)e^{2u}dV\neq 0.$$

$\Delta u-k(x)=0$ 在 S' 上没有解，故 β_1 和 β_2 不能同时为 0。为证 $\beta_2=0$，对(†)积分得到

$$-\int_{\mathfrak{M}} k(x)dV+\beta_1\int_{\mathfrak{M}} K(x)e^{2u}dV=\beta_2 u(\mathfrak{M}).$$

因为 $\int_{\mathfrak{M}} k(x)dV=0$，$u\in S'$，所以 $\beta_2=0$。由 $\beta_1\neq 0$，有常数 c 使 $\pm e^{2c}=\beta_1$。故 $\bar{u}=u+c$ 满足 $\Delta\bar{u}-k(x)\pm K(x)e^{2\bar{u}}=0$。下面证明 $\beta_1>0$，于是有 $\beta_1=e^{2c}$，$\bar{u}=u+c$ 满足方程 (6.4.9)。在(†)中令 $u=u_0+w$，那么根据假设，因为 $\beta_2=0$，有

$$\Delta w+\beta_1K(x)e^{2u_0}e^{2w}=0.$$

又乘以 e^{-2w} 并在 $\mathfrak{M}$ 上积分，分部积分得到

$$\int_{\mathfrak{M}} e^{-2w}|\nabla w|^2dV=-\beta_1\int_{\mathfrak{M}} K(x)e^{2u_0}dV.$$

因 $w\neq 0$，于是 $\beta_1>0$。

充分性的证明：为证这个变分问题临界点的存在性，我们令 $\sigma=\sigma_0+c$，其中 $\int_{\mathfrak{M}}\sigma_0 dV=0$，使得(因为 $\int_{\mathfrak{M}} k(x)dV=0$)

$$g(\sigma_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{M}}(|\nabla\sigma_0|^2 + k(x)\sigma_0)dV$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\|\sigma_0\|^2 - c_1\|k(x)\|\|\sigma_0\|.$$

从而 $g(\sigma_0)$ 在 S' 上强制，$g(\sigma)$ 下半弱连续。而且 S' 在 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 中弱闭。故根据 (6.1.1)，由某个元素 $u \in S'$ 达到 $\inf\limits_{S'} g(\sigma)$，从而 u 是方程 (6.4.9) 在空间 $W_{1,2}(\mathfrak{M}, g)$ 中的弱解。因为 u 是形若 $\Delta u = f$ 的线性方程的弱解，其中 $f \in L_p$ (对一切有限的 $p > 1$)，所以 u 足够光滑，在古典意义下满足方程 (6.4.9)，定理证毕。

6.4C 具指定纯量曲率的 Riemann 流形

设 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 是给定的紧 Riemann 流形，其维数 $N > 2$。在这样一个流形上，找一个定义在 $\mathfrak{M}^N$ 上的新度量 $\tilde{g}$，$\tilde{g} = e^{2v}g$，使得新的 Riemann 流形 $(\mathfrak{M}^N, \tilde{g})$ 在 $\mathfrak{M}^N$ 上有指定的曲率 $g(x) < 0$。在 1.1A 节中已讲过，如用 $k(x)$ 记 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 的纯量曲率，那么确定 v 的偏微分方程可以写成

$$(6.4.11) \qquad \frac{4(N-1)}{N-2}\Delta u - k(x)u + g(x)u^\sigma = 0,$$

其中 $\sigma = \frac{N+2}{N-2}$，$u = \exp\frac{1}{2}(N-2)v$ 在 $\mathfrak{M}$ 上严格正。这里 Δ 是关于 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 的 Laplace-Beltrami 算子。根据 (6.3.8) 的讨论，因为指数 σ 是关于 (6.3.8) 的临界值，所以应把微分几何问题的特性用于解 (6.4.11)。实际上，我们要证明

(6.4.12) 设 $\int_{\mathfrak{M}^N} k(x)dV < 0$，那么 (6.4.11) 有定义在 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的严格正的光滑解 $u(x)$。于是 $\mathfrak{M}^N$ 可有一个按点一致等价于 g 的 Riemann 度量 $\tilde{g}$，$\tilde{g}$ 具有指定的纯量曲率 $g(x) < 0$。

证明：重复 (6.3.8) 中的证明，对任意小的 $\varepsilon > 0$，我们可以求出方程

$$(6.4.13) \qquad \frac{4(N-1)}{N-2}\Delta u - k(x)u + \lambda_\varepsilon|g(x)|u^{\sigma-\varepsilon} = 0$$

的一个正的光滑解 $(u_\varepsilon, \lambda_\varepsilon)$. 而且因为 λ_ε 是泛函

$$\mathfrak{A}(u) = \int_{\mathfrak{M}^N}\left\{\frac{2(N-1)}{N-2}|\nabla u|^2 + k(x)u^2\right\} dV$$

在 $W_{1,2}(\mathfrak{M}^N, g)$ 中函数上的条件极小(其约束条件为

$$\mathscr{B}_\varepsilon(u) = \int_{\mathfrak{M}^N}|g(x)|u^{\sigma+1-\varepsilon}dV = 1),$$

所以 $\lambda_\varepsilon < 0$. 这是因为,如果 c 是使 $\mathscr{B}_\varepsilon(c) = 1$ 的正常数, 那么 $\lambda_\varepsilon < \mathfrak{A}(c) = c^2\int_{\mathfrak{M}^N} k(x)dV < 0$.

下面证明,随着 $\varepsilon_n \to 0$,可以找到 $L_{(2N/(N-2))}(\mathfrak{M}^N, g)$中一个强收敛子序列 $\{u_{\varepsilon_n}\}$.为此, 我们首先证明 u_ε 一致有界.设在 x_0 达到 $M_\varepsilon = \max\limits_{\mathfrak{M}^N} u_\varepsilon$, 那么 $k(x_0)M_\varepsilon - \lambda_\varepsilon|g(x_0)|M_\varepsilon^{\sigma-\varepsilon} \leqslant 0$. 于是, 如果 $\lambda_0 = \inf\limits_{\mathscr{B}_0(u)=1} \mathfrak{A}(u)$, 就有

$$M_\varepsilon^{\sigma-\varepsilon-1} \leqslant \frac{\sup|k(x)|}{(-\lambda_\varepsilon)\inf|g(x)|} \leqslant -\frac{\sup|k(x)|}{\lambda_0\inf|g(x)|},$$

故 M_ε 一致有界, $|\Delta u_\varepsilon|$ 一致有界, 从而 u_ε 有一致收敛子序列, 用 u_0 记它的极限. 显然, 对 $\varepsilon = 0$, $u_0 \neq 0$ 满足 (6.4.11) 和 $u_0 \geqslant 0$. 下面证明: (i) 在 $\mathfrak{M}^N$ 上有 $u_0 > 0$, (ii) 可把 λ_0 选作-1. 显然从 Δ 的极大原则推出 (i). 因为在 $\mathfrak{M}^N$ 上 $u_0 \geqslant 0$, 所以如在 $\mathfrak{M}^N$ 的某点处有 $u_0 = 0$, 则在 $\mathfrak{M}^N$ 上 $u_0 \equiv 0$. 另一方面, (ii) 可由 $\sigma \neq 1$ 直接推出. 于是在 (6.4.11) 中我们可令 $u = kw$ (k 是正常数) 和取 $k^{\sigma-1}\lambda_\varepsilon = -1$. 从而 $u_0 \neq 0$ 在 $\mathfrak{M}^N$ 上处处满足方程(6.4.11).

附注:

指出下面一点是有意义的: 对于以任意的光滑正函数$g(x)$作为纯量曲率来说,定理 (6.4.12) 的类似结论不成立.

关于对称和等周问题的说明

在下面两个等周问题中, 我们用所谓泛函对称化过程来改进对等周问题的解的了解. 作为例子, 设D是 $\mathbb{R}^N$ 中以原点为心的球, 那么非负函数 $g(x)$ 的对称化(对于 0) 函数 $g_s(x)$ 只与$|x|$有

关，由 Lebesgue 测度理论的如下性质唯一确定，即对每个 $\alpha \geqslant 0$，

$$\mu(x|g_s(x) \geqslant \alpha) = \mu(x|g(x) \geqslant \alpha).$$

于是 $g_s(x)$ 是 x 的递降函数，如果 $g(x)$ 连续它也连续. 此外还可以证明，对任意的 C^1 泛函 $F(t)$，我们可以找它的一个对称化，保持 $F(g)$ 在 D 上的积分不变，而使 $F(|\nabla g|)$ 在 D 上的积分值减少. 于是，如果希望把 $\int_D |\nabla u|^2$ 在函数类 $u \in W_{1,2}(D)$，$\|u\|_{L_\sigma(D)} = 1$ 上极小化，我们可以先验地假定极小元 $\bar{u}(x)$(如果存在的话)取 $g_s(x)$ 的形式(对某个 $g \in W_{1,2}(D)$)，亦即 $u(x)$ 仅仅依赖于 $|x|$，且是 $|x|$ 的递减函数. 这样做就把变分问题化成了一维问题.

在下面的问题中，在 Sobolev 空间 $W_{1,2}(S^2, g_1)$ 的情形，我们用这个想法来改进 (1.4.6) 的估计. 更清楚些，设对 S^2 赋予了标准度量，其 Gauss 曲率为常数 1，我们希望确定使

$$(*) \qquad \sup_{\mathfrak{C}} \int_{S^2} e^{ku^2} < \infty$$

的最大常数 k，其中 $\mathfrak{C} = \{u | \int_{S^2} |\nabla u|^2 = 1, \int_{S^2} u = 0\}$. 假定球面 S^2 由参数坐标 (θ, ζ) 表示，其中 θ 记球面上的纬度，$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 对应于极点，ζ 记球面上的经度. 我们注意到问题中的积分与 ζ 无关. 于是对称化方法验明 (*) 的极大点 $\bar{u}$ 与 ζ 无关的假定是合理的，用这个方法可以证明常数 $k = 4\pi$. 但是，如果对约束 $\mathfrak{C}$ 加上额外的条件：在 S^2 上 $u(x) = u(-x)$，问题中的常数可以增加到 8π (看 Moser，1973a).

在第二个问题中(6.4D 一节讨论的)，我们假定 $\Pi(a,b)$ 是(x, y)平面的一个区域，关于直线 $y = 0$ 对称. 那么，非负函数 g 关于直线 $y = 0$ 的 Steiner 对称化的概念是有用的. $g_s(x, y)$ 由两个性质定义：对于固定的 x，$g_s(x, y)$ 只和 y^2 有关，以及(对于 Lebesgue 测度)，

$$\mu\{y|f(x, y) \geqslant \alpha\} = \mu\{y|f_s(x, y) \geqslant \alpha\}.$$

Steiner 对称化保持 $F(f)$ 在 $\Pi(a, b)$ 上的积分不变，同时$F(|\nabla f|)$

在 $\Pi(a, b)$ 上的积分减小．在用有界域上类似的等周问题的解逼近某些无界区域上的等周问题时，我们要用到这些性质．

6.4D S^2 上指定 Gauss 曲率的保角度量

作为 (6.3.20) 的应用，我们考虑如下微分几何问题：

(Π) 设 (S^2, g_1) 记 $\mathbf{R}^3$ 中的二维(单位)球面，具常值 Gauss 曲率 1 的标准度量．在 S^2 上给出一个 C^∞ 函数 $K(x)$，要在 S^2 上找一个度量 g，它（按点）保形等价于 g_1，同时具有指定的 Gauss 曲率 $K(x)$（于是有某个 C^∞ 函数 u，$g = e^{2u}g_1$）．

为解决问题 (Π)，我们首先注意到，如果 $g = e^{2u}g_1$ 是所要求的度量，那么由 Gauss-Bonnet 定理推出

$$\int_{S^2} K(x)e^{2u}dV = 4\pi. \tag{6.4.14}$$

于是，如果 $\sup\limits_{S^2} K(x) \leqslant 0$，那么这样的度量 g 不存在．

为解问题 (Π)，我们写出映射函数 u 的半线性椭圆型偏微分方程，并假定 $K(x) = K(-x)$，再用 (6.3.14) 证明 (6.4.14) 是这个方程有解的必要且充分条件．这里有解是指存在某个 C^∞ 函数 u，满足 (6.4.9)．在 1.1 节曾讨论过确定映射函数 u 的偏微分方程可以写成

$$\Delta u - 1 + K(x)e^{2u} = 0, \tag{6.4.15}$$

其中 Δ 是关于 (S^2, g_1) 的 Laplace-Beltrami 算子．请注意这时并不需要图 6.1 中描述的保形映射的一般概念．我们证明

(6.4.16) **定理** 设 $K(x)$ 是 (S^2, g_1) 上的 Hölder 连续函数，$K(x) = K(-x)$．那么 (6.4.15) 在 S^2 上有解的必要充分条件是存在函数 $u \in W_{1,2}(S^2, g_1)$ 使 (6.4.14) 成立．于是任何一个这样的函数 $K(x)$，必是相对于某个度量 g 的 Gauss 曲率，其中 g 按点保形于 (S^2, g_1)．此外，存在 S^2 上的光滑函数 $K(x)$，$\max\limits_{S^2} K(x) > 0$，但 (6.4.15) 不可解．

证明：我们指出，解 (6.4.15) 的困难在于，任何解 u 都是泛函

(6.4.17) $$\varphi(u)=\int_{S^2}\left\{\frac{1}{2}|\nabla u|^2+u-\frac{1}{2}Ke^{2u}\right\}dV$$

的鞍点。于是自然想去讨论和(6.4.15)相应的半线性梯度算子方程(在 Hilbert 空间 $W_{1,2}(S^2, g_1)$ 上)。和通常一样，令

$$(Lu, v)=\int_{S^2}\nabla u\cdot\nabla v$$

和

$$(\mathfrak{N}'(u), v)=-\int_{S^2}K(x)e^{2u}v.$$

用 2.5 节的结果，我们得到 $L+\mathfrak{N}'$ 是一个半线性梯度算子，它映 $W_{1,2}(S^2, g_1)$ 到自身。此外，因为 $K(x)=K(-x)$，$L+\mathfrak{N}'$ 映 $W_{1,2}(S^2, g_1)$ 的子空间 $H=\{u|u\in W_{1,2}(S^2, g_1), u(x)=u(-x)\}$ 到自身。算子 L 在 H 上非负，有由常值函数组成的一维核。如果令 $(f, v)=-\int_{S^2}1\cdot v dV$，则偏微分方程(6.4.15)的解一一对应于半线性算子方程 $Lu+\mathfrak{N}'(u)=f$ 的解。这个方法的优点在于可以援引定理(6.3.20)。事实上，那里叙述的可解性准则说，

$$\mathfrak{M}=\{u|(\mathfrak{N}'(u)-f)\perp \mathrm{Ker}L\}\neq\emptyset$$

等价于存在函数 $u\in H$ 满足上面的方程(6.4.14)。因而据(6.3.20)，我们只需验证 (a) $L+\mathfrak{N}''(u)$ (对 $u\in\mathfrak{M}$) 在 $\mathrm{Ker}L$ 上负定；(b) $\varphi(u)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上强制。(a) 的验证不难，对 $u\in\mathfrak{M}$ 和常数 c，

$$\mathfrak{N}(u_0+c)=-e^{2c}\int K(x)e^{2u_0}<0,$$

于是 $(d^2/dc^2)\mathfrak{N}(u_0+c)<0$。

但是 (b) 的验证比较困难，可这样进行。对 $u\in\mathfrak{M}$，写 $u=u_0+\bar{u}$，其中 $\bar{u}$ 是 u 在 (S^2, g_1) 上的平均值，$\int u_0=0$。因为 $\int K(x)e^{2u}=4\pi$，我们得到

(6.4.18) $$2\bar{u}=\log 4\pi-\log\int K(x)e^{2u_0}.$$

于是对 $u\in\mathfrak{M}$，由(6.4.18)推出

$$\varphi(u)=\int_{S^2}\frac{1}{2}|\nabla u_0|^2+4\pi\bar{u}-2\pi$$

$$\geqslant 常数 + \frac{1}{2}\int|\nabla u_1|^2 - 2\pi\log\int K(x)e^{2u_0}.$$

令 $u_0 = v\|u_0\|$，其中 $\|v\| = 1$，$\|u\| = \int_{S^2}|\nabla u|^2$．注意到对一切 $\varepsilon > 0$，有 $2u_0 \leqslant (1/\varepsilon)\|u_0\|^2 + \varepsilon v^2$，就可得到

(6.4.19) $$\varphi(u) \geqslant 常数 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2\pi}{\varepsilon}\right)\|u_0\|^2 - 2\pi\log\int_{S^2}K(x)e^{\varepsilon v^2}.$$

其次，引用 Moser 的一个不等式，在关于对称化的附注中曾引用过它，推出

$$\sup_{\|v\|=1}\int_{S^2}e^{8\pi v^2} < \infty，对一切 v \in H，\int_{S^2}v = 0，$$

因而，如在 (6.4.19) 中取 $\varepsilon = 8\pi$ 就得到，当 $\|u_0\| \to \infty$ 时 $\varphi(u) \to \infty$．根据 (6.4.19)，对 $u \in \mathfrak{M}$，只要 $\|u\| \to \infty$ 就有 $\varphi(u) \to \infty$．(6.4.16) 的第一部分得证．

为得出定理的第二部分，我们给出一个简短的论证，它可以由读者自行补足．设 u 满足 (6.4.15)，那么用 ∇u 相乘并在 S^2 上积分，就有

$$\int_{S^2}\left\{\frac{1}{2}\nabla u(|\nabla u|^2) - \nabla u + K(x)e^{2u}\nabla u\right\}dV = 0.$$

用这样一个事实：当在 S^2 上积分时，括号中的前两项为 0，分部积分后得出

(6.4.20) $$0 = \int_{S^2}K(x)e^{2u}\nabla u = \int_{S^2}K(x)\nabla(e^{2u}) = \int_{S^2}(\nabla K(x))e^{2u}.$$

于是，例如 $K(x) = 2 + \sin\theta$ 是 S^2 上的正函数，但不满足 (6.4.20)，从而对它来讲，(6.4.15) 不可解．

6.4E 一个全局性自由边界问题——理想流体中的持久稳态旋涡环

在第一章曾简单讨论了稳态旋涡环的概念．现在证明这种轴

对称旋涡环族的存在性，它们以常速持久地在一个理想流体中运动。这方面有两个有趣的例子：(a) 具"无限小"横截面的"奇异"旋涡环，这在 Helmholtz 1857 年开创性的文章中曾讨论过；(b) Hill 旋涡环，其中旋涡由一个固体球面支撑。这些例子代表了极端的情形。现在介绍一个全局性的存在理论，它在这两种极端情形间插入一个旋涡环(看图 1.1)。所给证明基于把旋涡环刻画作一个等周变分问题的解，使得环的横截面的大小没有先验的限制。此外，这里所用的方法可以用于很多其它自由边界问题，譬如 4.1 节中提到的旋转流体平衡状态的经典问题。

(i) 控制方程 我们由导出 ψ 的半线性椭圆偏微分方程(参看 (1.1.17)) 开始，ψ 是 $\boldsymbol{V}$ 的"Stokes 流函数"，$\boldsymbol{V}$ 是旋涡环相应的速度场。取轴固定在环中，假定理想流体充满空间 $\mathbf{R}^3$，且由标面坐标表示：$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(r,z)$。那么，因为 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}=0$，存在向量 $\boldsymbol{W}=(0,\psi/r,0)$ 使 $\boldsymbol{V}=\operatorname{curl}\boldsymbol{W}$*)。于是旋度 $\omega=\operatorname{curl}\boldsymbol{V}$ 满足方程

$$\omega=\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{W}=\Delta(0,\psi/r,0), \tag{6.4.21}$$

其中 Δ 记关于柱面坐标的 Laplace 算子。另一方面，由 Stokes 有趣的观察，借助于涡度方程

$$\omega=\lambda r^{\prime}f(\psi), \tag{6.4.22}$$

运动的 Euler 方程成立。(6.4.22) 表示这样一个事实：在每个流曲面上 ω/r 是常数。这里 f 是指定的函数，它描述了旋涡在环内的分布，λ 是一个正常数，它度量旋涡环内旋涡强度实际的大小。于是，如果假定 A 是在子午面内的旋涡环的横截面(看图 6.2)($\theta=$常数)，而 Π 记半平面 $\{(r,z)|r>0\}$，就可求出 ψ 应该满足

$$\psi_{rr}-\frac{1}{r}\psi_r+\psi_{zz}=\begin{cases}-\lambda r^{\prime}f(x), & \text{在 } A \text{ 中},\\ 0, & \text{在 } \Pi-\bar{A} \text{ 中}.\end{cases} \tag{6.4.23}$$

在旋涡环的未知边界 ∂A 上，假定 (i) $\operatorname{grad}\psi$ 连续，(ii) $\psi=0$；

*) curl 即旋度，也常写作 rot——译者注。

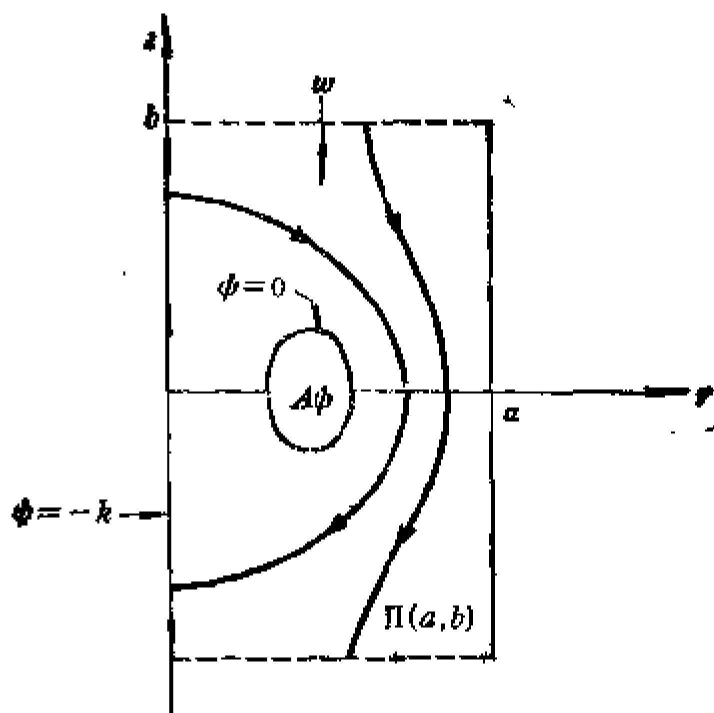


图 6.2 对稳态旋涡环设想的流线模式及记号.

同时在对称轴 $r=0$ 上令 $\phi=-k\leqslant 0$，其中 k 是指定的流量常数. 最后，设环的速度场在无穷远处趋于常向量 $(0, W, 0)$. 这可由要求(6.4.24) 当 $r^2+z^2\to\infty$ 时，$\phi+\frac{1}{2}Wr^2+k\to 0$ 做到.

(ii) 变形 (i) 中所述的自由边值问题是难于处理的，一来区域 A 未知，二来因为 (6.4.23) 非线性. 为分离这些困难，我们把问题变形为 Π 上的半线性 Dirichlet 问题，对未知区域 A 它不麻烦. 为此，令 $f(t)=0\ (t\leqslant 0)$，把函数 $f(t)$ 延拓到整个实数轴，同时令

$$\Psi=\phi-\frac{1}{2}Wr^2-k.$$

那么，可以由解下面的问题得到所要的旋涡环.

(6.4.25) $\phi_{rr}-\frac{1}{r}\phi_r+\phi_{zz}-\lambda r^2 f(\phi-\frac{1}{2}Wr^2-k)=0$，在 Π 上，

(6.4.26) $\phi|_{\partial\Pi}=0.$

由二阶线性椭圆型方程的极大值原则推出，在 (6.4.25)(6.4.26) 的解中令

(6.4.27) $$A_\psi = \{(r, z) \mid \psi(r, z) > \frac{1}{2} W r^2 - k\},$$

可以得到旋涡环的横截面 A. 这个变形要求我们求方程组(6.4.25)—(6.4.26)在无界区域 Π 上的非平凡解. 此外，除非当 $s \to 0$ 时 $f(s) \to 0$，该方程组还有一个复杂情况：延拓后的函数 $f(s)$ 在 $s = 0$ 点也许不连续. 所幸的是，这两个困难都可以用极限论证来克服[1]：区域 Π 可以用大的矩形 $\Pi(a,b)$ 来逼近，其顶点分别为 $(a, \pm b)$, $(0, \pm b)$, a, b 是很大的正数. 在 $s = 0$ 间断的函数 $f(s)$ 不难用 Lipschitz 连续函数来逼近，于是只需把 Π 换成 $\Pi(a,b)$，假定 f Lipschitz 连续，解方程组(6.4.25)—(6.4.26)，然后讨论集合 A_ψ.

(iii) $\Pi(a,b)$ 上问题(6.4.25)—(6.4.26)的解 我们由把方程组(6.4.25)—(6.4.26)看作一个适当的 Hilbert 空间 H 上的梯度算子方程开始. 这里可以方便地把空间 H 选成 $C_0^\infty(\Pi(a,b))$ 对于内积

$$(u, v) = \iint_{\Pi(a,b)} \left(\frac{1}{r^2}\right)(u_r v_r + u_z v_z) d\tau$$

的闭包，其中 $d\tau = r dr dz$. 对于这个内积，调整了的方程(6.4.25)的适当的广义解可以方便地写成

$$(u, \phi) = \lambda \iint_{\Pi(a,b)} f(\Psi) \phi d\tau, \quad 对一切\ \phi \in H.$$

现在我们可以对 $D = \Pi(a, b)$ 证明如下的

(6.4.28) 定理 设 $f(t)$ 是定义在 $[0, \infty)$ 上的 Lipschitz 连续函数，非降，$f(0) = 0$，具多项式增长速度. 令 $F(s) = \int_0^s f(t) dt$. 那么对一切 $k \geq 0$，方程组(6.4.25)在 $\Pi(a,b)$ 上有光滑解 $\psi(a,b)$. 此外，$\psi(a, b)$ 有如下性质：它是 z 的偶函数，在 $\Pi(a, b)$ 中严格正，是泛函

---

1) 有兴趣的读者可在 Fraenkel 和 Berger (1974)中找到这些极限论证的详尽讨论. D. Kinderlehrer 最近论证了自由边界的光滑性.

$$J(u)=\int_{\Pi(a,b)} F\left(u-\frac{1}{2} W r^{2}-k\right) r d r d z$$

在 $\|u\|_H=1$ 上的极值。如果 $f\in C^1$ 且凸，那么集 A_ψ 单连通。

证明：首先指出，Hilbert 空间 H 可以连续嵌入标准的 Sobolev 空间 $\mathring{W}_{1,2}(\Pi(a,b))$，使得无论对 H 或对 $\mathring{W}_{1,2}(\Pi(a,b))$，1.4 节的嵌入定理都可以用得同样好。为此只需注意到，对 $u\in H$（因 $r\leqslant a$），

$$\|u\|_{1,2}^2=\int_{\Pi(a,b)}(u_r^2+u_z^2)drdz$$
$$\leqslant\int_{\Pi(a,b)}\frac{a}{r^2}(u_r^2+u_z^2)rdrdz\leqslant a\|u\|_H^2.$$

下面证明所希望的解 $\phi(a,b)$ 的存在性，以及它基于 (6.3.7) 的等周特性。首先，必须指出

(6.4.29) $$\beta=\sup_{\|u\|_H=1}\int F\left(u-\frac{1}{2}Wr^2-k\right)rdrdz>0.$$

对于类似的一维问题此式不成立。因为 $F(t)$ 严格递增，只需注意到 H 中范数很小的函数在一个小集合上可以有任意大的值，例如，给定一点 $x_0\in\Pi(a,b)$，对充分大的某些 β 值，函数

$$v_\beta(x)=\begin{cases}0, & \text{对 } |x-x_0|\geqslant\delta,\\ \beta\log\left(1-\log\dfrac{\delta}{|x-x_0|}\right), & \text{对 } |x-x_0|<\delta,\end{cases}$$

有 $\|v_\beta(x)\|=1$。但当 $|x-x_0|\to 0$ 时，其值趋于 ∞。由 Sobolev 嵌入定理以及 $f(u)$ 按多项式增长的条件，显然 $J(u)$ 对 H 中的弱收敛连续。事实上，

$$H\subset\mathring{W}_{1,2}(\Pi(a,b))\subset L_p(\Pi(a,b))\subset L_p(\Pi(a,b),\tau),$$

其中 $L_p(D,\tau)$ 记 $\Pi(a,b)$ 上的 L_p 泛函，其体积元 $d\tau=rdrdz$。(6.3.1) 的论证指出，可由某个元素 $\phi\in H$ 达到 β。此外，因为 ϕ 的非负部分 ϕ_+ 有性质 $J(\phi_+)=J(\phi)$，所以在 $\Pi(a,b)$ 中 $\phi\geqslant 0$。同时，如果在某个正测度集上 $\phi<0$，那么 $\|\phi_+\|<\|\phi\|$。于是 ϕ_+ 是所希望的极值元素。根据 (3.1.31)，必存在常数 μ_1 和 μ_2（不同

时为 0)，使对一切 $w \in H$.

(6.4.30) $$\mu_1(\phi, w) = \mu_2 \int_{\Pi(a,b)} f(\phi) w.$$

为证 $\mu_1 \neq 0$ 和 $\lambda = \mu_2/\mu_1 > 0$，只需在 (6.4.30) 中令 $w = \phi$，并注意到 (6.4.30) 左端的积分为正。因为 $F(t) \leqslant tf(t)$，对 $\phi(x) > 0$，$0 < \Psi(x) < \phi(x)$，我们有

$$\int_{\Pi(a,b)} \phi f(\phi) > \int_{\Pi(a,b)} \Psi f(\Psi) \geqslant \int_{\Pi(a,b)} F(\Psi) = \beta > 0.$$

从对 $\Pi(a,b)$ 中直线 $z = 0$ 的 Steiner 对称化推出 $\phi(a,b)$ 是 z 的偶函数。尽管方程的系数在 $r = 0$ 有明显的奇异性，还是从标准的正则性理论推出 $\Pi(a, b)$ 时的解的正则性。

为证明定理的余下部份，我们证明，当假定 f 凸时，由(6.4.27)定义的集合 A_ϕ 单连通。为此考虑 (3.1.40) 的第二变分公式，对满足 $(v, \phi) = 0$ 的任意的 v，

$$\delta^2 J(\phi, v) = \int_{\Pi(a,b)} v^2 f'(\Psi) d\tau - \frac{1}{\lambda} \|v\|^2.$$

假定 A_ϕ 至少有两个分支 E_1 和 E_2，设函数 w_1 和 w_2 定义如下：在 $E_i (i = 1, 2)$ 上 $w_i = \Psi_i$，在其余部分为 0。那么，如果 $v = c_1 w_1 + c_2 w_2$，其中 c_1，c_2 选得使 $c_1 \|w_1\|^2 = -c_2 \|w_2\|^2$，我们得到

$$\delta^2 J(\phi, v) = \sum_{i=1}^{2} c_i^2 \int_{E_i} \Psi\{\Psi f'(\Psi) - f(\Psi)\}.$$

由 f 的凸性，上式大于 0。此与 (6.4.29) 相矛盾。

(iv) $\Pi(a,b) \to \Pi$ 的极限过程 现在证明，把极限过程用到对 $\Pi(a, b)$ 的结果 (iii)，就可以解决对 Π 的问题 (6.4.25)—(6.4.26)。为此，令 $(a, b) \to \infty$，让矩形 $\Pi(a, b)$ 趋于半平面 Π。那么 (iii) 的结果产生解 $(\phi(a, b), \lambda(a, b))$，其中 $\lambda(a, b)$ 包含在实数的一个有界集内(关于零一致有界)，这个解是定理 (6.4.28) 中修改了的问题的解。找 $H(\Pi) = \mathring{W}_{1,2}(\Pi)$ 中的弱收敛子序列 $\phi_n = \phi(a_n, b_n)$，它由在 $\Pi(a_n, b_n)$ 外令 $\phi(a_n, b_n) \equiv 0$ 而得到。相应的收敛的特征值序列为 $\lambda(a_n, b_n) = \lambda_n$。为此，我们证明存在一个固定的区域 Ω，使得无论 a，b 多么大，相应的旋涡核心 $A(\phi(a, b)) \subset \Omega$，这个区域 Ω 有性质：当 $|x| \to \infty$ 时，$\mathrm{Vol}[\Omega \cap \{y \mid |x - y| < 1\}] \to 0$，从而嵌入 $H(\Omega) \to$

$L_1(\Omega)$ 紧，于是可以在积分方程

$$\lambda(a,b)\int_{A(\Pi(a,b))} G_{a,b}f(\psi(a,b)) = \psi(a,b) \tag{6.4.31}$$

中取极限，其中 $G_{a,b}(x,y)$ 是(6.4.25)的线性算子在 $\Pi(a,b)$ 上的 Green 函数.

为找出区域 Ω，我们首先证明，(6.4.25)—(6.4.26)在 $\Pi(a,b)$ 上的解有如下的先验的界：

引理：设 $l(u)$ 是集合 $A(u)=\left\{(r,z)\mid(r,z)\in\Pi(a,b),u(r,z)>\frac{1}{2}r^2+k\right\}$ 在 z 轴上投影的长度，其中 $u\in C^1(\Pi(a,b))$，以及

$$Y(u)=\{(r,z)\mid(\rho,z)\in A(u),\ \rho\geqslant r>0\},$$

即 $Y(u)$ 是 $\Pi(a,b)$ 中的集合，它包含 $A(u)$ 以及 $\Pi(a,b)$ 中所有那些点，这些点位于 $A(u)$ 的某个点 (ρ,z) 和 z 轴之间. 那么

$$\iint_{Y(u)} r\,dr\,dz + 2kl(u) \leqslant \|H\|^2_{H(a,b)}. \tag{6.4.32}$$

证明：令 $\frac{1}{2}r^2=y$，假定 $Y(u)$ 的边界光滑，于是可用散度定理. 用散度定理，经过简单的计算可知

$$\|u\|^2_{H(\Pi(a,b))}\geqslant\iint_{Y(u)}(u_y^2)\geqslant\iint_{Y(u)}(u_y^2-(u_y-1)^2)$$

$$\geqslant\iint_{Y(u)}(2u_y-1)=\oint_{Y(u)}2u-\iint_{Y(u)}r\,dr\,dz.$$

因为在 z 轴上 $u=0$，在 $\partial A(u)$ 上 $u=y+k$，从最后这些不等式导出所要的界(6.4.32).

把刚才得到的引理用到 $u=\psi(a,b)$，得知可以把集合 Ω 选作 $\Omega=\{(r,z)\mid|z|<(r^2+4k)^{-1}\}$. 事实上，因为 $\|\psi(a,b)\|_H=1$，根据 Steiner 对称化，$A(\psi)$ 在 z 轴上的投影应该包含一个区间，其形若 $I_R=(-h(R),h(R))$，使开矩形 $(0,r)\times I_r$ 包含于 $Y(u)$ 之中. 然后再用(6.4.32)并注意到 $2h(r)\leqslant l(\psi)$，就得出 $\frac{1}{2}r^2(2h(r))+(2k)(2h(r))<1$，因而 $h(r)<(r^2+4k)^{-1}$. 于是如前所述，我们可以找到 $H(\Pi)$ 中一个弱收敛子序列 (ψ_n,λ_n)，在(6.4.25)中取极限，弱极限 (ψ,λ) 就是所要的非平凡解.

(v) 历史资料 1858 年 Helmholtz 把截面很小的旋涡环看作他的理论的两个例子之一. 在 Helmholtz 关于旋涡不可破坏性

结果的基础上，以及把“以太”作为适当的理想流体，Kelvin 给旋涡环奠定了原始的原子论的基础. Kelvin 推测存在非轴对称的旋涡环，它的“核心”可能和 $\mathbf{R}^3$ 中变稠的结的结构有关（这和 $\mathbf{R}^3$ 中结的拓扑结构不同，后者是自然中各种原子结构的分类）. 事实上，在这个基础上，Kelvin 的合作者 Tait 导出了结的数学理论的先驱性工作. Kelvin 的理论拒绝放弃“以太”的概念. 不过，在现代低温物理中，在超流理论和超导理论中，因为和理想流体非常接近，旋涡环的重要性再次十分引人注目.

6.5 Hilbert 空间中的 M. Morse 临界点理论

为研究定义在 Hilbert 空间 H 上的泛函 $\varphi(u)$ 所有的临界点，必须从拓扑上进行考虑以补充我们早先的讨论. 关于这点，不论是有限维或是无穷维的情形，在 M. Morse 从 1925 年开始的研究中就已经明确了. 为说明这点我们注意，对线性自共轭紧算子 $C\in B(H,H)$ 来说，一旦建立了类似于 (1.3.40(i)) 的结果，利用正交的概念可以发展一个完整的谱理论. 此外，从线性算子的叠加原理推出，对于自共轭 Fredholm 算子 L，算子方程 $Lu=f$ 的解充满 H 的某有限维线性流形. 对非线性的情形，为得到类似的结果，必须采用全新的思想. 这一节，我们在 Hilbert 空间这种较简单的情形介绍研究这个问题的 Morse 方法，在6.6节，再叙述有关的 Ljusternik-Schnirelmann 理论，6.7 节则介绍这些理论在各种情形的应用.

6.5A 最速下降法的改进

对临界点的任何一种一般研究都必须用上更精细的分析和拓扑的考虑以补充下半弱连续和强制的概念. 为此，我们再次考虑 3.2 节中引进的最速下降法. 设 $F(x)$ 是定义在实 Hilbert 空间上的 C^2 光滑泛函，在 H 上有下界，那么，在 3.2 节中已经证明对一切 $t\geqslant 0$，初值问题

(6.5.1) $$\frac{dx}{dt}=-F'(x),\quad x(0,x_0)=x_0$$

有解 $x(t, x_0)$，且当 $t\to\infty$ 时，$\lim x(t, x_0)$ 是 $F(x)$ 的临界点，只要 $F(x)$ 的临界点是孤立的，以及 $F(x)$ 满足如下的紧性条件(前面在(6.1.1′)中提到过)

(6.5.2) **条件 (C)** 设 $\{x_n\}$ 是 H 中任一序列，只要 $|F(x_n)|$ 有界且 $\|F'(x_n)\|\to 0$，则 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列。

(6.1.1′) 指出，在条件 (6.5.2) 下，$F(x)$ 达到它在 H 上的下确界。下面的结果指出了 (6.5.2) 对研究其它类型临界点的应用。

(6.5.3) **定理** 设定义在 H 上的 C^2 泛函 $F(x)$ 有下界，满足(6.5.2)，只有孤立的临界点。再设 $F(x)$ 有两个孤立的相对极小点 y_1，y_2，那么泛函 $F(x)$ 必有第三个临界点 y_3，和 y_1，y_2 不同，它不是孤立的相对极小点。

证明：设 $F(x)$ 没有第三个临界点，那么我们证明 H 可以被表成两个不交开子集 U_1 和 U_2 之并，这显然和 H 的连通性相矛盾。为构造 U_i，设 $x(t, x_0)$ 是 (6.5.1) 的解。根据 (6.5.2)，对所有的 $t\geqslant 0$，$x(t, x_0)$ 存在，且当 $t\to\infty$ 时，$\lim x(t, x_0)$ 必为 y_1，y_2 中一个点。令 $U_i=\{x_0|\lim\limits_{t\to\infty}x(t, x_0)=y_i\}(i=1,2)$。显然 $H=U_1\cup U_2$，同时 U_1 和 U_2 非空不交。为证 U_i 是 H 中开集，我们首先指出，每个 y_i（它是严格相对极小点）都有一个邻域 W_i，使得对任何解 $x(t, x_0)$，只要一进入 W_i 中就得永远留在 W_i 内，而且当 $t\to\infty$ 时，它还收敛到 y_i。的确，对与 y_i 充分邻近的 x_0，因为 $F(x(t, x_0))$ 是 t 的递减函数，所以 $x(t, x_0)\to y_i$。于是根据 $x(t, x_0)$ 对初始条件 x_0 的连续性，如果 $z_0\in U_i$，那么对充分小的 $\varepsilon>0$，$\|z_0-\tilde{z}_0\|<\varepsilon$，必存在 T 使 $x(T, z_0)$ 和 $x(T, \tilde{z}_0)$ 两者都在 W_i 之中。于是，如果 $z_0\in U_i$，则 $\tilde{z}_0$ 也是。因而每个 U_i 都是开集，这样就得出了所要的矛盾。

上面证明了第三个临界点 y_3 的存在性，y_3 不可能是另外的相对极小点的证明可直接得出。如果它是而且 $F(x)$ 没有另外的临界点，仿照刚才给出的论证又导致矛盾。

6.5B 退化和非退化临界点

设 $F(x)$ 是定义在 H 上的 C^2 泛函，为对 $F(x)$ 的临界点进行深入的研究，下面的定义是方便的．设 x_0 是一个临界点，如果自共轭算子 $F''(x_0)$ 有逆，则称 x_0 为**非退化**临界点，反之则称 x_0 是**退化**的．$(F''(x_0)x, x)$ 在其上负定的子空间的最大维数称作 $F(x)$ 的临界点 x_0 的**指数**．如果 $F'(x)$ 是 Fredholm 算子，则称 $F(x)$ 是 Fredholm 泛函．

$F(x)$ 的非退化临界点有一些重要的性质．首先，由反函数定理(3.1.5)，$F(x)$ 的非退化临界点是孤立的．其次，在所有定义在 H 的一个**有界**集上的 C^2 Fredholm 泛函 $F(x)$ 的集合中，临界点全为非退化的泛函构成一个稠密子集．事实上，如果 $G(x)$ 是一个 Fredholm 泛函，它的某些临界点退化，考虑泛函 $G_p(x) = G(x) - (x, p)$．显然，只要 $\|p\|$ 充分小，$\|G_p(x) - G(x)\|_{C^2}$ 可以任意小．另一方面，只要 p 不是 $G'(x)$ 的奇异值，$G_p(x)$ 所有的临界点都是非退化的．因为 $G'(x)$ 是一个零指标的 C^1 Fredholm 算子，由(3.1.45)，此奇异值集在 H 中无处稠密．其次，如果 C^2 泛函 $F(x)$ 在 $F^{-1}[a, b]$ 上所有的临界点都是非退化的，且 $F(x)$ 满足 (6.5.2) 的条件 (C)，那么对任何 $-\infty < a < b < \infty$，$F(x)$ 在 $F^{-1}[a, b]$ 上至多有有限个临界点．否则，将有序列 $\{x_n\}$，$a \leqslant F(x_n) \leqslant b$，$\|F'(x_n)\| = 0$，使 $\{x_n\}$ 有收敛子列，记其极限为 $\bar{x}$．显然 $\bar{x} \in F^{-1}[a, b]$ 既是 $F(x)$ 的非孤立的临界点，又是非退化的临界点，这是一个矛盾．

另外一个有意思的结果是 Morse 引理 (1.6.11) 在 Hilbert 空间的如下推广．

(6.5.4) 定理 设 $F(x)$ 是定义在非退化临界点 $x = 0$ 的邻域上的 C^3 泛函，那么必存在一个微分同胚 h，h 映 $x = 0$ 的邻域 U 到自身，且对一切 $x \in U$，有

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2}(F''(0)h(x), h(x)).$$

证明： 因为 $x = 0$ 是临界点，我们有

$$F(x)-F(0)=\int_0^1 (F'(sx),x)ds,$$

同时

$$F'(x)=\int_0^1 \frac{d}{dt}F'(tx)dt=\int_0^1 F''(tx)x\,dt.$$

于是可用 F'' 表示 $F(x)$:

$$F(x)-F(0)=\int_0^1\int_0^1 s(F''(tsx)x,x)dt\,ds=(k(x)x,x),$$

其中 $k(x)$ 是定义为

$$(k(x)y,z)=\int_0^1\int_0^1 s(F''(stx)y,z)dt\,ds$$

的自共轭算子. 显然,在这样的定义下,

$$\frac{1}{2}(F''(0)x,x)=(k(0)x,x).$$

令 $B(x)=[k(0)]^{-1}k(x)$ 和 $C(x)=\sqrt{B(x)}$. 因为 $B(0)=I$ (恒等算子),所以对充分小的 $\|x\|$, $C(x)$ 有意义. 还注意到,如果用 $C^T(x)$ 记 $C(x)$ 的共轭算子,那么因为 $B^T(x)k(0)=k(0)B(x)$, 故有 $C^T(x)k(0)=k(0)C(x)$, 以及

$$[k^{-1}(0)C^T(x)k(0)]^2=k(0)^{-1}B^T(x)k(0)=B(x)=C^2(x).$$

于是从下面的简单计算就得到所要的结果,

$$\begin{aligned}F(x)-F(0)&=(k(x)x,x)=(k(0)C^2(x)x,x)\\&=(C^T(x)k(0)C(x)x,x)=(k(0)h(x),h(x))\\&=\frac{1}{2}(F''(0)h(x),h(x)),\end{aligned}$$

其中 $h(x)=C(x)x$, 对充分小的 $\|x\|$, $h(x)$ 有逆.

这个结果有一个直接的推论. 在非退化临界点 $x=0$ 附近,经过局部可微坐标变换 $y=Y(x)$, 泛函 $F(x)$ 可以写成

$$\begin{aligned}F(x)-F(0)&=F(Y^{-1}(y))-F(0)\\&=\|(I-P)y\|^2-\|Py\|^2,\end{aligned}$$

其中 P 是 H 到 H 的线性子空间上的投影, $F''(0)$ 在该子空间上负

定。

其次注意到，和有限维时完全一样，当把 Hilbert 空间H换成无穷维流形 $\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ 局部近似于 H) 时，我们的讨论仍然适用. 对于很多微分几何的问题来说，这个事实很有用（请看本章末的注记）. 更明确些，我们给出如下定义.

定义 一个模于 Hilbert 空间X的 C^r 流形 $\mathfrak{M}$ (即 Hilbert 流形)是 $\mathfrak{M}$ 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和映射族 $\theta_\alpha: U_\alpha \to X$, 使得

(i) $\theta_\alpha: U_\alpha \to \theta_\alpha(U_\alpha)$ 是同胚映射；

(ii) $\theta_\alpha\theta_\beta^{-1}: \theta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \theta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是一个 C^r 类光滑映射.

定义 集 $\mathfrak{M}$ 的一个 C^r 图册是 $\mathfrak{M}$ 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 和转移映射 $\zeta_\alpha: U_\alpha \to X$, 使得

(i) ζ_α 是从 U_α 到 $\zeta_\alpha(U_\alpha)$ 上的同胚，$\zeta_\alpha(U_\alpha)$ 是 Hilbert 空间 X的开子集；

(ii) 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ 时，映射是相容的，即对一切 α, β, $\zeta_\alpha\zeta_\beta^{-1}: \zeta_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \zeta_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ 是 C^r 同胚；

(iii) 对性质 (i) 和 (ii) 来说，族 (U_α, ζ_α) 是最大的.

一个模于 Banach 空间 X 的C^r Banach 流形是一个定义在集合$\mathfrak{M}$上的相对于 Banach 空间 X 的C^r图册，$\{(U_\alpha, \zeta_\alpha)\}$的成员称作图.

借助于这个定义，空间间映射 f 通过导映射定义的多数性质都可以推广到 Banach 流形间的映射上去. 例如

定义 设 $f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 是定义在流形 $\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{N}$ 间的映射，当 f 连续，并且对每点 $x \in \mathfrak{M}$ 和 $f(x) \in \mathfrak{N}$ 的图来说，f 是 C^p 的，即是说 $\zeta_\alpha f \theta_\beta^{-1}$ 是 Banach 空间 $X_{\mathfrak{M}}$ 和 $X_{\mathfrak{N}}$ 间的一个 C^p 光滑映射，则称 f 是 C^p 类的.

这些定义使我们能够把第三章中的很多局部分析用于研究 Hilbert 流形间的映射. 特别，Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 在 $x \in \mathfrak{M}$ 的切空间 $T\mathfrak{M}_x$ 是 $\mathfrak{M}$ 的所有在 $t=0$ 处通过 x_0 的 C^1 曲线 $p(t)$ 的切向量 $\{p'(0)\}$ 的集合. 此外两个 Hilbert 流形间的映射 $f: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ 的微分是映射 $df(x): T\mathfrak{M}_x \to T\mathfrak{M}_{f(x)}$, 定义为：对一切曲线 $p(t)$,

$$df(x)(p'(0)) = \frac{d}{dt} f(p(t))|_{t=0}.$$

它对变元 $p'(0)$ 线性. 对定义在 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 上的光滑泛函 $\varphi(x)$ 来说,微分 $d\varphi(x, p'(0))$ 对变元 $p'(0)$ 线性,于是根据线性泛函的 Riesz 表现定理,可记

$$d\varphi(x, y) = (\mathrm{grad}\varphi(x), y).$$

而且,用关于 x 和 $f(x)$ 的图的术语,微分 $df(p'(0))$ 可以作为映射的导映射来计算. 于是定义在 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 上的泛函 $\varphi(x)$ 的临界点和使 $\mathrm{grad}\varphi = 0$ 的点重合. 显然,诸如临界点,退化和非退化临界点,Morse 指数等概念在坐标变换下不变,在 $\mathfrak{M}$ 上都有确定的含义. 我们在这一节余下部分所得到的很多结果都可以应用到 Hilbert 流形上.

为讨论 $F(x)$ 的临界点之间的关系,我们要用到奇异同调,系数群为 $\mathfrak{G}$ 的奇异同调群的基本性质可以总结如下:

(i) 如果 $f:(X, A)\to(Y, B)$ 是连续映射,那么对一切整数 q 存在一个群同态 $f_*:H_q(X, A;\mathfrak{G})\to H_q(Y, B;\mathfrak{G})$,它具有如下性质:

(a) 如果 $f = \iota$ 是恒等算子,则 ι_* 是恒等自同构;

(b) 如果 $g:(Y, B)\to(Z, C)$,那么 $(gf)_* = g_*f_*$;

(c) $df_* = f_*d$,其中 d 为边缘同态;

(d) (同伦性)如果 $f, g:(X, A)\to(Y, B)$ 同伦,那么 $f_* = g_*$.

(ii) (切除性) 如果 U 是 X 的一个子集,$\bar{U}\subset \mathrm{int}A$,则包含映射 $e:(X-U, A-U)\to(X, A)$ 诱导出同构(对一切整数 q)

$$e_*:H_q(X-U, A-U, \mathfrak{G})\to H_q(X, A, \mathfrak{G}).$$

(iii) (正合性) 如果用 $i: A\to X$ 和 $j:X\to(X, A)$ 记包含映射,那么下面的无穷序列是正合的,即是说,每个同态的象等于下一个同态的核

$$\cdots\to H_q(A;\mathfrak{G}) \xrightarrow{i_*} H_q(X;\mathfrak{G}) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A;\mathfrak{G}) \xrightarrow{d} H_{q-1}(A, \mathfrak{G})\to\cdots.$$

(iv) (维数性质) 如果 X 是一个点组成的空间,那么

$$H_p(X, \mathfrak{G}) = \begin{cases} 0, & \text{当 } p\neq 0, \\ \mathfrak{G}, & \text{当 } p=0. \end{cases}$$

6.5C Morse 型数

为讨论已给泛函所有临界点的结构,需要对临界点进行分类,这个分类应该在局部可微坐标变换下不变. 这一节要用到下面的

属于 M. Morse 的分类. 首先考虑光滑泛函 $F(x)$ 的非退化临界点,根据其指数将它们进行分类. 定理 (6.5.4) 保证了这样的分类在局部微分同胚下是不变的. 其次假定 $F(x)$ 有一个孤立退化临界点 x_0, 我们把 x_0 和正整数列 $(M_0(x_0), M_1(x_0), M_2(x_0), \cdots)$ 对应起来,它称作 x_0 的型数. 整数 $M_i(x_0)$, $\lambda = 0, 1, 2, \cdots$,反映了等价于 x_0 的指数为 i 的非退化临界点的个数,它定义为奇异同调群 H_i 的 Betti 数, $H_i = H_i(\mathring{F}^c \cap U \cup \{x_0\}, \mathring{F}^c \cap U)$ 具 Z_2 系数. 其中 $F(x_0) = c$, $\mathring{F}^d = \{x | F(x) \leqslant d\}$, U 是 x_0 的一个小邻域. 为验证这些定义的合理性,我们证明

(6.5.5) **定理** 设 $F(x)$ 是定义在 Hilbert 空间上的 C^2 实值泛函,满足条件 (6.5.2), 并设 $b > a$.

(i) 如果 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有临界值,那么集 $F^b = \{x | F(x) \leqslant b\}$ 和 $F^a = \{x | F(x) \leqslant a\}$ 是合痕的. 而且 F^a 是 F^b 的形变收缩核.

(ii) 如果 c 是 $F(x)$ 的孤立临界值,在 $F(x) = c$ 上 F 仅有有限个临界点 $\sigma(c) = \{x_i\}$, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$H_q(F^{c+\varepsilon}, F^{c-\varepsilon}) \approx H_q(\mathring{F}^c \cap U \cup \sigma(c), \mathring{F}^c \cap U),$$

其中 $\mathring{F}^c = \{x | F(x) < c\}$, U 是 $\sigma(c)$ 的任一充分小的邻域

(iii) 如果在 $[a, b]$ 上 $F(x)$ 有单个的非退化临界点,其指数为 i, 则对 $q \neq i$, $H_q(F^b, F^a) = 0$; $H_i(F^b, F^a) = G$ (同调中的系数群).

证明: (i) 首先注意,因为 $F(x)$ 满足条件 (C), 故有充分小的 $\varepsilon_0 > 0$, 在 $F^{-1}[a - \varepsilon_0, b + \varepsilon_0]$ 上 $F(x)$ 没有临界点. 事实上,存在正常数 d, 使

$$\inf_{F^{-1}[a-\varepsilon_0, b+\varepsilon_0]} \|F'(x)\| \geqslant d.$$

否则将有序列 $\{x_n\} \in H$, $x_n \in F^{-1}\left[a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right]$ 和 $F'(x_n) \to 0$, 使得在取子序列后有 $x_{n_j} \to \bar{x} \in F^{-1}[a, b]$, $F'(\bar{x}) = 0$.

现在定义 F^b 到 F^a 的合痕 $\zeta_t(x)$, 我们用 3.2 节中讨论的最速

下降法．考虑类似于(6.5.1)的截断而得的

(6.5.6) $$\frac{dx}{dt}=-\alpha(F(x))\frac{F'(x)}{\|F'(x)\|^2},\quad x(0)=x_0\in H,$$

其中$\alpha(z)$是实值C^∞泛函，非负，对$a\leqslant z\leqslant b$，$\alpha(z)=b-a$；对$z\leqslant a-\varepsilon_0$和$z\geqslant b+\varepsilon_0$，$\alpha(z)=0$．因为$\inf\limits_{F^{-1}[a-\varepsilon_0,b+\varepsilon_0]}\|F'(x)\|\geqslant d>0$，微分方程(6.5.6)的右端局部 Lipschitz 连续且一致有界．进一步，应用(3.1.27)，经过简单的论证可知，对一切$t\in(-\infty,+\infty)$，$x(t,x_0)$存在．现在

$$F(x(t,x_0))-F(x_0)=\int_0^t\frac{d}{dt}F(x(t,x_0))dt$$

$$=-\int_0^t\alpha(F(x(t,x_0)))dt,$$

于是$x(t,x_0)$保持$F^{a-\varepsilon_0}$不变，并把F^b变形成F^a．对$x_0\in F^{-1}[a,b]$，令$\zeta_t(x_0)=x(t,x_0)$，我们看到ζ_t是F^b到F^a的一个形变．事实上，ζ_t是H到自身的一个合痕，这是因为对任意$x_0\in H$，只要令$\zeta_{-t}(x_0)=x(-t,x_0)$，就有

$$\zeta_{-t}\zeta_t(x_0)=\zeta_{-t}(x(t,x_0))=x(-t,x(t,x_0))=x_0.$$

实际上我们可以证明(稍微修改上面的论证)，F^a是F^b的一个形变收缩核．的确，如用$x(t,x_0)$记

(6.5.7) $$\frac{dx}{dt}=-\beta(F(x_0)-a)\frac{F'(x)}{\|F'(x)\|^2},\ x(0)=x_0\in F^b$$

的解，其中

$$\beta(z)=\begin{cases}z, & z>0,\\ 0, & z\leqslant 0.\end{cases}$$

那么，对$x_0\in F^{-1}[a,b]$，映射$\zeta_t(x_0)=x(t,x_0)$，对$x_0\in\{x\mid F(x)\leqslant a\}$，$\zeta_t(x_0)=x_0$．和前面一样对$x_0\in F^{-1}[a,b]$，

$$F(\zeta_t(x_0))=F(x_0)-t(F(x_0)-a),$$

于是$F(\zeta_1(x_0))=a$，从而F^a是F^b的一个形变收缩核．

(ii) 现在假定$F(x)=c$是F的一个孤立临界水平，在其上

F 有有限个临界点 z_i, $i=1,2,\cdots,N$. 我们用 (6.5.7) 定义的形变 $\zeta_t(x_0)$ 证明,只要 $\varepsilon>0$ 充足小, F^c 是 $F^{c+\varepsilon}$ 的形变收缩核. 下面证明,对 $x_0\in F^{-1}(c,c+\varepsilon]$, $\lim\limits_{t\uparrow 1}x(t,x_0)$ 存在. 首先假定对 $i=1,2,\cdots,N$, $\inf\limits_{t\in[0,1)}\|x(t,x_0)-z_i\|>0$, 从而由条件 (C): $\|F'(x(t,x_0))\|$ 一致有正的下界,于是对任意 $0<t_1,t_2<1$,

$$\|x(t_2,x_0)-x(t_1,x_0)\|\leqslant\int_{t_1}^{t_2}\left\|\frac{dx}{ds}\right\|ds$$
$$\leqslant K|F(x_0)-c||t_2-t_1|,$$

其中 K 是与 t 无关的常数. 于是对任意序列 $\bar{t}_n\uparrow 1$, $\{x(\bar{t}_n,x_0)\}$ 是 Cauchy 序列,极限 $\lim\limits_{t\uparrow 1}x(t,x_0)$ 存在. 其次假定对某个 i, 有 $\inf\limits_{t\in[0,1)}\|x(t,x_0)-z_i\|=0$,使得有某个序列 $t_n\uparrow 1$,和对这个整数 i, $\|x(t_n,x_0)-z_i\|\to 0$.我们用反证法证明 $\lim\limits_{t\uparrow 1}x(t,x_0)=z_i$. 事实上,如果这个极限不存在,那么必有 z_i 的两个球形邻域 $S_1\subset S_2$, 使得对两两不交区间 $[\tau_j,t_j]\subset[0,1)$ 的一个无穷序列(这个区间序列有如下性质: 对一切 $t\in[\tau_j,t_j]$, 有 $x(t,x_0)\subset S_2-S_1$), 存在绝对常数 $c',d'>0$, 使

$$\|x(t_j)-x(\tau_j)\|\geqslant c' \text{ 和} \tag{6.5.8}$$
$$\inf_{[\tau_j,t_j]}\|F'(x(t))\|\geqslant d'.$$

那么,由 (6.5.8) 推出,

$$c'\leqslant\|x(t_j)-x(\tau_j)\|\leqslant\int_{\tau_j}^{t_j}\left\|\frac{dx}{ds}\right\|ds\leqslant|F(x_0)-c|\frac{|t_j-\tau_j|}{d'}.$$

因为当 $j\to\infty$ 时 $|t_j-\tau_j|\to 0$, 这就得出所要的矛盾. 最后由切除性,

$$H_q(F^{c+\varepsilon},F^{c-\varepsilon})\approx H_q((\mathring{F}^c\cap W)\cup\sigma,\mathring{F}^c\cap W),$$

其中 W 是 σ 的任一邻域,它不包含 $F(x)$ 其它的临界点.

(iii) 先设 $F(x)$ 是一个二次泛函, $x=0$ 是 $F(x)$ 的临界点,指数为 i, $F(0)=0$. 那么存在一个从 H 到自身的有逆自共轭算子 L, 使 $F(x)=\dfrac{1}{2}(Lx,x)$. 因为 $F(x)$ 在 H 的 i 维闭子空间

H_i 上负定，$H = H_i \oplus H_i^{\perp}$，以及 L 在 H_i 和 $H_i^{\perp}$ 上不变，因而，如果记 $\mathring{F}^0 = \{x | F(x) < 0\}$，就有

(6.5.9) $$H_q(F^{\epsilon}, F^{-\epsilon}) \approx H_q(\mathring{F}^0 \cup \{0\}, \mathring{F}^0).$$

设 B 是 H 中闭单位球，令 $B_i = B \cap H_i$*)．我们证明 $(B_i, B_i - \{0\})$ 是 $(\mathring{F}^0 \cup \{0\}, \mathring{F}^0)$ 的形变收缩核．一旦证明了这点，从 (6.5.5(ii)) 就推出

$$H_q(F^{\epsilon}, F^{-\epsilon}) \approx H_q(B_i, B_i - \{0\})$$
$$\approx H_q(B_i, \partial B_i).$$

为证明 $(\mathring{F}^0 \cup \{0\}, \mathring{F}^0)$ 可被形变成 $(B_i, B_i - \{0\})$，假定 $F(x) < 0$ 和 $x = x_i + y$，其中 $x_i \in H_i$，$y \in H_i^{\perp}$，再令 $x(t) = x_i + (1-t)y$．那么，

$$F(x(t)) = \frac{1}{2}(Lx(t), x(t))$$

$$= \frac{1}{2}(Lx_i, x_i) + \frac{1}{2}(1-t)^2(Ly, y)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(Lx, x) < 0.$$

于是 $(\mathring{F}^0 \cup \{0\}, \mathring{F}^0)$ 可以形变为 $(H_i, H_i - \{0\})$，进而形变成 $(B_i, B_i - \{0\})$，而保持 $(B_i, B_i - \{0\})$ 不变．

现在从(6.5.4)和(6.5.9)推出一般的情形．假定 x_0 是 $F(x)$ 在 $F(x) = c$ 上唯一的临界点，x_0 非退化．那么，用 $\tilde{F}(x) = F(x + x_0) - c$ 代替 $F(x)$，$\tilde{F}(0) = 0$，$x = 0$ 是 $\tilde{F}$ 的非退化临界点，指数为 i，于是，因为同调在 (6.5.4) 的同胚映射 h 下不变，所以

$$H_q(\tilde{F}^{\epsilon}, \tilde{F}^{-\epsilon}) = H_q((\mathring{\tilde{F}} \cup \{0\}) \cap W, \mathring{\tilde{F}} \cap W)$$
$$\approx H_q(\mathring{Q}^0 \cup \{0\}, \mathring{Q}^0)$$

(其中 Q 是 F 的二次部分)

$$\approx H_q(B_i, \partial B_i)$$

---

*) 原书此处及下面一段符号较混乱，翻译时较原文略有更动——译者注.

$$\approx \begin{cases} G & \text{当 } q = i, \\ 0 & \text{当 } q \neq i. \end{cases}$$

6.5D Morse 不等式

(6.5.10) 推论 设 $F(x)$ 是定义在 Hilbert 空间H上的 C^2 实值泛函，使得 (i) $F(x)$ 有下界，(ii) $F(x)$ 在H上满足紧性条件 (C) (6.5.2)，(iii) $F(x)$ 的全部临界点都是非退化的，(iv) 对固定的 Morse 指数，$F(x)$ 只有有限多个临界点，那么下面的式子成立：

$$M_0 \geqslant 1,$$

$$M_1 - M_0 \geqslant -1,$$

$$M_2 - M_1 + M_0 \geqslant 1,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i M_i = 1, ^{*)}$$

其中 M_i 记 $F(x)$ 的 Morse 指数为 i 的临界点的个数。

证明：在这个证明中，(6.5.5) 以及奇异同调论的基本性质起着关键的作用。我们首先注意到，$F(x)$ 的非退化条件 (iii) 和紧性条件 (6.5.2) 保证了对任何实数 b，$F(x)$ 在 F^b 上的临界点的数目有限。这个事实是从非退化临界点的孤立性推出来的，实因，如果 F^b 有无穷多个非退化临界点，那将同条件 (6.5.2) 相矛盾。根据上面给出的奇异同调论的讨论，和 Milnor (1963) 一样，对任何次可加整数不变量 $S_\lambda(X, Y)$，

$$S_\lambda(F^{a_n}, F^{a_0}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} S_\lambda(F^{a_i}, F^{a_{i-1}}).$$

如果这个不变量是可加的，则等号成立。于是，如果用 $S_\lambda(X, Y)$ $(\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$ 记 (X, Y) 的 Betti 数直到 λ 的交错和

---

*) 最后一式成立还需假设 $\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i M_i$ 存在. ——译者注.

$$\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k R_{\lambda-k}(X,Y)$$

(一个次可加不变量)，用 $S(X, Y)$ 记全和 $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R_k(X,Y)$(一个加法不变量)，由 (6.5.5) 分别可得

$$\sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k R_{\lambda-k}(F^{a_n}, F^{a_0}) \leqslant \sum_{k=0}^{\lambda}(-1)^k M_{\lambda-k}[F^{a_n}, F^{a_0}],$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda R_\lambda(F^{a_n}, F^{a_0}) = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda M_\lambda[F^{a_n}, F^{a_0}],$$

其中 $M_\lambda[F^{a_n}, F^{a_0}]$记 F 在 $F^{a_n}-F^{a_0}$ 中指数为 λ 的临界点的个数. 其次注意到，对 $b > \inf\limits_{H} F(x)$, $b \neq c_i$, 集合 F^b 可以分解如下($b=a_n$, $a_0 < \inf\limits_{H} F(x)$),

$$F^{a_0} \subset F^{a_1} \subset F^{a_2} \subset \cdots \subset F^{a_n},$$

其中每个 $[a_{i-1}, a_i]$ 中只含一个临界值. 其次，因为 $F^{a_0} = \varnothing$，由条件 (iv)，可以假定当 a_n 充分大时，集合 $H - F^{a_n}$ 不含指数 $\leqslant \lambda$ 的临界点，于是取 $b = a_n$ 充分大，就可令 $F^{a_n} = H$. 因为对 $\lambda > 0$ 有 $R_\lambda(H) = 0$，再由 $R_0(H) = 1$ 就推出不等式 (6.5.10).

如果 $F(x)$ 仅仅定义在H的一个有界区域上，譬如说定义在 $\Sigma_R = \{x \mid \|x\| < R\}$ 上，(6.5.10) 有如下有用的推广，我们证明

(6.5.11) **推论** 设 (6.5.10) 的条件 (i)—(iv) 对集合$\Sigma_R = \{x \mid \|x\| < R\}$ 成立，如果对 $\|x\| = R$ 上的每个 x 有 $(F'(x), x) > 0$，且用 M_i 记 Σ_R 中 $F(x)$ 的指数为 i 的临界点的个数，那么不等式 (6.5.10) 成立.

证明: 我们指出，从条件 $(F'(x), x) > 0$ 推出，对所有的 t，在 (6.5.10) 的证明中用到的最速下降方程的解 $x(t, x_0)$ 都属于集 Σ_R. 因为 Σ_R 的同调群和H的同调群相同，所以 (6.5.10) 中给出的证明可以用于这种情形.

最后，我们考虑不等式 (6.5.10) 的一个推广，这时泛函 $F(x)$ 可以有退化临界点. 为此考虑定义在 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 上的泛函

是方便的，因为这样的集合常常有非平凡的拓扑性质。这时，定义在 $\mathfrak{M}$ 上的任何满足(6.5.2)的光滑泛函都有有意义的临界点理论。

在叙述这方面的结果之前，我们来定义在孤立临界值 $F(x)=c$ 上临界点的一个整值测度。令 $M_i(c)$ 等于有关同调群 $H_i(F^{c+\varepsilon}, F^{c-\varepsilon})$ 的 Betti 数，该群以 Z_2 为系数，其中 $\varepsilon>0$ 充分小。和通常一样，$F^d=\{x|x\in\mathfrak{M}, F(x)\leqslant d\}$。显然，和(6.5.10)一样，如果在集合 $\{x|c-\varepsilon\leqslant F(x)\leqslant c+\varepsilon\}$ 上 $F(x)$ 满足条件(6.5.2)，则 $M_i(c)$ 与 ε 无关。

现在叙述如下的结果，可以基于(6.5.5(ii))来证明它。注意它并不要求 $F(x)$ 的临界点的非退化性。

(6.5.12) 设 $F(x)$ 是 C^2 泛函，定义在一个完备，光滑的 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 上，$F(x)$ 有下界，满足条件(6.5.2)，有孤立临界值 $c_1, c_2, \cdots$。那么，下面的不等式成立

$$\sum_{\{c_j\}} M_i(c_j)\geqslant R_i(\mathfrak{M}), \tag{6.5.13}$$

其中 R_i 是 $\mathfrak{M}$ 的第 i 个 Betti 数。

简单修改前面的论证就可证明这个式子，可看 Rothe(1973)。

6.5E 说 明

为说明刚才给出的结果，考虑早时讨论过的半线性 Dirichlet 问题(6.1.30)，它定义在有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上，

$$\varepsilon^2\Delta u+u-g(x)u^3=0,\quad u|=0. \tag{6.5.14}$$

显然，对所有的 ε，平凡解 $u_0(x)=0$ 存在，不难算出它的指数是对于 Ω 的 Laplace 算子在零边界条件下所有小于 $\frac{1}{\varepsilon^2}$ 的特征值的重数之和。事实上，(6.5.14)的解正是泛函 $\varphi_\varepsilon(u)$ 在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 中的临界点，其中

$$\varphi_\varepsilon(u)=\int_\Omega\left\{\varepsilon^2|\nabla u|^2-u^2+\frac{1}{2}g(x)u^4\right\}dx,$$

$$(\varphi_\varepsilon''(0)v, v) = \int_\Omega \{\varepsilon^2|\nabla v|^2 - v^2\}dx.$$

我们注意到，$\varphi_\varepsilon(u)$ 在 $\mathring{W}_{1,2}(\Omega)$ 上有下界，且满足 (6.5.2) (因为对固定的 ε，$\varphi_\varepsilon'(u)$ 是正常映射)。设 (Δ, Ω) 的特征值记作 $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_N \leqslant \cdots$，使得当且仅当 $\varepsilon^{-2} \neq \lambda_i (i = 1, 2, \cdots)$ 时，$u_0(x) = 0$ 是 $\varphi_\varepsilon(u)$ 的非退化临界点。那么，如在 (6.1.31) 中提到的，对 $1/\varepsilon^2 \leqslant \lambda_1$，$u_0(x) = 0$ 是 $\varphi_\varepsilon(u)$ 的绝对极小，且是(6.5.14)的唯一解。但是当 $1/\varepsilon^2 > \lambda_1$ 时，u_0 不再是相对极小。和 (6.1.31)中对 $\lambda_1 < 1/\varepsilon^2$ 的证明一样，在唯一的正函数 $u_1(x, \varepsilon)$ 处达到 $\varphi_\varepsilon(u)$ 的下确界*)。

下面证明，若 ε^{-2} 不是 (Δ, Ω) 的特征值，且 $\varepsilon^{-2} > \lambda_2$ (当 λ_1 的重数大于 1 时，这一条件可减弱为 $\varepsilon^{-2} > \lambda_1$)，则方程(6.5.14)必有另外一对解 $\pm u^*(x, \varepsilon)$，这一对解在 Ω 中都改变符号。

事实上，这时 $u_0 = 0$ 是 $\varphi_\varepsilon(u)$的非退化临界点，其指数 $i \geqslant 2$，$\varphi_\varepsilon(0) = 0$。$\pm u_1(x, \varepsilon)$ 是 $\varphi_\varepsilon(u)$ 的绝对极小点，$\varphi_\varepsilon(\pm u_1(x, \varepsilon)) = c < 0$。假若 $\varphi_\varepsilon(u)$ 只有这三个临界点，取 $a_0 < c < a_1 < 0 < a_2$，那么显然有 $F^{a_0} = \varnothing$，$R_0(F^{a_1}) = 2$，$R_0(F^{a_2}, F^{a_1}) = R_1(F^{a_2}, F^{a_1}) = 0$。由序列

$$H_1(F^{a_2}, F^{a_1}) \to H_0(F^{a_1}) \to H_0(F^{a_2}) \to H_0(F^{a_2}, F^{a_1})$$

的正合性推得 $H_0(F^{a_1}) \approx H_0(F^{a_2})$，于是 $R_0(F^{a_2}) = R_0(F^{a_1}) = 2$。但另一方面，$F^{a_2}$ 是全空间H的形变收缩核，应有 $R_0(F^{a_2}) = R_0(H) = 1$。这个矛盾证明了 $\varphi_\varepsilon(u)$ 必有异于 $u_0(x)$ 和 $\pm u_1(x, \varepsilon)$ 的临界点 $u^*(x, \varepsilon)$。注意到 $\varphi_\varepsilon(u)$ 是偶泛函，即知 $\pm u^*(x, \varepsilon)$ 为 (6.5.14) 的解。由正解的唯一性，知 $\pm u^*(x, \varepsilon)$ 均不是正解，即它们在Ω中必改变符号。

在 6.7 节，我们将大大改进这个结果，指出对 $\lambda_i < \varepsilon^{-2} \leqslant \lambda_{i+1}$，(6.5.14) 有 i 对不等的非零解 $\pm u_1(x, \varepsilon), \pm u_2(x, \varepsilon), \cdots, \pm u_i(x, \varepsilon)$。当然，为得到这样的结果，建立一般的临界点理论，即毋需区分退

---

*) 以下一段由于原文有错，已整个进行了改写—— 译者注。

化和非退化临界点的理论是重要的.

作为 Morse 关系式(6.5.10)的另一个应用,我们用它们改进(5.4.29)和(6.3.25),对如下算子方程的解的个数作出估计[*)]

(6.5.15) $$Lu + Nu = f.$$

设H为 Hilbert 空间,$L:H\to H$是自共轭 Fredholm 算子,$N\in C^1(H,H)$为一致有界全连续梯度映射,有严格凹的位势$\mathfrak{N}$. 再设$\|N'(u)\|\leqslant c$,其中c为与$u\in H$无关的正常数.

记$H=H_-\oplus H_0\oplus H_+$,其中$H_0=\mathrm{Ker}L$,$H_-$与$H_+$分别是$L$的负定与正定子空间. 设$V$为$H_+$的线性子空间,记$T=H_-\oplus H_0\oplus V$. 再设$\dim T<\infty$,且存在某正常数$\varepsilon$使得对一切$x\in T^\perp$,有

$$(Lx,x)\geqslant(c+\varepsilon)\|x\|^2.$$

记$\phi(a)=\lim\limits_{r\to\infty}P_0N(ra+x)$,其中$a\in H_0,\|a\|=1,x\perp H_0,P_0$为$H$到$H_0$上的正交投影. 设极限$\phi(a)$对有界的$x$一致存在.

(6.5.16) **定理** 在上述假设下,

(i) 若$f\in H$满足条件

$$(f,a)>(\phi(a),a),\quad \forall a\in H_0,\ \|a\|=1,$$

则泛函$\varphi_f(u)=\dfrac{1}{2}(Lu,u)+\mathfrak{N}(u)-(f,u)$在$H$上满足紧性条件(C).

(ii) 对满足(1)中条件的所有的f,可能除去一个 Baire 第一纲集外,(6.5.15)解的个数有限,且成立下述 Morse 不等式

$$M_j\geqslant 1,\ M_{j+1}-M_j\geqslant -1,\ M_{j+2}-M_{j+1}+M_j\geqslant 1,\cdots$$

$$\sum_{i=j}^{\dim T}(-1)^iM_i=1,$$

其中$j=\dim(H_-\oplus H_0)$,M_i为$\varphi_f(u)$的指数为i的临界点的个数.

证明: (i)设f满足(i)中的条件,为证$\varphi_f(u)$满足紧性条

[*)] 从(6.5.15)起一直到本节完,原文定理的陈述及证明都有错误,故整个加以改写,对原文有较大更动——译者注.

件(C)，只需证明

(*) 若 $u_n\in H$，$\|Lu_n+Nu_n-f\|\to 0$，则 $\|u_n\|$ 一致有界。

一旦这个事实成立，通过选子序列，不妨设 u_n 弱收敛。由 N 的全连续性推出 Nu_n 强收敛，进而 Lu_n 强收敛。由 L 是 Fredholm 算子便推出 u_n 强收敛，这就得到条件(C)。

下证事实(*)。设 $u_n=z_n+y_n$，其中 $z_n\in H_0$，$y_n\perp H_0$。由 N 一致有界推出 $\|Lu_n\|=\|Ly_n\|$ 一致有界。由 L 是 Fredholm 算子，推出 $\|y_n\|$ 一致有界。再证 $\|z_n\|$ (从而 $\|u_n\|$) 一致有界。否则，设有 $\|z_n\|=\|r_na_n\|\to\infty$，其中 $a_n\in H_0$，$\|a_n\|=1$，$r_n=\|z_n\|$. 不妨设 $a_n\to a$，于是依假设便有 $P_0N(z_n+y_n)\to\phi(a)$ 以及 $(Nu_n-f,a)\to(\phi(a)-f,a)<0$. 但另一方面，由 $\|Lu_n+Nu_n-f\|\to 0$ 应有 $(Nu_n-f,a)\to 0$. 得到矛盾。

(ii) 由 $\dim H_1<\infty$，易见满足(i)中条件 $(f,a)>(\phi(a),a)$ 的 f 的全体组成 H 中的开集。如在 6.5B 中所述，对这个开集中所有的 f，可能除去一个无处稠密集外，泛函 $\varphi_f(u)$ 的临界点都是非退化的。这时 N 的全连续性，L 是 Fredholm 算子，以及事实(*)一起就保证了(6.5.15)的解的个数有限。

为证结论中所述的 Morse 不等式，首先注意，$\varphi_f(u)$ 的任一临界点的指数不会小于 $j=\dim(H_-\oplus H_0)$，但不会大于 $\dim T$. 这是由于 $\varphi_f''(u)=L+N'(u)$，对于非零的 $x\in H_-\oplus H_0$，由 $\mathfrak{N}$ 严格凹可知 $(\varphi_f''(u)x,x)\leqslant(N'(u)x,x)<0$，而对于 $x\in T^\perp$，则有

$$
\begin{aligned}
(\varphi_f''(u)x,x)&=(Lx,x)+(N'(u)x,x)\\
&\geqslant(c+\varepsilon-c)\|x\|^2=\varepsilon\|x\|^2.
\end{aligned}
$$

把 H 中的元素记为 $u=u_-+u_0+u_+=w+u_+$，其中 $u_-\in H_-$，$u_0\in H_0$，$u_+\in H_+$，$w=u_-+u_0$. 记 P_+ 为 H 到 H_+ 上的正交投影，那么方程(6.5.15)等价于

$$
\begin{cases}
Lu_++P_+N(u)-P_+f=0 & \text{(a)}\\
Lw+(I-P_+)N(u)-(I-P_+)f=0 & \text{(b)}
\end{cases}
$$

由定理(5.4.29)知，对于满足(i)中条件的 f，方程(6.5.15)存在解 $\bar u$. 特别 $\bar u=\bar w+\bar u_+$ 必满足(b)，这意味着 $\bar u$ 是严格凹

泛函 $\varphi_f(w+\bar{u})$ 的极大点，其中 $w\in H_-\oplus H_0$. 由于 $\dim(H_-\oplus H_0) < \infty$，可知当 $\|w\|\to\infty$ 时泛函 $\varphi_f(w+\bar{u})$ 或 $\varphi_f(w+\bar{u}_+)\to -\infty$. 由此可推出，对任意有界的 $u_+\in H_+$，当 $\|w\|\to\infty$ 时，也有 $\varphi_f(w+u_+)\to-\infty$. 因此，对任意的 $u_+\in H_+$，有唯一确定的 $w=w(u_+)$ 使得 $\varphi_f(w+u_+)$ 在 $w(u_+)+u_+$ 处取得极大值，也即 $u=w(u_+)+u_+$ 满足方程 (b):

$$Lw(u_+)+(I-P_+)N(w(u_+)+u_+)-(I-P_+)f=0.$$

由隐函数定理，易见映射 $u_+\mapsto w(u_+)$ 属于 C^1 类. 在上式中对 u_+ 微分，得(对一切 $h\in H_+$)

$$Lw'(u_+)h+(I-P_+)[N'(w(u_+)+u_+)(w'(u_+)h+h)]=0. \tag{c}$$

令 $\psi_f: H_+\to R$ 为$\psi_f(u_+)=\varphi(w(u_+)+u_+)$，利用恒等式(c)，不难求得

$$\psi_f'(u_+)=Lu_++P_+N(w(u_+)+u_+)-P_+f.$$

这说明 u_+ 是 ψ_f 的临界点等价于 $w(u_+)+u_+$ 是 φ_f 的临界点. 易于核验 ψ_f 在 H_+ 上满足紧性条件 (C). 由 $\psi_f(u_+)=\varphi_f(w(u_+)+u_+)=\sup\limits_w\varphi_f(w+u_+)\geqslant\varphi_f(u_+)$，易见当 $\|u_+\|\to\infty$ 时 $\psi_f(u_+)\to\infty$. 进而可知 ψ_f 在 H_+ 上有下界. 还可核验: u_+ 是 ψ_f 的指数为 i 的临界点等价于 $w(u_+)+u_+$ 是 φ_i 的指数为 $i+j$ 的临界点，这样对泛函 ψ_f 应用 Morse 不等式 (6.5.10) 便得所需结果.

6.6 Ljusternik-Schnirelmann 临界点理论

6.6A 一些启发

研究给定光滑泛函的临界点而不论其退化与否常常是很重要的. 苏联数学家 L. Ljusternik 和 L. Schnirelmann 在 1925—1947 年建立了这样一个临界点理论，这个理论基于确定极大极小原则的一个拓扑类似物. 该原则刻画了自共轭紧算子 L 的特征值的特征. 在 (1.3.42) 中指出过，如果把 L 的正特征值记作 $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \cdots$，按递降次序排列并计及重数，那么

(6.6.1) $$\lambda_n^+ = \sup_{[S_{n-1}]} \inf_{x\in S_{n-1}} (Lx,x),$$

其中 S_{n-1} 记 H 的任意 n 维线性子空间 Σ 中的单位球面，$[S_{n-1}]$ 记当 Σ 在 H 中变化时这样的球面类．因为 L 的特征值正是泛函 (Lx,x) 在 H 的单位球面 $\partial\Sigma_1=\{x\,|\,\|x\|=1\}$ 上的临界值，所以自然想找出 S_{n-1} 和 $[S_{n-1}]$ 的“拓扑”类似物，把(6.6.1)推广到一般的光滑泛函 $F(x)$.

把 (6.6.1) 推广到非二次泛函的一个基本结果可以这样得出：设 $\mathfrak{M}$ 是一个 Hilbert 流形，$n(A)$ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 的闭子集类上的整值函数，有如下性质：

(i) 如 A 是 $\mathfrak{M}$ 中单点集，则 $n(A)=1$; $n(\varnothing)=0$;

(ii) 如 $A\supseteq B$，则 $n(A)\geqslant n(B)$;

(iii) $n(A\cup B)\leqslant n(A)+n(B)$;

(iv) 若 A_t 是闭集，且是 A 的合痕，则 $n(A_t)=n(A)$;

(v) 存在 A 的一个邻域 U，使 $n(\overline{U})=n(A)$.

这些性质是相容的，因为平凡函数

$$n(A)=\begin{cases}1, & \text{如 } A\neq\varnothing,\\ 0, & \text{如 } A=\varnothing.\end{cases}$$

就满足 (i)—(v)．暂且假定存在这样的整值函数 $n(A)$，我们证明一个结果，并将用它来代替 (6.6.1).

6.6B 极小极大原则

为用 $n(A)$ 的性质去研究定义在 $\mathfrak{M}$ 上的泛函 $F(x)$ 的临界点以及集合 $\mathfrak{M}^\alpha=\{x\,|\,F(x)\leqslant\alpha,\ x\in\mathfrak{M}\}$ (对某个实的 α)，我们证明

(6.6.2) **定理** 设 $F(x)$ 是定义在完备的光滑 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 上的 C^1 实值泛函，满足紧性条件 (6.5.2)，$F(x)$ 的 Frechet 导算子 Lipschitz 连续．又设 c 是 $F(x)$ 的孤立临界值，U 是集合 $K_c=\{x\,|\,x\in\mathfrak{M},\ F(x)=c,\ \nabla F(x)=0\}$ 的任一邻域，那么必存在 $\mathfrak{M}$ 上的合痕 $\{\zeta_t\}$，使得对充分小的 $\varepsilon>0$，有 $\zeta_1(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}-U)\subseteq$

$\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$[*)].

证明: 为定义形变 ζ_t，考虑方程

$$(6.6.3) \qquad \frac{dx}{dt} = -\alpha(\|\nabla F(x)\|)\nabla F(x), \quad x(0) = x_0 \in \mathfrak{M}$$

的解 $x(t, x_0)$，其中 $\alpha(z)$ 是任一 C^∞ 函数，对 $0 \leqslant z \leqslant 1$，$\alpha(z) = 1$，对 $z \geqslant 2$，$\alpha(z) = \dfrac{2}{z^2}$，同时对一切 $z \geqslant 0$，$z^2\alpha(z)$ 单调增加. 因为对 $x \in \mathfrak{M}$，$\alpha(\|\nabla F(x)\|)\|\nabla F(x)\|$ 一致有界，根据 (3.1.27)，对所有的 t，(6.6.3) 都有解 $x(t, x_0)$. 记 $\zeta_t(x_0) = x(t, x_0)$，则 $\{\zeta_t\}$ 是 $\mathfrak{M}$ 上的合痕.

其次，令 U 是集合 K_c 的一个邻域. 由 (6.5.2) 显然 K_c 紧. 我们证明对某个 $\delta > 0$，U 包含集合

$$V_\delta = \{x_0 \mid x_0 \in \mathfrak{M}, |F(x_0) - c| < \delta, \inf_{t \in [0,1]} \|\nabla F(x(t, x_0))\| < \delta\}.$$

否则，将有点列 $y_n \in \mathfrak{M}$，$y_n \notin U$，以及数列 $t_n \in [0, 1]$，使得当 $t_n \to t_*$ 时 $F(y_n) \to c$，$\nabla F(x(t_n, y_n)) \to 0$. 因为 $|F(x(t_n, y_n))|$ 一致有界，由条件 (C)，$\{x(t_n, y_n)\}$ 有收敛子序列，记其极限为 $\bar{y}$（显然 $\bar{y}$ 是 $F(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的临界点）. 在重新标记脚标后，我们指出

$$y_n = x(-t_n, x(t_n, y_n)) \to x(-t_*, \bar{y}) = \bar{y},$$

即 y_n 收敛到 $\bar{y}$，这与 $y_n \notin U$ 相矛盾.

最后[**)]，取 $\delta \in (0,1)$ 使 $U \supset V_\delta$，那么当 $\varepsilon < \dfrac{1}{2}\delta^2$ 时就有

$$\zeta_1(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon} - U) \subseteq \mathfrak{M}^{c-\varepsilon}.$$

事实上，设 $x_0 \in \mathfrak{M}^{c+\varepsilon} - U$，若 $x_0 \in \mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$，显然有 $\zeta_1(x_0) \in \mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$. 若 $x_0 \in F^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$，那么由 $x_0 \notin V_\delta$ 以及 $|F(x_0) - c| \leqslant \varepsilon < \delta$ 可知，对所有的 $t \in [0, 1]$ 均有 $\|\nabla F(x(t, x_0))\| \geqslant \delta$. 于是

---

*) 为了后面用起来方便，将书上定理改写成现在的较通常的形式. 对证明也作了修改——译者注.

**) 以下直到证明完，译者适当作了修改——译者注.

$$F(x(1,x_0))-F(x_0)$$
$$=-\int_0^1 \alpha(\|\nabla F(x(t,x_0))\|)\|\nabla F(x(t,x_0))\|^2 dt$$
$$\leqslant -\int_0^1 \alpha(\delta)\delta^2 dt=-\delta^2.$$

由此推出

$$F(x(1,x_0))\leqslant F(x_0)-\delta^2\leqslant c+\frac{\delta^2}{2}-\delta^2<c-\varepsilon,$$

即 $\zeta_1(x_0)\in\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$.

(6.6.4) **极小极大定理** 设 $F(x)$ 是定义在完备光滑 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 上的 C^2 泛函，$F(x)$ 满足条件 (6.5.2)，且 $\{A\}_i=\{A|A\subset\mathfrak{M}, n(A)\geqslant i\}$ 非空，其中 $n(A)$ 满足上面的条件 (i)—(v)，再假定 $F(x)$ 的临界值孤立，那么

(i) 如果

$$c_i=\inf_{\{A\}_i}\sup_{x\in A}F(x) \tag{6.6.5}$$

有限，则 c_i 可达到，且是 $F(x)$ 关于 $\mathfrak{M}$ 的临界值.

(ii) 如果 $c_i=c_{i+1}=\cdots=c_{i+j}=c$ 有限，那么 $n(K_c)\geqslant j+1$，其中 $K_c=\{x|x\in\mathfrak{M}, F(x)=c, x$ 是 $F(x)$ 的临界点$\}$.

(iii) 如果某个 $c_i=\infty$，那么 $\sup\limits_K F(x)=\infty$，其中 K 是 $F(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的临界点的集合.

(iv) (Ljusternik-Schnirelmann 重数定理)类似地，如果 $\tilde{c}_i=\sup\limits_{\{A\}_i}\inf\limits_A F(x)$ 有限，则 $\tilde{c}_i$ 可达到，也是 $F(x)$ 关于 $\mathfrak{M}$ 的临界值. 如果 $\tilde{c}_i=\tilde{c}_{i+1}=\cdots=\tilde{c}_{i+j}=\tilde{c}$ 有限，那么 $n(K_{\tilde{c}})\geqslant j+1$. 而且，如果某个 $\tilde{c}_i=-\infty$，则 $\inf\limits_K F(x)=-\infty$.

证明: (i): 如果 c_i 有限且不是临界值，那么由条件 (6.5.2) 推出，对某个 $\varepsilon>0$，$F^{-1}([c-\varepsilon,c+\varepsilon])$ 不含临界点. 于是根据(6.6.2)，$\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$ 与 $\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}$ 合痕，因而每个 $A\in[A]_i$, $A\subseteq\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}$ 被合痕形变成新的集 $A'\subseteq\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$. 再由 6.6A 的 (iv)，$n(A')\geqslant i$，所以 $A'\in[A]_i$. 于是 $\sup\limits_{A'}F(x)\leqslant c_i-\varepsilon$，同时 $c_i=\inf\limits_{\{A\}_i}\sup\limits_A F(x)\leqslant$

$\sup\limits_{A'} F(x) \leqslant c_i - \varepsilon$. 从这个矛盾推出 c_i 是 $F(x)$ 的临界值.

(ii): 其次假定 $c_i = c_{i+1} = \cdots = c_{i+j} = c$, 证明对某个 $\varepsilon > 0$ 有

(6.6.6) $$n(K_c) \geqslant n(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}) - n(\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}).$$

首先, 由 (v), 存在邻域 $U \supset K_c$ 使 $n(K_c) = n(\bar{U})$. 其次, 由 (6.6.2), 存在 $\mathfrak{M}$ 的一个合痕 ζ_t, 使 $\zeta_1(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon} - U) \subseteq \mathfrak{M}^{c-\varepsilon}$. 因而根据 (6.6.2) 和 $n(A)$ 的性质, $n(\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}) \geqslant n(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon} - U)$. 再由 (6.6.2),

$$\begin{aligned} n(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}) &\leqslant n((\mathfrak{M}^{c+\varepsilon} - U) \cup \bar{U}) \\ &\leqslant n(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon} - U) + n(\bar{U}) \\ &\leqslant n(\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}) + n(K_c), \end{aligned}$$

这就建立了 (6.6.6). 最后, 为证 (6.6.5) (ii), 我们注意到, 因为 $\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}$ 包含某子集 A 满足 $n(A) \geqslant i + j$, 所以 $n(\mathfrak{M}^{c+\varepsilon}) \geqslant i + j$. 另一方面, 由 $c_i = c$ 推出 $n(\mathfrak{M}^{c-\varepsilon}) \leqslant i - 1$, 于是从 (6.6.6) 得到 $n(K_c) \geqslant j + 1$.

(iii): 设 $\sup\limits_{K} F(x) = \alpha < \infty$, 其中 K 是 $F(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上临界点的集合. 那么, 对某个 $\varepsilon > 0$, 因为 $\mathfrak{M}^{\alpha+\varepsilon}$ 是 $\mathfrak{M}$ 的形变收缩核, 所以 $n(\mathfrak{M}^{\alpha+\varepsilon}) = n(\mathfrak{M})$. 又因 $i \leqslant n(\mathfrak{M})$, 故 $\mathfrak{M}^{\alpha+\varepsilon} \in [A]_i$, 从而就有 $c_i = \inf\limits_{[A]_i} \sup\limits_{x \in A} F(x) \leqslant \alpha + \varepsilon < \infty$, 这又和 $c_i = \infty$ 矛盾.

(iv): 重复 (i)—(iii) 的证明, 只是改为对某个 $\varepsilon > 0$ 考虑 $\mathfrak{M}_{\bar{c}-\varepsilon}$ 到 $\mathfrak{M}_{\bar{c}+\varepsilon}$ 上的形变, 其中 $\mathfrak{M}_d = \{x \in \mathfrak{M} \mid F(x) \geqslant d\}$.

作为 (6.6.5) 的简单应用, 我们证明:

(6.6.7) **定理** 设 $\mathfrak{M}$ 是完备的 C^2 Hilbert 无边流形, $F(x)$ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 上的 C^2 实值泛函, 有下界, 满足条件 (6.5.2). 那么 $F(x)$ 至少有 $n(\mathfrak{M})$ 个临界点, 其中 $n(\mathfrak{M})$ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 上, 满足性质 (i)—(v) 的任一整值函数.

证明: 不失一般性, 可以假定 $F(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上的临界点的个数有限. 那么, $F(x)$ 在 $\mathfrak{M}$ 上有有限个临界值 $c_0 < c_1 < \cdots < c_N$, $c_0 = \inf\limits_{\mathfrak{M}} F(x)$. 故可写 $\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{M}^{c_N} \supset \mathfrak{M}^{c_{N-1}} \supset \cdots \supset \mathfrak{M}^{c_1} \supset \mathfrak{M}^{c_0} \supset \varnothing$,

其中 $\mathfrak{M}^{c_i}=\{x|x\in\mathfrak{M},\ F(x)\leqslant c_i\}$。对某个与 $i=1,2,\cdots,N$ 无关的 $\varepsilon>0$，由 (6.6.6)，$n(K_{c_i})\geqslant n(\mathfrak{M}^{c_i+\varepsilon})-n(\mathfrak{M}^{c_i-\varepsilon})$。将最后这些不等式按 i 求和，根据 (6.5.5(i))，对每个 $i=1,2,\cdots,N$，集合 $\mathfrak{M}^{c_i-\varepsilon}$ 和 $\mathfrak{M}^{c_{i-1}+\varepsilon}$ 合痕，于是 $n(\mathfrak{M}^{c_i-\varepsilon})=n(\mathfrak{M}^{c_{i-1}+\varepsilon})$，就得到(记 $\mathfrak{M}^{c_0-\varepsilon}=\varnothing$ 和 $\mathfrak{M}^{c_N+\varepsilon}=\mathfrak{M}$)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{N} n(K_{c_i})\\
&\geqslant \sum_{i=0}^{N}\left(n(\mathfrak{M}^{c_i+\varepsilon})-n(\mathfrak{M}^{c_i-\varepsilon})\right)\\
&= n(\mathfrak{M}^{c_N+\varepsilon})-n(\mathfrak{M}^{c_0-\varepsilon})+\sum_{i=1}^{N}\left(n(\mathfrak{M}^{c_i-\varepsilon})\right.\\
&\quad\left.-n(\mathfrak{M}^{c_{i-1}+\varepsilon})\right)=n(\mathfrak{M})-n(\phi)=n(\mathfrak{M}).
\end{aligned}
$$

根据假设，对每个 $i=0,1,\cdots,N$，K_{c_i} 由有限个点 $(x_1^i,\cdots,x_{M_i}^i)$ 组成。从上面的不等式可知，这样的点的总数至少是 $n(\mathfrak{M})$。设若不然，由 $n(A)$ 的性质 (iii)，

$$\sum_{i=1}^{N} n(K_{c_i})\leqslant\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M_i} n(x_j^i)<n(\mathfrak{M}),$$

得出矛盾，从而定理得证。

6.6C Ljusternik-Schnirelmann 畴数

现在考虑这样一个问题：确定可计算的满足 (i)—(v) 的整值函数 $n(A)$。有趣的是，最大(参看 (6.6.8) 下面)的这种函数 $n(A)$ 存在。这个最大函数叫作闭子集 $A\subset\mathfrak{M}$ 的畴数，记作 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A)$，它定义如下：

定义：设 A 是拓扑空间 X 的闭子集，如果 $A=\varnothing$，令 $\operatorname{Cat}_X(A)=0$；如果 A 可以在 X 中压缩成一点，那么定义 A 对 X 的畴数为1；如果为覆盖 A 所必需的 X 的这种可缩闭子集的最小数目是 N，那么 $\operatorname{cat}_X(A)=N$。若 $A\neq\varnothing$ 不能由有限个这种集覆盖，我们就令 $\operatorname{cat}_X(A)=\infty$。

(6.6.8) **定理**　如果 $\mathfrak{M}$ 是完备 Hilbert 流形，则上面定义的 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A)$

满足性质 (i)—(v)，从而是一个允许函数 $n(A)$. 而且，在下面的意义下 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A)$ 是最大的：如果 $n(A)$ 是定义在 $\mathfrak{M}$ 的闭子集上具有性质 (i)—(v) 的任一函数，那么 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) \geqslant n(A)$.

证明: 性质 (i)—(iii) 显然. 为证 (iv)，设 $\zeta_t(A)$ 是 A 的形变，$\overline{\zeta_1(A)} = \bigcup_{i=1}^{N} B_i$，其中 B_i 闭，在 $\mathfrak{M}$ 上可缩. 如果 $A_i = \zeta_1^{-1}(B_i)$，那么 A_i 在 A 中闭，因而在 $\mathfrak{M}$ 中闭. 此外，A 被 $\bigcup_{i=1}^{N} A_i$ 所覆盖. 因为 $\zeta_t|_{A_i}$ 是 A_i 到 B_i 的形变，而 B_i 是可缩的，故 A_i 在 $\mathfrak{M}$ 中可缩 $(i=1,\cdots,N)$. 为证 (v)，只需证明 $\mathfrak{M}$ 中任何可缩的闭集 A 都有邻域 U，使 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(\overline{U}) = 1$. 设 ζ_t 是 A 到点 p 的形变，令 V 是 p 的邻域，$\overline{V}$ 在 $\mathfrak{M}$ 中可缩. 由同伦延拓定理，ζ_t 可延拓成 $\mathfrak{M}$ 的形变 ξ_t，那么 $A = \zeta_1^{-1}(p) = \zeta_1^{-1}(V) \subset \xi_1^{-1}(V)$. 设 U 是 A 的邻域，且 $\overline{U} \subseteq \xi_1^{-1}(\overline{V})$，那么 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(\overline{U}) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(\xi_1^{-1}(\overline{V})) \leqslant \operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(\overline{V}) = 1$. 最后一个等式由 $\overline{V}$ 可缩且在 $\mathfrak{M}$ 中闭得出.

最后证明 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}} A$ 的最大性. 如果 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) = 1$，$A$ 可形变成 $\mathfrak{M}$ 中一点 p，于是对满足性质 (i)—(v) 的任意函数 $n(A)$，$n(A) \leqslant n(p) = 1 = \operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A)$. 如果 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) = N < \infty$，$A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$，其中每个闭集 A_i 被形变成点 $p_i \in \mathfrak{M}$，于是 $n(A_i) = n(p_i) = 1$，故

$$n(A) = n\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} n(A_i) = N = \operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A).$$

当 $A = \varnothing$ 或 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) = \infty$ 时，显然有 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) \geqslant n(A)$. 因而在任何情形，都有 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) \geqslant n(A)$.

显然，为了用 (6.6.4)[1]，重要的是计算给定流形的畴数以及不同类 $[A]_i = \{A \mid A \subset \mathfrak{M} \text{ 闭}, \operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A) \geqslant i\}$ 的数目. 于是下面的

---

1) 满足 6.6A 的 (i)—(v) 的另外的不变量 $n(A)$ 是"亏格"函数，它是由 Krasnoselski (1964) 引进的，但由于有最大性 (6.6.8)，我们这里采用 $\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(A)$.

估计特别重要，因为它把 $\mathfrak{M}$ 的畴数和 $\mathfrak{M}$ 的其它性质联系了起来.

(6.6.9) 设 A 是 Hilbert 流形 $\mathfrak{M}$ 的闭子集，那么

(a) $\text{cat}_{\mathfrak{M}}(A) \leqslant \dim A + 1$，其中 $\dim A$ 记 A 的维数；

(b) $\text{cat}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}) \geqslant \text{cup length}\,\mathfrak{M} + 1$，cup length 的定义请看附录 A；

(c) 如果 $\dim \mathfrak{M} = \text{cup length}\,\mathfrak{M}$，那么 $\text{cat}\,\mathfrak{M} = \dim \mathfrak{M} + 1$；

(d) 设 P^k 记 k 维实投影空间，$P^\infty(X)$ 记无穷维投影空间，它是由把一致凸 Banach 空间 X 的单位球面 $\{x \mid \|x\| = 1\}$ 的对径点等同而得到的，那么

$$\text{cat}_{P^n}(P^k) = k + 1, \qquad \text{对 } n \geqslant k,$$

$$\text{cat}_{P^\infty(X)}(P^k(X)) = k + 1, \quad \text{其中 } P^k(X) \subset P^\infty(X).$$

因为这些结果本质上是拓扑的，我们略去了它们的证明，建议读者参考 Schwartz (1969).

6.6D 对非线性特征值问题的应用

在用到模于自反 Banach 空间的流形 $\mathfrak{M}$ 上去时，临界点的 **Ljusternik-Schnirelmann** 理论得到很大的成功. 一个简单的，但并非不重要的这种推广的例子是 6.3A 中提到过的对非线性特征值问题的研究. 设 $\mathfrak{A}(x)$ 和 $\mathscr{B}(x)$ 是定义在一致凸自反 Banach 空间 X 上的实值 C^1 泛函，我们要考察方程

$$(6.6.10) \qquad \mathfrak{A}'(x) = \lambda \mathscr{B}'(x), \quad \mathfrak{A}(x) = \text{常数 } R$$

的非平凡解 (x, λ).

显然 (6.6.10) 的解包含于泛函 $\mathscr{B}(x)$ 在水平集 $\mathfrak{A}_c$ 上的临界点集之中，其中 $\mathfrak{A}_c = \{x \mid x \in X, \mathfrak{A}(x) = c, c \text{ 是常数}\}$. 如果假定 $\mathfrak{A}(x)$ 是 Fredholm 泛函，那么根据 (3.1.47)，除去一个零测度的实数集外，$\mathfrak{A}_c$ 是模于空间 X 的 Banach 流形. 我们证明下面一个结论，它类似于无穷维实 Hilbert 空间 H 上自共轭紧线性算子的谱理论.

先作一些假定*）:

(i) $\mathfrak{A}'(x)$ 是 C^1 奇梯度算子，$\mathfrak{A}(0)=0$，$\mathfrak{A}'(0)=0$. 对任 $x\neq 0$，$(\mathfrak{A}'(sx), x)$ 是正实变量 s 的严格递增函数. $\mathfrak{A}'$ 映有界集为有界集.

(ii) 泛函 $\mathfrak{A}(x)$ 强制，即当 $\|x\|\to\infty$ 时 $\mathfrak{A}(x)\to\infty$.

(iii) 每当 $x_n\to x$ 在 X 中弱收敛，$\{\mathfrak{A}'(x_n)\}$ 在 X^* 中强收敛时，就有 x_n 在 X 中强收敛于 x.

(iv) $\mathscr{B}'(x)$ 是全连续奇梯度算子，当且仅当 $x=0$ 时 $\mathscr{B}'(x)=0$.

再引进如下记号:

对 $R>0$，记 $\mathfrak{A}_R=\{x\in X\,|\,\mathfrak{A}(x)=R\}$，用 $\mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2$ 表示把 $\mathfrak{A}_R$ 的对径点等同所得到的商空间. 对非负整数 i，记 $[A]_i=\{A\subset \mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2$ 闭 $|\,\mathrm{cat}_{\mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2}(A)\geqslant i\}$. 令 $c_i^+=\inf\limits_{[A]_i}\sup\limits_{A}\mathscr{B}(x)$，$c_i^-=\sup\limits_{[A]_i}\inf\limits_{A}\mathscr{B}(x)$.

那么我们有

(6.6.11) 定理 在上述假定及记号下，

1° 若 $c_i^+\neq 0$，则 c_i^+ 是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{A}_R$ 上的临界值，于是有 (x_i^+, λ_i^+) 满足 (6.6.10)，且 $\mathscr{B}(x_i^+)=c_i^+$. 当 $c_i^-\neq 0$ 时也有类似结果.

2° 若再设 $\mathscr{B}(x)$ 满足条件: X 可分，且 $\mathscr{B}(x)=0$ 的充要条件为 $x=0$，则方程 (6.6.10) 有可数无穷多个解 (x_n, λ_n)，当 $n\to\infty$ 时 $|\lambda_n|\to\infty$，x_n 弱收敛于零.

证明: 考察集合 $\mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2$，从条件 (i)—(iii) 推出 $\mathfrak{A}_R$ 非空. 事实上，因为 $\mathfrak{A}(x)=\int_0^1(\mathfrak{A}'(sx), x)ds$，故 $\mathfrak{A}(kx)$ 是 k 的连续函数，其值域为 $[0,\infty)$. 从 $\mathfrak{A}(x)$ 的强制性推出 $\mathfrak{A}_R(x)$ 在 X 中有界，于是，因为对 $x\in\mathfrak{A}_R$ 有

$$(\mathfrak{A}'(x), x)\geqslant\int_0^1(\mathfrak{A}'(sx), x)ds=R,$$

---

*） 以下一段叙述对原书作了一些变动——译者注.

所以 $$\|\mathfrak{A}'(x)\| \geqslant \frac{R}{\sup\limits_{x\in\mathfrak{A}_R}\|x\|} = \beta > 0.$$

由条件 (i) 推出，集合 $\mathfrak{A}_R$ 关于 $x=0$ 对称，这是因为每条通过原点的射线 $\{tx \mid t\in\mathbb{R}^1, \|x\|=1\}$ 和 $\mathfrak{A}_R$ 正好交于两点 $\pm t(x)x$。于是存在一个一对一的映射 $f(x)=t(x)x$，它映 $P^\infty(X)=\partial\Sigma_1/\mathbf{Z}_2$ (把 X 的单位球面 $\partial\Sigma_1$ 上的对径点看作等同而得)到 $\mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2$ 上。为证 $f(x)$ 连续(实际上可微)，我们指出对 $x\in\mathfrak{A}_R(R\neq 0)$，当 $s>0$ 时

$$\frac{d}{ds}\mathfrak{A}(sx)=(\mathfrak{A}'(sx),x)>0.$$

于是由隐函数定理推出 $t(x)$，从而 $f(x)$ 连续，因而 $\mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2$ 通过映射 f 同胚于 $P^\infty(X)$.

现在定义 $\mathfrak{A}_R/\mathbf{Z}_2$ 的子集的一个形变，它有着 (6.6.4) 中所讲的沿梯度方向的形变的某些性质. 为此首先注意，因为 X 一致凸，对偶映射[1] $J: X^*\to X$ 局部 Lipschitz 连续. 然后再考虑如下初值问题的解 $x(t,x_0)$，

$$\frac{dx}{dt}=v(x)+a(x,v)J\mathfrak{A}'(x),\quad x(0)=x_0\in\mathfrak{A}_R,$$

其中 $v(x)$ 是 X 的元素，$a(x,v)\in\mathbb{R}^1$ 选得使 (i) $x(t,x_0)\in\mathfrak{A}_R$ 和 (ii) $\mathscr{B}(x(t,x_0))$ 是 t 的递减函数。我们这样来确定 $a(x,v)$：只要 $x(t,x_0)$ 满足初值问题，那么 $\mathfrak{A}(x(t,x_0))=R$。于是 $(\mathfrak{A}'(x), v(x)+a(x,v)J\mathfrak{A}'(x))=0$ 以及 $a(x,v)=-(\mathfrak{A}'(x),v)/\|\mathfrak{A}'(x)\|^2$. 我们由假定 x_0 不是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{A}_R$ 上的临界点来确定 $v(x)$，那么

$$\mathscr{B}(x(t,x_0))-\mathscr{B}(x_0)$$

---

1) 对偶映射 J 定义为泛函 $I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2$ 的 Fréchet 导数，对于一致凸 Banach 空间，$I(u)$ 在原点的余集上可微，J 有性质

$$(Ju,u)=\|Ju\|\|u\| \text{ 和 } \|Ju\|=\|u\|$$

$$= \int_0^t (\mathscr{B}'(x(t)), v(x(t))$$
$$+ a(x(t), v(x(t)))J\mathfrak{A}'(x(t)))dt$$
$$= \int_0^t (\mathscr{B}'(x(t))$$
$$- \frac{(\mathscr{B}'(x(t)), J\mathfrak{A}'(x(t)))}{\|\mathfrak{A}'(x(t))\|^2} \mathfrak{A}'(x(t)), v(x(t)))dt$$
$$= \int_0^t (\nabla \mathscr{B}(x(t)), v(x(t)))dt,$$

其中

$$\nabla \mathscr{B}(x(t)) = \mathscr{B}'(x(t)) - \frac{(\mathscr{B}'(x(t)), J\mathfrak{A}'(x(t)))}{\|\mathfrak{A}'(x(t))\|^2} \mathfrak{A}'(x(t)).$$

记 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{A}_R$ 上的梯度,取 $v(x) = -J\nabla \mathscr{B}(x(t))$,就得到

$$\mathscr{B}(x(t, x_0)) - \mathscr{B}(x_0) = -\int_0^t \|\nabla \mathscr{B}(x(t, x_0))\|^2 dt.$$

现在证明

$$c_i^+ = \inf_{[A]_i} \sup_{x \in A} \mathscr{B}(x), \quad c_i^- = \sup_{[A]_i} \inf_{A} \mathscr{B}(x)$$

是 $\mathscr{B}(x)/\mathfrak{A}_R$ 的临界值,其中 $[A]_i = \{A \mid A \in \mathfrak{A}_R/Z_2, \operatorname{cat}_{\mathfrak{A}_R/Z_2}(A) \geqslant i\}$. 因为 $\mathfrak{A}_R/Z_2 \approx P^\infty(X)$, 根据 (6.6.9), 类 $[A]_i$ 非空并构成一个严格递降序列 $[A]_1 \supset [A]_2 \supset [A]_3 \supset \cdots$. 为能重复 (6.6.4) 中的论证,我们还应当验证类似于条件 (C) 的如下条件:

(*) 如果 $c \neq 0$, $\varepsilon > 0$ 充分小, $x_n \in \mathscr{B}^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$, $x_n \in \mathfrak{A}_R$, $\nabla \mathscr{B} x_n \to 0$, 那么 $\{x_n\}$ 有收敛子序列.

为验证 (*), 可以假定(必要时选子序列) (a) 在 X 中 x_n 弱收敛于 $\bar{x}$, (b) $\mathfrak{A}'(x_n)$ 弱收敛, (c) $\|\mathfrak{A}'(x_n)\|$ 一致有大于 0 的下界且收敛. 然后还设

$$(6.6.12) \qquad \nabla \mathscr{B}(x_n) = \mathscr{B}'(x_n) - \frac{(\mathscr{B}'(x_n), J\mathfrak{A}'(x_n))}{\|\mathfrak{A}'(x_n)\|^2} \mathfrak{A}'(x_n) \to 0.$$

因为 $\mathscr{B}'(x)$ 全连续, 从 (c) 推出 $(\mathscr{B}'(x_n), J\mathfrak{A}'(x_n))\mathfrak{A}'(x_n)$ 弱收敛,于是可以假定 $(\mathscr{B}'(x_n), J\mathfrak{A}'(x_n))$ 收敛到某个实数 $\alpha \neq 0$,

否则由 (6.6.12) 推出 $\mathfrak{A}'(x_n) \to 0$，根据条件 (iv)，$\bar{x} = 0$，这不可能。因为根据 (iv)，对充分小的 $\varepsilon > 0$，$\mathscr{B}^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ 弱闭且不含原点，于是 $\{\mathfrak{A}'(x_n)\}$ 强收敛。据 (iii)，x_n 在 X 中强收敛到 x，这就得出所希望的结果。

现在证明若 $c_i^+ \neq 0$，则 c_i^+ 是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{A}_R$ 上的临界值。事实上，如若不是，由 (*) 可知存在某个 $\varepsilon > 0$，使 $\mathscr{B}^{-1}([c_i^+ - \varepsilon, c_i^+ + \varepsilon])$ 不包含这样的临界点。于是和 (6.6.2) 的证明一样，可以找到一个形变 ζ_t 和集合 $\tilde{A} \in [A]_i$，使 $\sup_{\tilde{A}} \mathscr{B}(x) \leqslant c_i^+ + \varepsilon$，故 $\sup_{\zeta_1(\tilde{A})} \mathscr{B}(x) \leqslant c_i^+ - \varepsilon$，这是一个矛盾，因为从 $\mathrm{cat}(\zeta_1(\tilde{A})) \geqslant i$ 可推出 $\zeta_1(\tilde{A}) \in [A]_i$ 以及

$$c_i^+ = \inf_{[A]_i} \sup_{A} \mathscr{B}(x) \leqslant \sup_{\zeta_1(\tilde{A})} \mathscr{B}(x) \leqslant c_i^+ - \varepsilon.$$

把刚才给出的过程倒过来并把 $[A]_i$ 的集合形变，使 $\mathscr{B}(x(t, x_0))$ 沿 $x(t, x_0)$ 递增，就可证明，若数

$$c_i^- = \sup_{[A]_i} \inf_{A \in [A]_i} \mathscr{B}(x)$$

非零，则 c_i^- 是 $\mathscr{B}(x)$ 限于 $\mathfrak{A}_R$ 上的临界值。

现在证明，在所给条件下，和临界值 $c_n^\pm$ 相应的临界点列 $\{x_n^\pm\}$ (a) 满足方程 $\mathfrak{A}'(x_n^\pm) = \lambda_n^\pm \mathscr{B}'(x_n^\pm)$，其中 (b) 当 $n \to \infty$ 时 $|\lambda_n^\pm| \to \infty$，$x_n^\pm$ 弱收敛到 0。因为每个 $x_n^\pm$ 都满足方程

$$\mathscr{B}'(x) = \frac{(\mathscr{B}'(x), J\mathfrak{A}'(x))}{\|\mathfrak{A}'(x)\|^2} \mathfrak{A}'(x)$$

和

$$\frac{(\mathscr{B}'(x), J\mathfrak{A}'(x))}{\|\mathfrak{A}'(x)\|^2} \neq 0$$

有限，故可直接从 (*) 的证明推出 (a)*)。

---

*) 原书对 (b) 并未证明，从而本定理的证明不完全。但类似的条件更弱的结果可见 E. Zeidler, Nonlinear Analysis, *TMA*, 4:3 (1980), 451—489. 那里有详尽的证明——译者注。

6.7 一般临界点理论的应用

现在考虑前两节中所讲的 Morse 理论和 Ljusternik-Schnirelmann 临界点理论的某些应用，前二小节证明非线性算子方程的某些一般结果，在后面两小节中，我们把这些结果用到某些具体的数学物理问题上去。6.7E 用来简单考虑一个微分几何问题，研究紧流形上的短程线。

6.7A 对梯度映射分歧理论的应用

第四章讲的分歧理论可以用更整体的论证进行补充。例如，考虑定义在实 Hilbert 空间H上的非线性特征值问题

(6.7.1) $$u=\lambda(Lu+Nu),\quad \lambda\in\mathbb{R}^1.$$

这里假定:

(a) L是映H到自身的紧自共轭算子;

(b) $Nu=\mathfrak{N}'(u)$映H到自身，是一个高阶的全连续奇梯度映射，$N(0)=0$，且有

(6.7.2) $$\|Nu-Nv\|=O(\|u\|+\|v\|)\|u-v\|,$$
当 $\|u\|,\|v\|\to 0$;

(c) $\mathfrak{N}(0)=0$; $Lu+Nu=0$ 有唯一解 $u=0$。

我们用 Ljusternik-Schnirelmann 理论讨论 (6.7.1) 在$u=0$附近的非平凡解。回想起 4.2 节中讨论的分歧理论的方法，那里选择了一个不变量 I_f，I_f 满足 (i) 是(6.7.1) 解的一个测度，(ii) 在适当限制的小扰动下不变，(iii) 可由线性化近似计算。我们指出，对每个n和充分小的$R>0$，下面的临界值$c_n(R)$就是适当的不变量:

(6.7.3) $$c_n(R)=\sup_{[V]_{n,R}}\inf_V\left\{\frac{1}{2}(Lu,u)+\mathfrak{N}(u)\right\},$$

它可用极小极大原则计算。这里V是球面

$$\partial\Sigma_R=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\|x\|^2=R\right\}$$

上的对称子集，$\mathrm{cat}(V,\partial\Sigma_R/\mathbb{Z}_2)\geqslant n$，$[V]_{n,R}$ 是 $\partial\Sigma_R$ 的所有这种对称子集的类。

为进一步往下作，我们注意到 $c_n(R)$ 满足不变量 I_f 的性质(i)—(iii)。作为开始，根据(6.6.11)，$c_n(R)$ 是泛函

$$\mathscr{F}(u)=\frac{1}{2}(Lu,u)+\mathfrak{N}(u)$$

在 $\partial\Sigma_R$ 上的临界值，使得对某个数 $\lambda_n(R)$，(6.7.1)有解 $(u_n(R),\lambda_n(R))$，且 $\frac{1}{2}\|u_n(R)\|^2=R$。其次，如果

$$\tilde{c}_n(R)=\sup_{[V]_{n,R}}\inf_V\frac{1}{2}(Lu,u),$$

我们证明

(6.7.4) $\qquad |\tilde{c}_n(R)-c_n(R)|=o(R)$，当 $R\to 0$ 时，

最后指出，对 $R=\frac{1}{2}$，上面定义的二次等周问题临界值 $\{\tilde{c}_n(R)\}$ 和 $\{\lambda_n^{-1}\}$ 重合，λ_n^{-1} 是 L 的正特征值，按大小递降排列并计及重数。我们还要证明，当 $R\to 0$ 时，对一切 n，

(6.7.5) $\qquad |\lambda_n(R)-\lambda_n|\to 0$。

假定上面结果为真，当 $R\to 0$ 时，对一切 n，单参数族 $(u_n(R),\lambda_n(R))\to(0,\lambda_n)$；于是就提供了(6.7.1)的从 $(0,\lambda_n)$ 分枝出来的非平凡解族。显然，这不仅对(6.7.1)型的方程给出(4.2.15)的另一个证明，而且也得到线性问题 $u=\lambda Lu$ 的高重特征值 λ_n 附近的分枝的一个有趣结果。事实上我们要证明一个"重数保持定理"。

(6.7.6) 定理 假定方程(6.7.1)中的算子满足条件(a)，(b)，(c)，设 λ_n 是线性方程 $u=\lambda Lu$ 的 N 重特征值。那么当 $R\to 0$ 时，方程(6.7.1)至少有 N 个不同的单参数非平凡解族 $(u_{n+k}(R),\lambda_{n+k}(R))\to(0,\lambda_n)$，$k=0,1,\cdots,N-1$。

证明：暂且假定结果(6.7.3)—(6.7.5)已知。上面提到的论证指出，有 N 个不同的非平凡解族 $(u_{n+k}(R),\lambda_{n+k}(R))$ 存在，$k=0$，

$1,\cdots,N-1$。因为 λ_n 为 N 重，当 $R\to 0$ 时每个族趋近于 $(0,\lambda_n)$、于是剩下只是证明这些族彼此不同,但这只是 Ljusternik-Schnirelmann 重数定理 (6.6.4(iv)) 的直接推论。

现在建立 (6.7.3)—(6.7.5) 以完成定理的证明。 显然这可由如下的引理完成:

引理 A (二次泛函的广义极小极大原则)

$$R\lambda_n^{-1}=\sup_{[V]_{n,R}}\inf_{V}\frac{1}{2}(Lu,u),$$

其中 λ_n 是 $u=\lambda Lu$ 的第 n 个特征值 (按大小排列并计及重数)。

引理 B $R\lambda_n^{-1}-c_n(R)=o(R)$, 当 $R\to 0$ 时。

引理 C 当 $R\to 0$ 时 $|\lambda_n^{-1}-\lambda_n^{-1}(R)|\to 0$。

引理 A 的证明: 设 S 记 H 的一个 n 维子空间,

$$T_R=\left\{u\,|\,u\in S,\frac{1}{2}\|u\|^2=R\right\},$$

我们回想起下面两件事实:

1) 设 P_R^{n-1} 是把 T_R 的对径点等同而得的元素集,并看作 $P_R^\infty(H)$ 的子空间,那么 $\text{cat}(P_R^{n-1},P_R^\infty(H))=n$。

2) Courant-Fischer 极小极大原则可以改写为(参看 (1.3.41))

$$R\lambda_n^{-1}=\sup_{[T]_{n,R}}\inf_{T_R}\frac{1}{2}(Lu,u),$$

其中 T_R 定义如上, $[T]_{n,R}$ 是所有这种集合的类, n 固定,现在考虑数

$$\bar{c}_n(R)=\sup_{[V]_{n,R}}\inf_{V}\frac{1}{2}(Lu,u).$$

由 1), $[T]_{n,R}\subset[V]_{n,R}$; 故对每个 n, $\bar{c}_n(R)\geqslant R\lambda_n^{-1}$. 而且数 $\bar{c}_n(R)$ 是泛函 $\frac{1}{2}(Lu,u)$ 在 $P_R^\infty(H)$上的临界值,从而是在 $\partial\Sigma_R$ 上的临界值,故对某个整数 $k(n)$, $\bar{c}_n(R)=R\lambda_{k(n)}^{-1}$. 为证对一切 n 有 $\bar{c}_n(R)=R\lambda_n^{-1}$, 我们采用归纳法, 如果 $n=1$, 由定义 $\bar{c}_n(R)=R\lambda_1^{-1}$. 现设 λ_1 是重数恰为 p 的特征值, 那么 $\lambda_1\geqslant\lambda_{k(n)}$, $n=1,2,\cdots,p$. 因而 $\lambda_1=\lambda_{k(n)}$, $n=1,2,\cdots,p$. 下面证明

$$\bar{c}_1(R)=\bar{c}_2(R)=\cdots=\bar{c}_p(R)\neq\bar{c}_{p+1}(R).$$

事实上,如果 $\bar{c}_p(R)=\bar{c}_{p+1}(R)$,那么和这个临界值相应的临界点的集合将在 $\partial\Sigma_R$上有维数 p(定理(6.6.4.)),这和 λ_1 是 p 重的特征值相矛盾.作为归纳假

设，我们假定不同的特征值 $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \cdots, \lambda_{(n-1)}$ 和不同的数 $c_{(1)}(R), c_{(2)}(R), \cdots, c_{(n-1)}(R)$ 一致，计及重数在内. 这时有关系式 $c_{(p)}(R) = R\lambda_{(p)}^{-1}, p = 1, \cdots, n-1$. 再假定 $\lambda_{(n)}$ 是恰为 t 重的特征值，然后证明 $c_{(n)}(R) = c_{(n)+1}(R) = \cdots = c_{(n)+t-1}(R) = \lambda_{(n)}^{-1}R$. 根据归纳假定，显然对 $i = 0, 1, 2, \cdots, t-1$. 有 $\lambda_{n-1} < \lambda_{k(n+i)} \leqslant \lambda_n$. 于是 $\lambda_{k(n+i)} = \lambda_n$, $i = 0, 1, 2, \cdots t-1$. 假设 $c_{n+t+1}(R) = \lambda_n^{-1}R$，那么根据上面提到的(6.6.4)，和临界值 $\lambda_n^{-1}R$ 相应的临界点集的维数在 $\partial\Sigma_R$ 上超过 $t-1$，这又和 λ_n 的重数恰为 t 相矛盾. 于是 $c_{n+t+1}(R) \neq \lambda_n^{-1}R$，因而 $c_{(n)}(R)$ 和 $\lambda_{(n)}$ 的重数一致. 引理 A 得证.

引理 B 的证明： 首先注意到，因为

$$\mathfrak{N}(u) = \int_0^1 (u, N(tu))dt,$$

所以对小的 $R > 0$ 和 $u \in \partial\Sigma_R$，有

$$|\mathfrak{N}(u)| \leqslant K(\|u\|)\|u\|^2,$$

其中当 $\|u\| \to 0$ 时 $K(\|u\|) \to 0$. 因而 $K_R = \sup_{\partial\Sigma_R} |\mathfrak{N}(u)| = o(R)$. 现在

$$c_n(R) = \sup_{[V]_{n,R}} \inf_V \left\{\frac{1}{2}(Lu, u) + \mathfrak{N}(u)\right\},$$

由引理 A，$R\lambda_n^{-1} = \sup_{[V]_{n,R}} \inf_V \frac{1}{2}(Lu, u)$. 故

$$|c_n(R) - R\lambda_n^{-1}| \leqslant \left|\sup_{[V]_{n,R}} \inf_V \left\{\frac{1}{2}(Lu, u) + K_R\right\} - \sup_{[V]_{n,R}} \inf_V \frac{1}{2}(Lu, u)\right|$$

$$\leqslant K_R = o(R).$$

引理 C 的证明： 取(6.7.1)和 $u_n(R)$ 的内积就得(对小的 $R > 0$)

$$R\lambda_n^{-1}(R) = \frac{1}{2}(Lu_n(R), u_n(R)) + \frac{1}{2}(Nu_n(R), u_n(R))$$

$$= c_n(R) + \left\{\frac{1}{2}(Nu_n(R), u_n(R)) - \mathfrak{N}(u_n(R))\right\}$$

$$= c_n(R) + o(R).$$

因而根据引理 B，

$$R\lambda_n^{-1}(R) - R\lambda_n^{-1} = c_n(R) - \lambda_n^{-1}R + o(R),$$

故 $|\lambda_n^{-1}(R) - \lambda_n^{-1}| = o(R)/R = o(1)$，因而当 $R \to 0$ 时 $\lambda_n^{-1}(R) \to \lambda_n^{-1}$.

证明的结论： 根据上面的结果，对于固定的 n，集 $(u_n(R), \lambda_n(R))$ 定义一个从 $(0, \lambda_M)$ 分枝出来的单参数解族.

刚才得到的结果本身可以推广到全局的情形去：

(6.7.7) **推论** 若对所有的$R>0$有$c_j(R)>0$，那么(6.7.6)中讨论的解族$(u_i(R),\lambda_i(R))$可以延拓成(6.7.1)的解.

证明：这是(6.6.4)的直接推论，因为对每个j，向量$u_j(R)$是对应于临界值

$$c_n(R)=\sup_{[V]_{n,R}}\inf_{V}\left\{\frac{1}{2}(Lu,u)+\mathfrak{N}(u)\right\}$$

的临界点。

附注：

为把推论(6.7.7)用于分歧理论的连续统问题，必须讨论，作为R的函数时$(u_j(R),\lambda_i(R))$的连续性，还需要寻求这方面的正面的结果。由于有不连续的例子，这个问题变得更困难了。另一方面，结果(6.1.31)指出了进一步的肯定的结果(参看6.7C节和本章注记中的F).

6.7B 和梯度映射有关的算子方程的多重解

这里考虑这样一个问题，求算子方程

(6.7.8) $$x-Lx+N(x)=0$$

解的个数的下界，其中L是紧自共轭映射，映Hilbert空间H到自身，$N(x)=\mathfrak{N}'(x)$是H到自身的奇的全连续梯度映射，且是较高阶的映射。我们证明下面的

(6.7.9) **定理** 设上面的条件满足，在$x=0$处二次型$Q(x)=(x,x)-(Lx,x)$的Morse指数$q>0$。那么，当下面两个条件满足时：

(a) $F(x)=\frac{1}{2}Q(x)+\mathfrak{N}(x)$有下界，

(b) 对充分大的$\|x\|$，$F(x)\geqslant 0$，

方程(6.7.8)至少有q个不同的解对$\pm x_n$，$n=1,2,\cdots,q$.

证明：考虑流形$\mathfrak{M}$，它由从Hilbert空间H中删去原点，并把$H-\{0\}$的对径点视作等同而得。$\mathfrak{M}$是光滑流形。因为对每个n，实的n维投影空间$\mathscr{P}_n(H)\subset\mathfrak{M}$，显然$\mathfrak{M}$含有其Ljusternik-

Schnirelmann 畴数为 $n=1,2,\cdots$的集合。现在

$$F(x)=\frac{1}{2}Q(x)+\mathfrak{N}(x)$$

是 x 的偶泛函，于是可以看作 $\mathfrak{M}$ 上的 C^1 可微泛函。

显然，对任何 $\varepsilon>0$，在集合 $\mathfrak{M}_{-\varepsilon}=\{x|F(x)\leqslant-\varepsilon\}$ 上泛函 $F(x)$ 满足条件 (C)。这是因为，如果 $x\in\mathfrak{M}_{-\varepsilon}$，那么由条件 (b)，$\|x\|$ 一致有界，如果 $x_n\in\mathfrak{M}_{-\varepsilon}$ 使 $F'(x_n)\to0$，那么有弱收敛子序列使 $x_{n_j}-Lx_{n_j}+Nx_{n_j}\to0$。由 L 和 N 的全连续性推出 $\{x_{n_j}\}$ 强收敛。

现在考虑由 $c_n(\mathfrak{M})=\inf\limits_{[V]_n}\inf\limits_{V}F(x)$ 定义的数，其中 V 是 $\mathfrak{M}$ 的子集，$\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}(V)\geqslant n$，$[V]_n$ 是所有这种子集的类。我们证明，对充分小的 $\varepsilon>0$，所有的 $c_1(\mathfrak{M}),\cdots,c_q(\mathfrak{M})$ 都小于 $-\varepsilon$，从而 $F(x)$ 位于这些水平集上的临界点都包含在 $\mathfrak{M}_{-\varepsilon}$ 中。

为得到所希望的估计，我们注意到，因为二次型 $Q(x)=(x,x)-(Lx,x)$ 的指数为 q，有 H 的 q 维子空间 H_q 和绝对常数 $c<0$，使得对任 $x\in H_q$，都有 $Q(x)\leqslant c\|x\|^2$。

于是，由把 H_q 中半径为 R 的球面上的对径点看作等同，我们得到一个集合 $\mathscr{P}_R$，可以把它和 $q-1$ 维实投影空间等同起来。对每个 $R>0$，$\operatorname{cat}_{\mathfrak{M}}\mathscr{P}_R=q$，从而对每个 $n=1,2,\cdots,q$，$\mathscr{P}_R\in[V]_n$。另一方面，对小的 $R>0$ 和任何 $x\in\mathscr{P}_R$，

$$F(x)-\frac{1}{2}Q(x)+\mathfrak{N}(x)\leqslant\frac{1}{2}c\|x\|^2+o(\|x\|^2)\tag{6.7.10}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}cR^2<0.$$

综合这两件事，我们求出，对充分小的 $R>0$，

$$\inf_{[V]_n}\sup_{V}F(x)\leqslant\sup_{\mathscr{P}_R}F(x)\leqslant\frac{1}{4}cR^2<0.$$

于是根据极小极大原理 (6.6.4)，泛函 $F(x)$ 有 q 对临界点 $\pm x_n$，$n=1,2,\cdots,q$，使 $F(\pm x_n)=c_n(\mathfrak{M})$。如所希望的，这些临界

点满足方程 (6.7.8)，定理证完。

刚才得到的结果给出 (6.7.8) 有有限多个不同的解的条件. 现在谈这个结果的一个推广，它对非线性算子方程(它与梯度映射有关)有可数无穷多个不同的解提供了一个准则. 考虑算子方程

$$x = \mathfrak{N}'(x), \quad \mathfrak{N}'(0) = 0. \tag{6.7.11}$$

其中 $\mathfrak{N}'(x)$ 映无穷维 Hilbert 空间H到自身，是 C^1 全连续奇梯度映射. 且有如下性质:

(6.7.12) 对 $x \neq 0$，$(\mathfrak{N}'(tx), x)$是 $t \geqslant 0$ 的严格凸函数，$\mathfrak{N}(x) \leqslant \beta(\mathfrak{N}'(x), x)$，其中 β 是小于 $\frac{1}{2}$ 的某个绝对常数;

(6.7.13) 在 $x \in H$ 的有界子集上，$\lim\limits_{t \to 0}(\mathfrak{N}'(tx), x)/t = 0$ 一致;

(6.7.14) 在H的使$(\mathfrak{N}'(x), x) \geqslant \alpha > 0$(对某个常数 α)的子集上，$\lim\limits_{t \to \infty}(\mathfrak{N}'(tx), x)/t = \infty$ 一致.

定理: 设算子 $\mathfrak{N}'(x)$ 满足上面的条件，那么方程 (6.7.11) 有可数无穷多个不同的解.

关于这个结果的证明可看 Ambrosetti (1973).

6.7C 柔软弹性板的整体平衡状态

我们已经谈到这一章所发展的临界点理论和非线性弹性问题之间的一些联系. 事实上，这些问题提供了最简单的非平凡的例子，通过它们可以由观察来检验这个理论. 这里，我们把注意力转向柔软弹性板的屈曲问题. 早些时候在 4.3B 中也讨论过这个问题. 如那时谈到的，在沿 B 的边界作用的压力下，夹紧的薄弹性板 B 的平衡状态由非线性算子方程

$$u + Cu + \lambda Lu = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1 \tag{6.7.15}$$

的解给出. 这里和那时一样，λ 是作用在 $\partial\Omega$ 上的力的度量. 算子 L 和 C 是从 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身的有界映射，L 是紧的自共轭线性映射，C 是全连续梯度映射，三次齐次，$(Cu, u) > 0$. 当 λ 在区间 $(0, \infty)$ 中变化时，我们来导出关于 (6.7.15) 解的个数的某些信

息．在整个这一节都采用 4.3B 节的定义和记号．我们证明（参看图 6.3）

(6.7.16) **定理** 设对 $u\neq 0$ 有 $(Lu,u)>0$，$u=\lambda Lu$ 的特征值排成 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots$（计及重数），那么

(i) 对固定的 $\lambda\in(\lambda_{n-1},\lambda_n]$，方程 (6.7.15) 至少有 $n-1$ 对不同的解 $(\pm u_j)$，$j=1,2,\cdots,n-1$．

(ii) 设 $R>0$ 是固定的正数，

$$\mathfrak{M}_R=\left\{u\,\middle|\,u\in \mathring{W}_{l,2}(\Omega),\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}(Cu,u)=R\right\},$$

那么方程 (6.7.15) 有可数无穷多个不同的解 $(u_n(R),\lambda_n(R))$，使 (a) $u_n(R)\in\mathfrak{M}_R$，$\lambda_n(R)>\lambda_n$；(b) 当 $n\to\infty$ 时 $\lambda_n(R)\to\infty$；(c) 当 $R\to 0$ 时 $(u_n(R),\lambda_n(R))\to(0,\lambda_n)$．

(iii) 设 λ_n 的重数为 k，$\lambda_{n-1}<\lambda_n$，那么在 $(0,\lambda_n)$ 附近至少有 k 个不同的单参数解族 $(u_{n+i}(\varepsilon),\lambda_{n+i}(\varepsilon))$，$i=0,1,\cdots,k-1$，使得当 $\varepsilon\to 0$ 时 $(u_{n+i}(\varepsilon),\lambda_{n+i}(\varepsilon))\to(0,\lambda_n)$，其中 ε 与 $\|u_n(\varepsilon)\|^2$ 成比例．

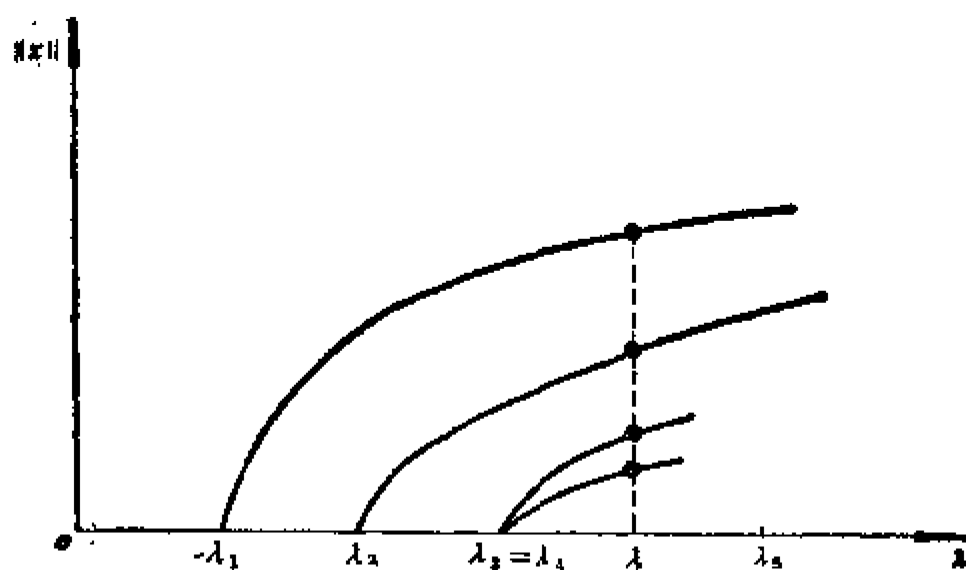


图 6.3 λ_4 和 λ_5 间的四个解对在起端处的性状（从 $\lambda=\lambda_i$ 和 $\|x\|=0$ 发出的分枝表示方程 (6.7.15) 的非平凡解）．

证明：(i)—(iii) 几乎是本章早些时候建立的一般定理的直

接推论。

(i) 的证明： 把定理 (6.7.9) 用到方程 (6.7.15) 就可以建立所要的结论。在现在的情形，在 (6.7.9) 中用 λL 代替算子 L，其中 $\lambda\in(\lambda_{n-1},\lambda_n]$ 固定，用 C 代替 N，那么

$$F(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\lambda(Lu,u)+\frac{1}{4}(Cu,u).$$

显然，(6.7.16) 所引用的二次型就成了 $Q(u)=\|u\|^2-\lambda(Lu,u)$；因为 $\lambda\in(\lambda_{n-1},\lambda_n]$，$Q(u)$ 的指数是 $n-1$。于是，一旦我们证明了当 $\|x\|\to\infty$ 时 $F(x)\to\infty$，就可得到 (i)。因为这时定理 (6.7.9) 的条件全部满足。强制性已经在 6.2B 中证明了。这时从如下的估计式可以得出一个简单的证明。

$$F(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\lambda(\mathscr{B}(u,f),u)+\frac{1}{4}\|\mathscr{B}(u,u)\|^2$$

$$=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2}\lambda(\mathscr{B}(u,u),f)+\frac{1}{4}\|\mathscr{B}(u,u)\|^2.$$

因为对任何 $\varepsilon>0$，$\frac{1}{2}\lambda(\mathscr{B}(u,u),f)\leqslant\frac{\lambda\varepsilon^2}{2}\|\mathscr{B}(u,u)\|^2+\frac{\lambda}{2\varepsilon^2}\|f\|^2$，我们得到，对 $\lambda\varepsilon^2=\frac{1}{2}$，$F(u)\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-\lambda^2\|f\|^2$。因为 λ 固定，于是当 $\|u\|\to\infty$ 时 $F(u)\to\infty$。

(ii) 的证明： 从定理 (6.6.11) 推出结论的第一部分。事实上，如令 $\mathfrak{A}'u=u+Cu$ 和 $\mathscr{B}'u=Lu$ 我们指出定理 (6.6.11) 的条件是不难验证的。例如，为证明 $f(s)=(\mathfrak{A}'(su),u)$ 是 $s\in[0,\infty)$ 的严格递升函数 ($u\neq0$ 固定)，我们注意到，由 Cu 的齐次性，

$$f(s)=s\|u\|^2+s^3(Cu,u),$$

因而

$$f'(s)=\|u\|^2+3s^2(Cu,u)>0,\quad 当\ u\neq0.$$

另一方面，为验证 (6.6.11) 的条件 (iii)，我们看到，如果 $u_n\to u$ 弱收敛，序列 $\{\mathfrak{A}'u_n\}$ 强收敛，那么从 Cu 的全连续性推出 $u_n\to u$ 强

收敛。

由下面的事实可以得到结论的第二部分：解 $\{u_n(R)\}$ 是相应于临界值

$$c_n(R)=\sup_{[V]_n}\inf_{V}\frac{1}{2}(Lu,u)$$

的临界点，其中 V 是 $\mathfrak{M}_R$ 的对称子集，$\mathrm{cat}_{\mathfrak{M}_R/Z_2}(V)\geqslant n$，$[V]_n$ 是 $\mathfrak{M}_R$ 的所有这种子集的类。因为 $\frac{1}{2}\|u\|^2\leqslant R$，所以当 $R\to 0$ 时 $\|u\|\to 0$。于是，由稍加变化的 (6.7.6) 的引理 A—C 推出，当 $R\to 0$ 时 $(u_n(R),\lambda_n(R))\to(0,\lambda_n)$。

(iii) 的证明：换个度量，把方程 (6.7.15) 换成 (6.7.1) 型的方程，就可在定理 (6.7.6) 的基础上证明 (iii)。事实上，在(6.7.15)中令 $u=\sigma v$，其中 $\sigma\neq 0$ 是待定实数。根据 C 的齐次性得出 v 满足方程 $v+\sigma^2Cv=\lambda Lv$。令 $\sigma^2=\lambda$，有

(6.7.17) $$v=\lambda(Lv-Cv),\quad 对\ \lambda>0.$$

把定理 (6.7.6) 用到 (6.7.17)，我们就得到所希望的从 $(0,\lambda_n)$分枝出来的解族。

屈曲弯曲联合问题 如前面 6.2B 中所述，这时的平衡状态由非齐次非线性算子方程（λ固定）

(6.7.18) $$u+Cu-\lambda Lu=f\quad(f\neq 0)$$

的解给出。因为 $f\neq 0$，相应泛函

(6.7.19) $$\varphi_\lambda(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2+\frac{1}{4}(Cu,u)-\frac{1}{2}\lambda(Lu,u)-(f,u)$$

不再关于对径映射对称，所以 (i) 的想法不能用于这个方程。但是我们指出，可把(6.5.10)的 Morse 临界点理论用到泛函 $\varphi_\lambda(u)$ 上去。首先，我们扼要说明一些下面证明中要用到的结论。

(6.7.20) 引理 对固定的 λ，算子 $A_\lambda(u)=u+Cu-\lambda Lu$ 映 $\overset{c}{W}_{2,2}(\Omega)$ 到自身，是一个零指标的 C^∞ 正则非线性 Fredholm 映射。此外，$A_\lambda(u)$ 的奇异值 Φ_λ 构成一个在 H 中无处稠密的闭子集。

证明：从算子 Cu 三次齐次直接推出 A_λ 的 C^∞ 光滑性。此外，一旦我们

证明了 $A_\lambda(u)$ 是零指标的非线性 Fredholm 算子，由 Sard 定理的 Smale 推广(3.1.45)，就可推出 Φ_λ 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中无处稠密．因为 $A_\lambda(u)$ 可以表作恒等算子的光滑紧扰动，从(2.6.3)直接推出 A_λ 是零指标的 Fredholm 算子．

现在介绍6.5D的讨论对(6.7.18)的解的一个应用．

(6.7.21)定理 对每个固定的 λ 和几乎所有的 $f\in\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$(即 $f\in\mathring{W}_{2,2}(\Omega)-\Phi_\lambda$)，(6.7.18)的解是 $\varphi_\lambda(u)$ 的有限多个非退化临界点． 根据 $\varphi_\lambda'(u)$ 的性质，这些临界点满足 Morse 不等式(6.5.10)．更一般地，对任何固定的 f，(6.7.18)总可解，且解 w 的全体满足先验估计

$$(*)\qquad \|w\|_{2,2}\leqslant\frac{\|f\|}{2}+\left(\lambda^2\|F_0\|^2+\frac{1}{4}\|f\|^2\right)^{1/2}.^{*)}$$

而且，如果 $\varphi_\lambda(u)$ 至少有两个孤立相对极小，那么 $\varphi_\lambda(u)$ 有第三个临界点．

证明： 根据引理(6.7.20)，点集 $f\in(\mathring{W}_{2,2}(\Omega)-\Phi_\lambda)$ 在 $\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 中无处稠密，$A_\lambda^{-1}(f)$ 应该由 $\varphi_\lambda(u)$ 的非退化临界点组成．从 A_λ 的性质和隐函数定理推出集合 $A_\lambda^{-1}(f)$ 的有限性．事实上，如果在 $A_\lambda^{-1}(f)$ 中有无穷多个点，因这些点处在一个紧集中，故必有收敛子序列，这与非退化临界点是孤立的相矛盾．由于定义在 H 上的任何正则梯度映射的位势在 H 上自动满足条件(C)，所以当把 $\varphi_\lambda(u)$ 看作定义在 $H=\mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ 上的泛函时，$\varphi_\lambda(u)$ 的这些临界点满足 Morse 不等式(6.5.10)．先验估计(*)也由一个简单的考虑得出．事实上，如果 u 满足 $\varphi_\lambda'(u)=0$，根据(6.7.18)，我们有

$$\|w\|^2+(Cw,w)-\lambda(C(F_0,w),w)=(f,w)^{**)}.$$

于是对任意 $\varepsilon>0$，从 Cauchy-Schwarz 不等式推出

$$\|w\|^2+\|C(w,w)\|^2-|\lambda|\varepsilon\|C(w,w)\|^2-\frac{|\lambda|}{\varepsilon}\|F_0\|^2\leqslant\|f\|\|w\|.$$

令 $\varepsilon=\dfrac{1}{|\lambda|}$，我们得到

$$\|w\|^2\leqslant\|f\|\|w\|+|\lambda|^2\|F_0\|^2,$$

由此就可推出(*)．

(6.7.20)中最后一个结论是从(6.5.3)和如下事实推出来的：当 $\|u\|\to\infty$ 时 $\varphi_\lambda(u)\to\infty$．

---

*) 原书此式有误．——译者注．

**) 关于 F_0 和 $C(u,v)$ 可参看4.3B 和6.2B——译者注．

6.7D 某些非线性波方程的驻状态

我们对定义在 $\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^N$ 上的非线性波方程

(6.7.22) $$u_{tt}=\Delta u-m^2u+f(x,|u|^2)u \text{ 或}$$

(6.7.23) $$-iu_t=\Delta u+f(x,|u|^2)u$$

求某个特殊形式的解 $u(x,t)=e^{i\lambda t}v(x)$，它是复值的时间周期解，其中 λ 是实数，$v(x)(\neq 0)$ 是实值光滑函数，在∞点按指数幂消失为 0，$f(x,|u|^2)$ 是 x 的 C^1 正泛函，对$|u|^2$ 是奇的. 这样的解正好是线性 Schrödinger 方程驻状态的非线性推广，因而我们把这些解称作驻状态.

把 $u(x,t)=e^{i\lambda t}v(x)$ 代入上面任一个波动方程，我们看到 $v(x)$ 满足半线性椭圆方程

(6.7.24) $$(\Delta-\beta)v+f(x,v^2)v=0,\quad x\in\mathbf{R}^N,$$

其中，在 (6.7.24) 的情形 $\beta=\lambda^2-m^2$，在 (6.7.23) 时 $\beta=\lambda$.

为考察 (6.7.22) 或 (6.7.23) 的驻状态，我们对函数 $f(x,y)$ 加以限制，并

(a) 决定 β 的值，对这些值 (6.7.24) 在 $L_2(\mathbf{R}^N)$ 中有非平凡解，

(b) 对固定的 $\beta>0$，证明在 $L_2(\mathbf{R}^N)$ 中 (6.7.24) 有可数无穷多个不同的解.

为回答 (a)，(b) 二者，我们讨论特殊的"非线性"现象.

我们由考虑问题 (a) 开始，分两种情形，

(I) 对所有的 u，有

$$0<f(x,|u|^2)=g(x)|u|^\sigma,$$

其中 $0<\sigma<4/(N-2)$，当$|x|\to\infty$ 时 $g(x)\to 0$；或

(II) $f(x,|u|^2)$ 与 x 无关，$f(|u|^2)=g|u|^\sigma$，其中 g 是某个正数.

(6.7.25) **定理** 设 $f(x,|u|^2)$ 满足条件 (I) 或 (II)，那么 (6.7.24) 有解 $v(x)\in L_2(\mathbf{R}^N)$，附加条件为:

(i) 在情形 (I)，需 $\beta>0$;

(ii) 在情形 (II)，当且仅当 $\beta > 0$ 和 $\sigma < 4/(N-2)$。

证明： (i)：这个结果是 6.3A 一节的结果以及下列事实的直接推论：由

$$(\mathfrak{N}'(v), \Phi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, v^2) v \Phi, \quad \Phi \in W_{1,2}(\mathbf{R}^N)$$

定义的梯度映射是全连续算子，它映 $W_{1,2}(\mathbf{R}^N)$ 到自身（可看第一章的注记）。

(ii)：当 $f(x, v^2) = cv^\sigma$ 时，我们首先证明条件 $\sigma < 4/(N-2)$ 的充分性。请注意不能直接引用这一章的结果。这是因为和 $c|u|^\sigma u$ 一项对应的算子在 $W_{1,2}(\mathbf{R}^N)$ 中不全连续，虽然它有界且连续。为克服这个困难，我们找 (6.7.24) 的径向对称解，即仅依赖于 $|x| = r$ 的解。作变量代换 $r^{\frac{N-2}{2}} v(r) = w(r)$，那么 $w(r)$ 在 $r = 0$ 时为 0，对 $\beta > 0$ 和 $0 < \sigma < \frac{4}{N-2}$ 满足方程

$$(\dagger) \qquad \frac{d^2 w}{dr^2} - \beta w + g r^{-\sigma} |w|^\sigma w = 0.$$

这个方程有非平凡解 w。事实上，如果把(†)改写成 $H = \mathring{W}_{1,2}(0, \infty)$ 中的算子方程，该空间中的范数为

$$\|w\|_H^2 = \int_0^\infty (w_r^2 + \beta^2 w^2) dr,$$

该算子由对偶方法定义为

$$(\mathfrak{N}'(w), \Phi) = \int_0^\infty g r^{-\sigma} |w|^\sigma w \varphi, \qquad 0 < \sigma < \frac{4}{N-2},$$

那么它是 H 到自身的全连续映射（又参看第一章的注记）。于是由 (6.3.2) 的一个应用和 $g r^{-\sigma} |w|^\sigma w$ 一项的齐次性，(6.3.2) 中引理的 Lagrange 乘子可以选为 1。由衰减放大原则的推论，直接推出 $w(r)$，从而 $v(r)$ 在∞点按指数幂衰减。在 1.2 节曾谈到这个衰减放大原则。

为证条件 $0 < \sigma < \frac{4}{N-2}$ 和 $\beta > 0$ 的必要性，我们首先回想

起，当 $\beta > 0$ 时可由 1.2 节中的初等工具得到 $\sigma < \frac{4}{N-2}$ 的必要性证明，如果 $\beta < 0$，又是从 1.2(iv) 中提到的结果得出不可能存在这种 $v(x)$. 最后，如果 $\beta = 0$ 和 $\sigma = \frac{4}{N-2}$，由线性椭圆偏微分方程较深入的性质得到不存在解 $v(x) \in L_2(\mathbb{R}^N)$ 的结论，事实上，设$w(x)(\neq 0)$是这样一个函数，它在∞点按指数衰减，在$\mathbf{R}^3$ 上满足 $\Delta w + |w|^{\frac{4}{N-2}}w = 0$. 把 w 看作线性方程 $\Delta w + g(x)w = 0$ 的解，其中 $g(x) = |w|^{\frac{4}{N-2}}$，对这个方程进行了 Kelvin 变换后，在原点 w 有一个无穷阶的极点，这与被变换方程 $\Delta w + g(x)w = 0$ 的一致连续性相矛盾，由此推出所要的结论.

现在考虑问题 (b)，设函数

(6.7.26)
$$f(x, v^2) = \sum_{i=1}^{p} g_i(x)|v|^{\sigma_i},$$

其中 $0 < \sigma_i < \frac{4}{N-2}$, $g_i(x) > 0$ ($g_i(x)$ 不全恒为 0). 且

(1) 当 $|x| \to \infty$ 时 $g_i(x) \to 0$，或者

(2) 每个 $g_i(x)$ 是常数.

(6.7.27) **定理** 设函数 $f(x, v^2)$ 满足上面的条件 (1) 或 (2). 如果 $p = 1$，那么方程 (6.7.24) 有可数无穷多个不同的解；对 $p > 1$，满足 (6.7.24) 的解彼此相差一个特征值因子.

证明: 证明基于定理 (6.6.11) 的应用. 由假定 $f(x, v^2)$ 满足 (1) 开始，那么，由下式隐含定义的算子

$$(\mathfrak{N}'(u), v) = \sum_{i=1}^{p} \int g_i(x)|u|^{\sigma_i}uv$$

是 $W_{1,2}(\mathbb{R}^N)$ 到自身的全连续梯度映射，

$$\mathfrak{N}(u) = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sigma_i + 2} \int_{\mathbb{R}^N} g_i(x)|u|^{\sigma_i+2}.$$

因为 $\sigma_i > 0$，有常数 $\alpha < \frac{1}{2}$，使对所有的 $u \in W_{1,2}(\mathbb{R}^N)$，$\mathfrak{N}(u) \leqslant$

$\sigma(\mathfrak{N}'(u), u)$. 读者不难验证算子 $\mathfrak{N}'$ 满足 (6.6.11) 其余的条件.

如果 $f(x, v)$ 满足条件 (2),我们象在定理(6.7.25)的证明中那样做,考虑方程

$$(6.7.28) \qquad \frac{d^2w}{dr^2} - \beta w + \sum_{i=1}^{p} g_i r^{-\sigma_i}|w|^{\sigma_i}w = 0,$$

其中 $w(r) = r^{\frac{N-1}{2}}v(r)$, $w(0) = 0$. 和以前一样,由

$$(\mathfrak{N}'(w), \Phi) = \sum_{i=1}^{p} \int_0^\infty g_i r^{-\sigma_i}|w|^{\sigma_i}w\Phi$$

定义的算子 $\mathfrak{N}'(w)$ 是全连续梯度映射,映 $\mathring{W}_{1,2}(0,\infty)$ 到自身. 而且和上一节一样,不难验证引用定理 (6.6.11) 时所必需的条件.于是和上面的 (ii) 相同,对相应的特征值重换一个度量单位后,就得到了要证的定理.

6.7E 紧 Riemann 流形上两点间的短程线

设 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 是 N 维紧光滑 Riemann 流形,尺度张量为 g. 如采用局部坐标, $\mathfrak{M}^N$ 上两点 a 和 b 间的短程线是如下二阶常微分方程组(通过 a, b) 的解

$$(6.7.29) \qquad \frac{d^2x^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{N} \Gamma^k_{i,j}(x)\frac{dx^i}{dt}\cdot\frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1,2,\cdots,N.$$

或者说,这些短程线是弧长函数 $\int_a^b ds$ 关于 $\mathfrak{M}^N$ 上通过 a, b 的所有光滑曲线的临界点. 在连接 a 和 b 的短程线的结构的研究中,短程线下面这个特征及其变形是有用的. 最简单的基本结果属于 Hilbert.

(6.7.30) 对光滑、紧(连通) Riemann 流形上任二点 a, b, 都有连接它们的长度最小的短程线.

证明: 考虑 $(\mathfrak{M}^N, g)$ 上连接 a, b 的可求长曲线类 $K_{a,b}$. 因为 $\mathfrak{M}$ 连通,这个类不空,我们把 $K_{a,b}$ 的曲线 c 参数化,令参数 $\tau = \frac{s}{L}$,

其中 L 是 $K_{a,b}$ 中曲线的长度，s 是从起点 a 计算的弧长. 对这个参数化，所求的短程线是泛函 $\varphi(c)=\int_0^1 ds^2$ 的临界点. 显然，由 Lebesgue 积分的性质，对 $K_{a,b}$ 中的一致收敛 $\varphi(c)$ 下半连续. 记 $\varphi_0=\inf\limits_{K_{a,b}}\varphi(c)$. 我们证明可由 $K_{a,b}$ 中某元素 c_0 达到 φ_0. 为此只需证明 $K_{a,b}$ 中的有有界长度的曲线的集合紧. 于是，令 $\{c_n(\tau)\}$ 是 $K_{a,b}$ 中的曲线序列，它们的长度 $L(c_n)\leqslant M$，那么对任意 $\tau_1,\tau_2\in[0,1]$ 和固定的 n，有

(6.7.31) $\quad d(c_n(\tau_1),c_n(\tau_2))=L(c_n)|\tau_1-\tau_2|\leqslant M|\tau_1-\tau_2|$,

其中 $d(x,y)$ 记 x, y 之间的 Riemann 距离. 从而在看作从 $[0,1]\longrightarrow(\mathfrak{M}^N,g)$ 的连续映射时，$\{c_n\}$ 一致有界，等度连续. 根据 Arzela-Ascoli 定理，$\{c_n\}$ 有一致收敛子序列，它的极限又是可求长曲线，这是因为由 (6.7.31) 有

$$d(c_0(\tau_1)-c_0(\tau_2))\leqslant M|\tau_1-\tau_2|.$$

引用 6.5 和 6.6 的结果可对连接 a, b 的短程线进行更深入的研究. 事实上，假定 $(\mathfrak{M}^N,g)$ 作为闭子流形等距嵌入到 Euclid 空间 $\mathbb{R}^{k(N)}$, $\mathbb{R}^{k(N)}$ 的维数足够高. 设 $W_{1,2}([0,1],(\mathfrak{M}^N,g))$ 是 Hilbert 空间 $H=W_{1,2}([0,1],\mathbb{R}^{k(N)})$ 的闭子集，它由那些象 $c[0,1]\subset\mathfrak{M}^N$ 的元素 $c(\tau)\in H$ 组成，则 $W_{1,2}([0,1],(\mathfrak{M}^N,g))$ 是一个 Hilbert 流形. 如用 $\Omega(\mathfrak{M}^N;a,b)$ 记 $W_{1,2}([0,1],(\mathfrak{M}^N,g))$ 的一个闭子集，它由满足 $c(0)=a$, $c(1)=b$ 的 $c(\tau)\in W_{1,2}([0,1],(\mathfrak{M}^N,g))$组成，其中 a, b 是 $\mathfrak{M}^N$ 中固定的点. 那么，$\Omega(\mathfrak{M}^N;a,b)$ 也是 Hilbert 流形. 我们用$\langle c(\tau),c(\tau)\rangle^{\frac{1}{2}}$ 记向量 $c(\tau)$ 的长度，那么泛函

$$\varphi(c)=\int_0^1\langle\dot{c}(\tau),\dot{c}(\tau)\rangle d\tau=\int_c ds^2$$

在空间 $\Omega(\mathfrak{M}^N,a,b)$ 中的临界点就与 $(\mathfrak{M}^N,g)$ 上连接 a, b 的短程线一致. 如果 $\mathfrak{M}^N$ 同胚于球面 S^N，可用 (6.5.12) 证明，在 $(\mathfrak{M}^N;g)$ 上存在无穷多条不同的短程线连接 a, b. 事实上可以证明，在 $\Omega(\mathfrak{M}^N;a,b)$ 上泛函 $\varphi(c)$ 满足条件 (C), (6.5.2). 那么

只要能够证明对无穷多个不同的整数有 $Q(\mathfrak{M}^N; a, b)$ 的 Betti 数不为 0，结果就出来了. 已经知道，$Q(\mathfrak{M}^N; a, b)$ 的 Betti 数 R_i 构成一个长度为 $(N-1)$ 的周期序列，它由这样的数组成，当 $i \equiv 0\ (\mathrm{mod}(N-1))$ 时为 1，在其余处为 0，本书末的附注 B 介绍了这个课题其它有意思的结果，一些专著已对这个课题进行了充分的讨论. 如想作进一步的了解，我们向读者推荐 Morse (1934)，Schwartz (1969) 的书，以及 Palais (1963) 的文章.

注　　记

A　具常平均曲率的参数曲面的 Dirichlet 问题

设 Ω 是 $u-v$ 平面上的单连通区域，其边界为 $\partial\Omega$，我们希望决定一个参数曲面 $S=\{X(u,v)=(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))\}$，它定义在 Ω 上，有常平均曲率 M，在 $\partial\Omega$ 上有指定的光滑边界值 f. 确定 S 的偏微分方程组是

(*)　　$\Delta X = 2M\dfrac{\partial X}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial X}{\partial v}$，　　在 Ω 中

(**)　　$X|_{\partial\Omega} = f$.

这里 $\dfrac{\partial X}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial X}{\partial v}$ 记 $(\partial x_1/\partial u, \partial x_2/\partial u, \partial x_3/\partial u)$ 和 $(\partial x_1/\partial v, \partial x_2/\partial v, \partial x_3/\partial v)$ 的向量积. 如令 $X(u,v)=F(u,v)+Y(u,v)$，其中 $F(u,v)$ 是 Ω 中的三维调和向量，满足条件(**)，则问题可以化简. 于是我们只需找一个定义在 Ω 上的 C^2 三维向量 $Y(u,v)$，它满足(*)和齐次边界条件 $Y\big|_{\partial\Omega}=0$. 为确定函数 Y，假定 $M<\dfrac{3}{2}R$，求泛函

$$\varphi(Y)=\iint_{\Omega}\left\{|\nabla Y|^2+\frac{4}{3}MY\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\wedge\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\right\}dudv$$

在集 $W_R=\overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)\cap\Sigma_R$ 上的极小，其中 Σ_R 记 $\bar{\Omega}$ 上使 $\operatorname{ess\,sup}|Y(u,v)|\leqslant R$ 的连续向量函数. 显然，如果 $\bar{Y}\in\overset{\circ}{W}_{1,2}(\Omega)\cap\Sigma_R$，$|\bar{Y}|_{L_\infty}\leqslant R$ 达到 $\varphi(Y)$ 在 W_R 上的下确界，那么对所有的试验函数 $\zeta\in W_{1,2}(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$，

$$\iint_{\Omega}\left[\nabla\bar{Y}\cdot\nabla\zeta+2M\left(\frac{\partial\bar{Y}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\bar{Y}}{\partial v}\right)\cdot\zeta\right]dudv=0.$$

于是，根据在 1.5 节中提到的正则性结果，只要我们能证明在 $\bar{Y}$ 达到下确

界，并且 $|\tilde{Y}|\leqslant R$，那么 $\tilde{Y}$ 满足(*)以及齐次边界条件 $\tilde{Y}|_{\partial\Omega}=0$. 事实上，可以证明

定理 假设$|M|<1$，$\sup\limits_{\partial\Omega}|f|\leqslant 1$，那么(*)有解满足(**)，且有界$\sup\limits_{\Omega}|X|\leqslant 1$.

结果分两步得出，第一步证明上面提到的极小化问题有解 $\tilde{Y}$，其次，对 $|M|<1$，证明 $\tilde{Y}$ 有界. 关于这些证明建议读者去看 Hildebrandt 和 Widman 的文章(1971).

B Marston Morse 关于紧 Riemann 流形 $(\mathfrak{M}, g)$ 上两点 P, Q 间的测地线的结果

设 S^N 具常曲率尺度，P, Q 是 S^N 上两点，它们不是对径点. 那么不难求出 P, Q 间的测地线，这些测地线和整数一一对应. 当按照长度排列并依次记作 $g_0, g_1, \cdots, g_n, \cdots$ 时，不难求出 g_n 的 Morse 指数为$(N-1)n$. 这里我们可以把整数 n 和 g_n 的内部包含 P 的对径点的次数联系起来. 对于$(\mathfrak{M}, g)$上两个固定点 P, Q 间的测地线 $(\dim\mathfrak{M}=N)$，这个结果有如下推广:

(i) 弧长函数 J 有临界点的必要充分条件是该临界点对应于由弧长参数化的$(\mathfrak{M}, g)$的测地线；P, Q 间的测地线全部部非退化的充要条件是 Q 不是 P 的共轭点，而且它们构成$(\mathfrak{M}, g)$的零测集.

(ii) 当 P 和 Q 不是关于 $(\mathfrak{M}, g)$ 的共轭点时，J 的临界点全都有有限的 Morse 指数，这个指数正是一个端点在相应测地线内部中共轭点的个数(计及重数).

C 大范围变分法在计算同伦群中的应用

在6.7节中，6.5节关于无穷维 Morse 理论的结果被用于从拓扑信息得出临界点存在性的结果. 实际上，反过来，即应用定义在紧流形 $\mathfrak{M}$ 上的标准函数(譬如说弧长函数)的临界点的资料以决定 $\mathfrak{M}$ 的有关拓扑已是相当成功的. 用这个方法可以得到很多与同伦群有关的有趣的结果. 于是，用本注记 B 条中的结果可以证明 Freudenthal 同纬映射定理(1.6.8)的第一部分，这个定理和球面间的伦群有关. 用这个方法 Bott 和 Samelson 得出了经典 Lie 群同伦论的很多材料. 关于这些结果的详情，有兴趣的读者可去读 Milnor 的专著(1963).

这方面的一个典型结果是下面的周期性定理，它是关于圈空间 $\Omega(S^N)$的

同调性的:

$$(*)\qquad H_q(\Omega(S^N))\approx\begin{cases}\mathbf{Z}, & q=0(\bmod(N-1)),\\ 0 & \text{其它}.\end{cases}$$

Bott 发现,对很多 Lie 群的同伦群来说,这个周期性现象仍然成立. 此外,从($*$)可以计算附录A中提到的上同调环 $H_*(\Omega(S^N))$. 从6.5节和6.6节的一般临界点理论可以断定,对于 S^N 上的一切 Riemann 度量以及任两个不同的点 $P, Q\in S^N$,都有无穷多条测地线连接 P 和 Q.

D Ljusternik-Schnirelmann 型不变量对等变化映射的应用

在6.6节中,拓扑不变量(诸如集的畴数)用于讨论偶泛函的临界点的存在性. 这些拓扑不变量也可用于研究其它等变算子的映射性质. 一个例子是下面的 Borsuk-Ulam 定理的推广 (Holm 和 Spanier, 1971).

定理 设 C 是定义在 Banach 空间 X 的单位球面 $\partial\Sigma$ 上的任一紧映射, $\partial\Sigma=\{x|x\in X, \|x\|=1\}$, $f=I+C$, 若 $f(\partial\Sigma)$ 位于 X 的余维为 k 的子空间内,那么

$$\dim\{x|f(x)=f(-x), x\in\partial\Sigma\}\geqslant k-1.$$

E 参考文献

6.1 节: 这节的结果是变分学中所谓直接法的推广. 这些方法可以追溯到 Lebesgue (1907) 和 Hilbert (1900). 在 Tonelli (1921, 1923) 的工作中讨论了下半连续概念的各种形式. 书中所述的紧性条件 (C) 首次由 Palais 和 Smale (1964) 提出. 在 Berger 和 Schecter (1977) 中可以找到关于定理(6.1.8)中的极小化方法的说明. (6.1.20) 可在 Ladyhenskaya 和 Uralsteva (1968) 的书中查到. 方程(6.1.30)的结果出自 Berger 和 Fraenkel (1970) 的文章.

6.2 节: (6.2.5)取自 Berger (1975), 那里对它和代数流形间的关系给出了更完全的讨论. 在 Berger (1967, 1971) 中可找到关于弹性板与弹性壳的工作. Nitsche (1974) 讨论了 Plateau 问题,我们的证明是 Garabedian (1964) 证法的改进. (6.2.28) 取材自 Berger 和 Wightman 尚未发表的文章.

6.3节: 本节的内容可在 Berger (1973) 以及 Berger 和 Schechter (1977) 中找到.

6.4节: 关于 Hamilton 系统的大振幅周期解的讨论基于 Berger (1971b),而它对 Kepler 扰动问题的应用则根据 Berger 和 Arensdorf 的尚未发表的工

作. 关于指定曲率的度量的讨论基于 Berger (1975) 以及 Yamabe (1960), 这些结果已经由 Kazdan 和 Warner (1975) 以及 Moser (1973) 推广. 关于稳态旋涡环的讨论可以在 Fraenkel 和 Berger (1974) 中找到.

6.5 节和 6.6 节: Hilbert 空间中 Morse 理论的讨论取材自 Rothe (1973) 和 Smale (1964). 一个更详尽的文献是 Palais 的文章 (1963). 在 Berger 和 Podolak (1977) 中有对 (6.5.16) 的说明. 在 Schwartz (1964) 和 Palais (1966) 的文章中, 或在 Ljusternik (1966) 的书中, 都有关于 Ljusternik-Schnirelmann 临界点理论的讨论. 这个结果对非线性特征值问题的应用的参考文献可见 Browder (1965). (6.6.11) 的证明属于 Amann (1972).

6.7 节: Ljusternik-Schnirlmann 理论对分歧理论的应用属于 Berger (1970), 关于这个课题较新的文章有 Bohme (1973) 以及 Riddell (1975). (6.7.9) 中的想法属于 Clark (1973). 关于结果 (6.7.11) 可看 Ambrosetti (1973). 在 Berger (1974) 的文章中可以找到一般临界点理论对非线性弹性问题的应用. 关于非线性稳定状态的讨论基于 Berger (1972).

F 关于重数保持定理 (6.7.6)

这个定理再次表明, 与 Thom 突变理论的代数方法相比, 在退化临界点的研究中应用整体性拓扑方法的重要性. 这时, 如不满足 Liapunov 的无理性条件(这条件和线性化方程的第 i 个正规方式有关), 就推出和这个方式相应的特征值 λ_i 不是单重的, 破坏条件的次数可解释为 λ_i 的重数. 并且, 由保持定理推出, 非线性 Hamilton 扰动并不破坏第 i 个正规方式, 只不过不再保持周期性, 这个问题已陈述在 Berger 的文章中 (1969, 1970a). 对这个问题的交替有限维逼近已由 Weinstein 和 Moser 实现. 如在书中提到的, 重数保持定理的价值在于它提供了一个方法, 把这些非线性正规方式和大振幅"连接"起来, 进一步的结果期待对特征值"分枝"连续性的研究. 可以指出, 例如在定理 (6.4.2) 中所讲的解的周期, 随着递降的振幅, 趋近于线性化方程(如果非平凡)的最小非零周期.

附录A 微分流形

集合 $\mathfrak{M}$ 称作N维流形，如果 $\mathfrak{M}$ 是个 Hausdorff 空间，并且每点 $x\in\mathfrak{M}$ 都有一个邻域 W_x 和 $\mathbf{R}^N$ 中某个开子集同胚．集合 $\mathfrak{M}$ 称作 C^k 类的微分流形，如果 $\mathfrak{M}$ 可以用开集族 O_α 覆盖（O_α 称作坐标卡），每个 O_α 通过一个 C^k 映射 h_α 和 $\mathbf{R}^N$ 中一个开集同胚，并且，在任意两个坐标卡的交上，坐标变换 $h_\alpha h_\beta^{-1}$: $h_\beta(O_\alpha\cap O_\beta)\to\mathbf{R}^N$ 是 C^k 光滑映射．微分流形 $\mathfrak{M}$ 称作可定向的，如果它可由上述的坐标卡所覆盖，且坐标变换 $h_\alpha h_\beta^{-1}$ 的 Jacobi 为正．连通的一维微分流形是不难描述的．

任一连通的一维微分流形微分同胚于一个圆周，或实数轴上的某个开区间．

微分流形 $\mathfrak{M}$ 的子集V称作 $\mathfrak{M}$ 的一个 r 维子流形，如果有坐标卡族 $\{O_\alpha\}$ 覆盖 $\mathfrak{M}$，使 $\{O_\alpha\cap V\}$ 是覆盖 V 的坐标卡族，并且，如 $x=(x_1,\cdots,x_N)$ 是在 O_α 中的局部坐标，那么

$$O_\alpha\cap V=\{x\,|\,x_{r+1}=x_{r+2}=\cdots=x_N=0\}.$$

对微分几何中的问题来说，流形上的微积分的研究是本质的．一般这可由在 $\mathfrak{M}$ 的坐标卡 O_α 中引进局部坐标 $(x_1,\cdots,x_N)$ 作到（把 $(x_1,\cdots\cdots,x_N)$ 看作 $\mathbf{R}^N$ 中的点）．事实上，对 $x\in O_\alpha$，每个映射 h_α: $O_\alpha\to\mathbf{R}^N$ 可以写成$h_\alpha(x)=(\zeta_1(x),\zeta_2(x),\cdots,\zeta_n(x))=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$．

在 $\mathfrak{M}$ 上引进单位分解的概念也是有用的（即 $\mathfrak{M}$ 的局部有限覆盖 $\mathscr{V}$，以及 $\mathfrak{M}$ 上实值非负光滑函数 f_V 的集合，$V\in\mathscr{V}$，f_V 的支集均包含于 V，且 $\sum\limits_{V\in\mathscr{V}}f_V(x)=1$）．于是，为定义 $\mathfrak{M}$ 上实值函数 g 对于微元 dV的积分，设 (V_j,f_j) 是$\mathfrak{M}$上的任一单位分解，令

$$\int_{\mathfrak{M}}gdV=\sum_j\int_{V_j}f_jgdV.$$

因为可以把 V_j 选得从属于坐标卡 O_α，所以右端的每一项都可以用局部坐标赋值。此外，这个定义与所用到的单位分解无关。因为如果 (W_k, ϕ_k) 是另外的任一单位分解，我们有

$$\sum_j \int_{V_j} f_j g dV = \sum_{j,k} \int_{V_j \cap W_k} f_j \phi_k g dV$$
$$= \sum_k \int_{W_k} \phi_k g dV.$$

对于解决微分几何中的许多问题来说(参看 1.2A)，微分形式的应用是本质的，而在定义流形 $\mathfrak{M}$ 上的微分形式时，局部坐标又是很有用的。事实上，可以从定义开集 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 上的微分形式开始，然后再扩展到 $\mathfrak{M}$ 上的定义。

$\mathbf{R}^N$ 中开集 Ω 上的 C^k 类 p 次微分形式(记作 $\Lambda_p^{(k)}(\Omega)$)定义为

$$(*) \qquad \omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_p} c_{i_1 i_2 \cdots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

其中函数 $c_{i_1 \cdots i_p}(x) \in C^k(\Omega)$，整数 $i_1, \cdots, i_p$ 大于等于 1，小于等于 N。两个这样的微分形式可以按分量相加。还可以用如下步骤定义两个形式 $\omega \in \Lambda_p^{(k)}(\Omega)$，$\omega' \in \Lambda_q^{(k)}(\Omega)$ 的外积 $\omega \wedge \omega' \in \Lambda_{p+q}^{(k)}(\Omega)$：

(i) 对指标 $i_1, \cdots, i_p$ 的任意排列 σ，

$$dx_{\sigma(i_1)} \wedge dx_{\sigma(i_2)} \cdots \wedge dx_{\sigma(i_p)} = \operatorname{sgn}(\sigma) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p},$$

其中 $\operatorname{sgn}(\sigma)$ 是排列 σ 的符号。

(ii) 如果 ω 定义如上，

$$\omega' = \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_q} b_{j_1 j_2 \cdots j_q} dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q},$$

那么

$$\omega \wedge \omega' = \sum c_{i_1 \cdots i_p}(x) b_{j_1 \cdots j_q}(x) (dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}),$$

其中和号取遍所有指标 $i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q$。如果

$$\Lambda^k(\Omega) = \sum_p \Lambda_p^{(k)}(\Omega),$$

那么 $\wedge^k(\Omega)$ 在加法和外积运算下构成一个环.

由 (*) 定义的形式 $\omega\in\wedge_p^{(k)}(\Omega)$ 的外导数 $d\omega\in\wedge_{p+1}^{(k-1)}(\Omega)$ 仍是一个形式,它定义如下: 对任意函数 f, 令

$$df=\sum_i(\partial f/\partial x_i)dx_i,$$

以及

$$d\omega=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}d(c_{i_1\cdots i_p})dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p},$$

运算 d 有如下性质:

(i) $d(\omega+\omega_1)=d\omega+d\omega_1$,

(1) (ii) $d(\omega\wedge\omega')=d\omega\wedge\omega'+(-1)^p\omega\wedge d\omega'$,

(iii) $d^2\omega=d(d\omega)=0$.

微分形式在坐标变换下的变换是非常精致的. 如果 $f=(f_1,\cdots,f_N)$ 是从 V 到 Ω 上的光滑映射, 我们可以定义一个映射 f_*: $\wedge_p^{(k)}(\Omega)\to\wedge_p^{(k)}(V)$. 设 ω 由 (*) 定义,那么令

$$f_*(\omega)=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}c_{i_1\cdots i_p}(f(x))df_{i_1}\wedge\cdots\wedge df_{i_p}.$$

映射 f_* 有如下重要性质:

(i) $f_*(\omega+\omega_1)=f_*(\omega)+f_*(\omega_1)$,

(ii) $f_*(\omega\wedge\omega')=(f_*\omega)\wedge(f_*\omega')$,

(2) (iii) $d(f_*\omega)=f_*d\omega$,

(iv) 如果 $f:U\to V$, $g:V\to W$, 那么 $(g\circ f)_*=f_*\circ g_*$. 于是,微分形式的外导数与所取的坐标无关.

应用前面的讨论以及坐标映射 h_α 的性质,我们可以以自然的方式定义 C^k 流形 $\mathfrak{M}$ 上的 C^S 类 p 次微分形式, 它记作 $\wedge_p^{(S)}(\mathfrak{M})$. 如果在 U 上 $\omega(x)$ 可以用局部坐标写成

$$\omega(x)=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p}\zeta_{i_1\cdots i_p}(x)dh_{\alpha_{i_1}}\wedge dh_{\alpha_{i_2}}\wedge\cdots\wedge dh_{\alpha_{i_p}},$$

那么 ω 是 $\mathfrak{M}$ 上 C^S 类的 p 次形式. 这个定义与用到的局部坐标无关, 而且和前面一样, 外积和外微分都可以用同样的方法在 $\wedge_p^{(S)}(\mathfrak{M})$上定义. 它们也有性质 (1) 和 (2).

De Rham 上同调群

设 $\mathfrak{M}$ 是一光滑的 N 维流形，用 $\wedge_p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 记定义在 $\mathfrak{M}$ 上，在 $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{M}$ 中为 0 的 p 次光滑微分形式的向量空间. 那么外微分算子

$$d: \wedge_p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \to \wedge_{p+1}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

令 $Z^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathrm{Ker}\, d$，$B^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathrm{Range}\, d$，定义 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 的 p 阶 de Rham 上同调群为

$$H^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = Z^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})/B^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

下面的定理成立

定理 De Rham 上同调群是 $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 的拓扑不变量.

为讨论 (6.6.9) 中提到的上积长度概念，我们可用 De Rham 上同调群. 事实上，可以根据定义在 $\mathfrak{M}$ 上的两个微分形式的外积，定义 $\sum_{p=0}^{\dim} H^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 上一个环结构，于是 $\sum_{p=0}^{N} \wedge_p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 是外积运算下的结合代数，

$$Z(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \sum_{p=0}^{N} Z^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$$

为子代数，$B(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \sum_{p=0}^{N} B^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 为 $Z(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ 中理想. 于是

$$\begin{aligned}\sum_p H^p(\mathfrak{M},\mathfrak{N}) &= \sum_p Z^p(\mathfrak{M},\mathfrak{N})/B^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})\\ &\approx Z(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})/B(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})\end{aligned}$$

也是一个结合代数. 因而有上同调群间的积运算 $\cup$（上积）

$$H^p(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \cup H^q(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) \to H^{p+q}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}).$$

那么整数上积长度是 $H^*(\mathfrak{M})$ 的上积不为 0 的非零元素的最大数目.

复 流 形

现在考虑微分流形上的复结构. 一个偶数维（$2N$ 维）的流形

$\mathfrak{M}$ 称作**复流形**，如果可以用这样的坐标卡来覆盖 $\mathfrak{M}$：在每个坐标卡中，局部的 $2N$ 个实坐标可由正规复坐标 $z_1, \cdots, z_N$ 表出，且使重合部分的局部坐标间的坐标映射可以由 $z_1, \cdots, z_N$ 的复解析函数给出。

定义这种复流形的微分形式有着特别之处。于是 $\wedge_1^{(k)}(\mathfrak{M})$ 可以分解成形式的两个空间：一个由称作 (1,0) 型的 $dz_1, \cdots, dz_N$ 张成，另一个由称作 (0, 1) 型的复共轭 $d\bar{z}_1, \cdots, d\bar{z}_N$ 张成（亦即 $\wedge_1^{(k)}(\mathfrak{M}) = \wedge_{1,0}^{(k)}(\mathfrak{M}) + \wedge_{0,1}^{(k)}(\mathfrak{M})$）。我们还指出，在坐标的解析变换下这个分解不变。

外微分算子 d 自然就分解成 $d = \partial + \bar{\partial}$，其中

(i) 对函数 $f = f(z, \bar{z})$，在前面的约定下，

$$\partial f = (\partial f / \partial z_k) dz_k \quad 和 \quad \bar{\partial} f = (\partial f / \partial \bar{z}_k) d\bar{z}_k;$$

(ii) $$\partial(c\, dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_p}) = (\partial c) dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_p},$$

对 $\bar{\partial}$ 有类似的式子成立。

于是 ∂ 映 $\wedge_{p,q}(\mathfrak{M}) \to \wedge_{p+1,q}(\mathfrak{M})$，$\bar{\partial}$ 映 $\wedge_{p,q}(\mathfrak{M}) \to \wedge_{p,q+1}(\mathfrak{M})$，且 $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$。

附录B 微分形式的 Hodge-Kodaira 分解

在任一光滑紧流形 $\mathfrak{M}$ 上，通过 2 次形式

$$g = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

可以引进 Riemann 度量．对于这个度量，我们可以对定义在 $\mathfrak{M}$ 上的 p 次微分形式 $\wedge_p(\mathfrak{M})$ 定义 L_2 内积，以及，由令

$$\langle d^T\omega, \omega_1\rangle = \langle \omega, d\omega_1\rangle$$

定义外微分算子 d 的形式共轭算子 d^T．然后就可定义 Laplace Beltrami 算子

$$\Delta = dd^T + d^Td, \quad \text{在 } \wedge_p(\mathfrak{M}) \text{ 上}$$

显然，Δ 映 $\wedge_p(\mathfrak{M})$ 到自身，自共轭，和 d, d^T 可换，当且仅当 $d\omega = d^T\omega = 0$ 时 $\Delta\omega = 0$．使 $\Delta\omega = 0$ 的形式 ω 称作调和的．

现在谈谈紧流形类似于光滑向量场的分解的类似物．

定理 如果 $\omega \in \wedge_p^1(\mathfrak{M})$，则有 $p-1$ 次形式 ω_1，$p+1$ 次形式 ω_2，以及调和 p 次形式 H，使

$$\omega = d\omega_1 + d^T\omega_2 + H,$$

在如下意义下，形式 $d\omega_1$，$d^T\omega_2$ 和 H 唯一确定：如果又有 $\omega = d\bar{\omega}_1 + d^T\bar{\omega}_2 + \bar{H}$，那么 $d\bar{\omega}_1 = d\omega_1$，$d^T\omega_2 = d^T\bar{\omega}_2$，$H = \bar{H}$．此外，调和 p 次形式的空间的维数有限，它等于 $\mathfrak{M}$ 的 p 维 Betti 数 R_p．

在这方面，下面的不等式很重要．设 $\omega \in \wedge_p^\infty(\mathfrak{M})$，它的调和部分 $H(\omega) = 0$，那么必存在绝对常数 $c > 0$，使

$$c\langle\omega, \omega\rangle \leqslant \langle d\omega, d\omega\rangle + \langle d^T\omega, d^T\omega\rangle.$$

对任意 $\omega \in \wedge_p^\infty(\mathfrak{M})$，定义 Green 算子 $G(\omega)$ 为

$$\Delta u = \omega - H(\omega)$$

的解 u．在 Hilbert 空间 $\mathscr{H}^p(\mathfrak{M})$ 中这个方程的广义解存在且唯一，其中 $\mathscr{H}^p(\mathfrak{M})$ 是由 $\wedge_p(\mathfrak{M})$ 按范数

$$\|\omega\|^2 = \langle d\omega, d\omega\rangle + \langle d^T\omega, d^T\omega\rangle$$

完备化得到的．根据Δ的椭圆性，这个解就是古典意义下的解．于是对 $\omega \in \wedge_p(\mathfrak{M})$，我们找出了 Hodge-Kodaira 分解

$$\omega = dd^TG(\omega) + d^TdG(\omega) + H(\omega).$$

在复流形 $\mathfrak{M}$ 上可引进一个实解析 Riemann 度量 g，它可以用正规复解析坐标写成

$$g = 2\sum_{j,k} g_{jk}dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

这样一个度量称作 Hermite 度量，在任一紧复流形上都可引进一个 Hermite 度量．

如 $dg = 0$，则 $\mathfrak{M}$ 上的 Hermite 度量

$$g = 2\sum_{j,k} g_{jk}dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

称作 Kähler 度量．这时，复 Laplace 算子$\Box$写作 $\Box f = \sum g^{ij}\partial^2 f/\partial z_i\partial\bar{z}_j$，且下面的结果成立．

如果 $(\mathfrak{M}, g)$ 是一个 Kähler 流形，$\Box$ 定义如上，则有 $\Box = \frac{1}{2}\Delta$，其中Δ是定义在实 $2N$ 维 Riemann 流形 $(\mathfrak{M}, g)$ 上的 Laplace-Beltrami 算子．

在一般的 Hermite 情形，仿照 Riemann 情形时的论证．只需用$\Box$去代替 Δ，我们就可以定义这时的 Hodge-Kodaira 分解．事实上，如把 $(0, q)$ 型记作 $\wedge_{0,q}(\mathfrak{M})$，调和（数值的或向量值的）$(0, q)$ 型就是那些使 $\Box\omega = 0$ 的 $(0, q)$ 型 ω，那么有 Green 函数 G，使

$$\omega = \bar{\partial}\bar{\partial}^TG(\omega) + \bar{\partial}^T\bar{\partial}G(\omega) + H(\omega),$$

其中 $H(\omega)$ 是ω的调和部分，$G(\omega)$ 是 $\Box u = \omega - H(\omega)$ 的唯一解．

对于同型的形式，我们注意到 L_2 数量积 $\langle , \rangle$，以及相应地，由

$$\langle \bar{\partial}^T\omega, \omega_1\rangle = \langle \omega, \bar{\partial}\omega_1\rangle$$

所定义的 $\bar{\partial}$ 的形式共轭算子 $\bar{\partial}^T$．$\bar{\partial}^T$ 映 $\wedge_{p,q}(\mathfrak{M}) \to \wedge_{p,q-1}(\mathfrak{M})$，

$(\bar{\partial}^T)^2=0$. 此外，复 Laplace 算子

$$\Box=\bar{\partial}\bar{\partial}^T+\bar{\partial}^T\bar{\partial}$$

保持$\Lambda_{p,q}(\mathfrak{M})$不变，和$\bar{\partial}$, $\bar{\partial}^T$可换，在任一固定型的形式上是强椭圆偏微分算子.

关于这些结果的讨论和证明，建议读者去念 Kodaira 和 Morrow 的书(1971).

参 考 文 献

Agmon, S. (1965). "Lectures on Elliptic Boundary Value Problems." Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey

Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L. (1959). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 623–727.

Agmon, S., Douglis, A., and Nirenberg, L. (1964). Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, II *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, 35–92.

Alber, S. (1970) The topology of functional manifolds and the calculus of variations in the large, *Russian Math Surveys* **25**, 51–117.

Alexiewicz, A., and Orlicz, W. (1954). Analytic operations in real Banach spaces, *Studia Math.* **14**, 57–78.

Ambrosetti, A. (1973). Esistenza di infinite soluzioni per problemi non lineari, *Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I* **52**, 660–667.

Ambrosetti, A., and Prodi, G. (1972). On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces, *Annali di Math.* **93**, 231–246.

Amann, H. (1972). Ljusternik-Schnirelmann theory and nonlinear eigenvalue problems, *Math. Ann.* **199**, 55–72.

Amann, H. (1976). Fixed point theorems and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, *SIAM Rev.* **18**, 620–709.

Amann, H. (1976). "Nonlinear Operators in Ordered Banach Spaces and Some Applications to Nonlinear Boundary Value Problems" (Lect. Notes in Math.). Springer-Verlag, New York.

Appel, P. (1921). "Mecanique Rationnelle," Vol. IV. Gauthier-Villars, Paris.

Banach, S. (1920). Thesis, published in *Fund. Math.* **3**, 133–181.

Banach, S., and Mazur, S. (1934). Uber mehrdeutige stetige abbildungen, *Studia Math.* **5**, 174–178.

Bartle, R. (1953). Singular points in functional equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **75**, 366–384.

Batchelor, G. (1967). "Introduction to Fluid Dynamics." Cambridge Univ. Press, London and New York.

Benjamin, T. B. (1971). A unified theory of conjugate flows, *Philos. Trans. Roy. Soc.* **269**, 587–647.

Berger, M. S. (1965). An eigenvalue problem for non-linear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **120**. 145–184.

Berger, M. S. (1967). On Von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate, I, *Comm. Pure Appl. Math.* **20**, 687–719.

Berger, M. S. (1969). A bifurcation theory for real solutions of non-linear elliptic partial differential equations. *In* "Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalues" (J. Keller and S Antman, eds.), pp. 113–216. Benjamin, Reading, Massachusetts.

Berger, M. S. (1970a) On multiple solutions of non-linear operator equations arising from the calculus of variations, *Amer. Math. Soc. Proc. Symp.* 17, 10–27.

Berger, M. S. (1970b). On stationary states for a nonlinear wave equation, *J. Math. Phys.* **11**, 2906–2912.

Berger, M. S. (1971a). On Riemannian structures of prescribed Gaussian curvature for compact 2-manifolds, *J. Differential Geometry* **5**, 325–332.

Berger, M. S. (1971b). On a family of periodic solutions of Hamiltonian systems, *J. Differential Equations* **10**, 17–26.

Berger, M. S. (1971c). Periodic solutions of second order dynamical systems and isoperimetric varational problems, *Amer. J. Math.* **93**, 1–10.

Berger, M. S. (1972). On the existence and structure of stationary states for a nonlinear Klein-Gordon equation, *J. Functional Analysis* **9**, 249–261.

Berger, M. S. (1973). Applications of global analysis to specific non-linear eigenvalue problems, *Rocky Mountain J. Math.* **3**, 319–354.

Berger, M. S. (1974). New applications of the calculus of variations in the large to non-linear elasticity, *Comm. Math. Phys.* **35**, 141–150.

Berger, M. S. (1975). Constant scalar curvature metrics for complex manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc. Inst. Differential Geometry* **27**, 153–170.

Berger, M. S., and Berger, M. S. (1968). "Perspectives in Nonlinearity." Benjamin, New York.

Berger, M. S., and Fife, P. (1968). On Von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate, II. Plate with general boundary conditions. *Comm. Pure Appl. Math.* **12**, 227–247.

Berger, M. S., and Fraenkel, L. E. (1970). On the asymptotic integration of a nonlinear Dirichlet problem, *J. Math. Mech.* **19**, 553–585.

Berger, M. S., and Fraenkel, L. E. (1971). Singular perturbations of non-linear operator equations, *J. Math. Mech.* **20**, 623–631.

Berger, M. S., and Fraenkel, L. E. (1976). Applications of the calculus of variations in the large to free boundary problems of continuum mechanics, *Proc. Conf. Appl. Functional Anal. to Continuum Mech.* (Lect. Notes in Math. **503**), pp. 186–193. Springer-Verlag, New York.

Berger, M. S., and Meyers, N. G. (1971). Generalized differentiation and utility functions. *In* "Preference Utility and Demand." Harcourt, New York.

Berger, M. S., and Plastock, R. (1977). On proper non-linear Fredholm operators (to appear).

Berger, M. S., and Podolak, E. (1974). On nonlinear Fredholm operator equations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **80**, 861–864.

Berger, M. S., and Podolak, E. (1975). On the solutions of a non-linear Dirichlet problem, *Indiana J. Math.* **24**, 837–846.

Berger, M. S., and Podolak, E. (1977). On the homotopy groups of spheres and nonlinear Fredhold operator equations (to appear).

Berger, M. S., and Schechter, M. (1972) Embedding theorems and quasilinear elliptic boundary value problems for unbounded domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* **172**, 261–278.

Berger, M. S., and Schechter, M. (1977). On the solvability of semilinear gradient operator equations, *Advances in Math.* (to appear).

Berger, M. S., and Westreich, D. (1973). A convergent iteration scheme for bifurcation theory on Banach space, *J. Math. Anal. Appl.* 43, 136–144.

Bers, L. (1957). Topology (Lect. Notes). Courant Inst., New York.

Bers, L., John, F., and Schechter, M. (1964). "Partial Differential Equations." Wiley, New York.

Beurling, A., and Livingston, A. E. (1962). A theorem on duality mappings in Banach spaces, *Ark. Mat.* **4**, 405–411.

Birkhoff, G. D. (1927). "Dynamical Systems" (Colloq. Publ. 9), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Birkhoff, G., and Zarantonello, E. (1957). "Jet, Wakes and Cavities." Academic Press, New York.

Böhme, R. (1971). Nichtlineare störung der isolierten eigenwerte selbstadjungierter operatoren, *Math. Z.* **123**, 61–92.

Böhme, R. (1972). Die lösung der verzweigungsgleichungen für nichtlineare eigenwertprobleme, *Math. Z.* **127**, 105–126.

Bourbaki, N. (1949). "Elements de Mathematique." Hermann, Paris.

Brézis, H. (1968). Equations et inequations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18**, 115–175.

Brézis, H. (1973). "Operateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions Dans les Espaces de Hilbert" (Notas de Mat. 50). American Elsevier, New York.

Brout, R. (1965). "Phase Transitions." Benjamin, Reading, Massachusetts.

Browder, F. E. (1954). Covering spaces, fibre spaces and local homeomorphisms, *Duke Math. J.* **21**, 329–336.

Browder, F. E. (1965). Infinite dimensional manifolds and non-linear elliptic eigenvalue problems, *Ann. of Math.* **82**, 459–477.

Browder, F. E. (1968). Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximations, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74**, 651–656.

Browder, F. E. (1976). Nonlinear operators in Banach spaces, *Proc. Symp. P. M.* **18**, pt. 2, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Caccioppoli, R. (1931). Problemi non lineari in analisis funzionale, *Rend. Sem. Nat. Roma* **1**, 13–22.

Cartan, H. (1940). Sur les matrices holomorphes de variables complexes, *J. Math. Pures Appl.* **19**, 1–26.

Cartan, H. (1966). Some applications of the new theory of Banach analytic spaces, *J. London Math. Soc.* **41**, 70–78.

Cartan, H. (1970). "Differential Forms." Hermann, Paris.

Cartan, H. (1971). "Differential Calculus." Hermann, Paris.

Cauchy, A. (1847). Méthode général pour la résolution des systemes d'equations simultanées, *C. R. Acad. Sci. Paris* **25**.

Cesari, L., and Kannan, R., (eds.) (1976). "Nonlinear Functional Analysis and Its Applications." Dekker, New York.

Clark, D. (1973). A variant of the Ljusternik–Schnirelmann theory, *Indiana J. Math.* **22**, 65–74.

Courant, R. (1950). "Dirichlet's Principle." Wiley (Interscience), New York.

Crandall, M. G., and Rabinowitz, P. H. (1971). Bifurcation from simple eigenvalues, *J. Functional Analysis* **8**, 321–340.

Cronin, J. (1953). Analytic functional mappings, *Ann. of Math.* **58**, 175–181.

Cronin, J. (1964). "Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis" (Math. Surveys 11). Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Cronin, J. (1972). Eigenvalues of some nonlinear operators, *J. Math. Anal.* **38**, 659–667.

Cronin, J. (1973). Equations with bounded nonlinearities, *J. Differential Equations* **14**, 581–596.

Dancer, E. N. (1971). Bifurcation theory in real Banach spaces. *J. London Math. Soc.* **23** (3), 699–734.

De Villiers, J. M. (1973). A uniform asymptotic expansion of the positive solution of a non-linear Dirichlet problem, *Proc. London Math. Soc.* **27**, 701–722.

Dieudonné, J. (1960). "Foundations of Modern Analysis," Academic Press, New York. Enlarged and Corrected edition, 1969.

Deprit, A., and Henrard, J. (1968) A manifold of periodic orbits, *Advances in Astron. Astrophys.* **6**, 2–124.

Douady, A. (1965). Le Problème des Modules Sem. Coll. du France.

Dunford, N., and Schwartz, J (1958). "Linear Operators," Part I; (1963), Part II. Wiley, New York.

Eells, J. (1966). A setting for global analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **72**, 751–807.

Eells, J. (1970). Fredholm structures, *Symp. Nonlinear Functional Anal.* **18**, 62–85. Amer. Math. Soc , Providence, Rhode Island.

Ekeland, I., and Temam, R. (1976). "Convex Analysis and Variational Problems." North-Holland Publ., Amsterdam.

Elworthy, K., and Tromba, A. (1970) Differential structures and Fredholm maps, *Proc. Symp. Global Anal.* **15**, 45–94.

Einstein, A. (1955). "The Meaning of Relativity." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Faddeev, L., and Zakharov, V. (1971). Korteweg–de Vries equation as a completely integrable Hamiltonian system, *J. Math. Phys.* **12**, 1548–1551.

Federer, H. (1969). "Geometric Measure Theory." Springer-Verlag, New York.

Fife, P. (1973). Semilinear elliptic boundary value problems with small parameters, *Arch. Rational Mech. Anal.* **52**, 205–232

Förster, O. (1975). Power series methods in deformation theorems (Lect. notes, AMS Summer Inst. Several Complex Variables).

Fraenkel, L. E. (1962). Laminar flow in symmetrical channels with slightly curved walls, II, *Proc. Roy. Soc.* **A272**, 406–428

Fraenkel, L. E. (1973). On a theory of laminar flow in channels of a certain class, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **73**, 361–390.

Fraenkel, L. E., and Berger, M. S. (1974). On the global theory of vortex rings in an ideal fluid, *Acta Math.* **32**, 13–51.

Fréchet, M. (1906). Sur quelque points du calcul fonctionnel, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22**, 1–74.

Friedman, A. (1969). "Partial Differential Equations " Holt, New York.

Friedrichs, K. O. (1955). Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Amer. Math. Soc.* **59**, 485–504.

Fucik, S., Necas, J , and Soucek, V. (1973) "Spectral Analysis of Nonlinear Operators" (Lect. Notes in Math. 343). Springer-Verlag, New York.

Fujita, H. (1961). On the existence and regularity of the steady solutions of the Navier–Stokes equation, *J. Fac. Sci. Univ. Toyko* **9**, 59–102.

Garabedian, P. (1964). "Partial Differential Equations." Wiley, New York.

Gateaux, R. (1922). Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytique, *Bull. Soc. Math. Fr.* **50**, 1–21.

Geba, K. (1964). Algebraic topology methods in the theory of compact fields. *Fund. Math.* **54**, 177–209.

Geba, K., and Granas, A. (1973). Infinite dimensional cohomology theories, *J. Math. Pure Appl.* **52**, 145–270.

Goldring, T. (1977). Thesis, Yeshiva Univ., New York.

Gordon, W. B. (1971). *J. Differential Equations* **10**, 324–335.

Gordon, W. B. (1972). *Amer. Math. Monthly* 79, 755 759.

Gortler, H., Kirchgassner, K., and Sorger, P (1963) Branching solutions of the Benard problem, "Problems of Continuum Mechanics,' SIAM, Providence, Rhode Island.

Granas, A. (1961). Introduction to Topology of Functional Spaces (Univ. of Chicago lecture notes).

Granas, A. (1969). Topics in Infinite Dimensional Topology. Sem. Coll. de France.

Graves, L. (1950). Some mapping theorems, *Duke Math. J.* 17, 111–114.

Gross, L. (1964). Classical analysis on Hilbert space. *In* "Analysis on Function Space" (T. Martin and I. Segal, eds.), pp. 51–68. MIT Press, Cambridge Massachusetts.

Hadamard, J. (1904). Sur les equations fonctionelles, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B* 136, 351.

Hale, J. K. (1969). "Ordinary Differential Equations." Wiley (Interscience), New York.

Hartman, P. (1967). On homotopic harmonic maps, *Canad. J. Math.* 19, 673–687.

Heissenberg, W. (1967). Nonlinear problems in physics, *Phys. Today* (May), pp. 27–33.

Hilbert, D. (1900). Address, Internat. Congr. Math., Paris.

Hildebrandt, S., and Widman, K. O. (1971). On the Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature, *Math. Ann.*

Hille, E. (1948). "Functional Analysis and Semigroups" (Colloq. Publ. 31). Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Hille, E., and Phillips, R. (1957). "Functional Analysis and Semigroups" (Colloq. Publ. 31). Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Hilton, P. (1953). "Introduction to Homotopy Theory." Cambridge Univ. Press, London and New York.

Holm, P., and Spanier, E. H. (1971). Involutions and Fredholm maps, *Topology* 10, 203–218.

Hopf, E. (1951). Über die Anfangswertaufgabe für die hydro gleichungen, *Math. Nachr.* 4, 213–231.

Hormander, L. (1966). "An Introduction to Several Complex Variables." Van Nostrand-Reinhold, Princeton, New Jersey.

Hu, S. (1959). "Homotopy Theory." Academic Press, New York.

Ize, G. (1975). Bifurcation Theory for Fredholm Operators. Thesis, New York Univ.

John, F. (1968). On quasi-isometric mappings, I, *Comm. Pure Appl. Math.* 21, 77–110.

Joseph, D (1976). "Theory of Stability of Viscuous Fluids." Springer-Verlag, New York.

Judovitch, V. I. (1967). Free convection and bifurcation, *Appl. Math. Mech., Trans. PMM* 31, 103–111.

Judovitch, V. I. (1966). Secondary flows and fluid instability between rotating cylinders, *Appl. Math. Mech., Trans. PMM* 30, 688–698.

Karlin, S. (1968). "Total Positivity." Stanford Univ. Press, Palo Alto, California.

Kazdan, J., and Warner, F. (1974). Curvature functions for compact 2-manifolds, *Ann. of Math.* 99, 14–47.

Kazdan, J., and Warner, F. (1975). Scalar curvature and conformed deformation, *J. Differential Geometry* 10, 113–134.

Keller, J. B., and Antman, S., (eds.) (1969). "Bifurcation Theory and Nonlinear Eigenvalue Problems." Benjamin, Reading, Massachusetts.

Kelvin, and Tait, P. (1879). "Treatise on Natual Philosophy." Cambridge Univ. Press, London and New York.

Kirchgässner, K., and Sorger, P (1969). Branching analysis for the Taylor problem, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 22, 183–210.

Kodaira, K., and Morrow, J. (1971). "Complex Manifolds." Holt, New York.

Kolmogrov, A. (1954). Theorie generale des systemes dynamique et mechanique classique, *Proc. Internat. Congr. Math., Amsterdam*.

Krasnoselski, M. A. (1965). "Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations." Pergamon, Oxford.

Krasnoselski, M. A., *et al.* (1972). "Approximate Solution of Operator Equations." Noordhoff, Groningen.

Krasovskiĭ, J. P. (1961). On the theory of steady-state waves of finite amplitude, *Z. Vycisl. Mat. Mat. Fiz.* **1**, 836–855 (in Russian).

Kupka, I. (1965). Counterexample to the Morse–Sard theorem in the case of infinite-dimensional manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **16**, 954–957.

Kuranishi, M. (1965). New proof for the existence of locally complete families of complex structures, *Proc. Conf. Compl. Analy.* Springer-Verlag, Berlin and New York.

Ladyhenskaya, O. (1969). "Mathematical Theory of Viscous and Compressible Flow" (2nd ed.). Gordon & Breach, New York.

Ladyhenskaya, O., and Uralsteva, N. (1968). "Linear and Quasilinear, Elliptic Partial Differential Equations." Academic Press, New York.

Landau, L. (1937). On the theory of phase transitions, *Phys. Z. Sov. Univ.* **11**, 2–39.

Landau, L. (1944). On the problem of turbulence, *Dokl. Akad. Nauk USSR* **44**, 339–342.

Lang, S. (1972). "Differentiable Manifolds." Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Landesman, E., and Lazar, A. (1970). Nonlinear perturbations of linear eigenvalue problems at resonance, *J. Math. Mech.* **19**, 609–623.

Lax, P. (1968). Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21**, 467–490.

Lebesgue, H. (1907). Sur le probleme de Dirichlet, *Rend. Circ. Math. Palermo* **24**, 371–402.

Leray, J. (1933). Etude de diverses equations integrales non lineaires, *J. Math.* **12**, 1–82.

Leray, J. (1952). "La Theorie des Points Fixes et ses Applications en Analyse." pp. 202–208. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Leray, J., and Schauder, J. (1934). Topologie et equations fonctionnelles, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* **51**, 45–78.

Levi-Civita, T. (1925). Determination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie, *Math. Ann.* **93**, 264–314.

Liapunov, A. (1906). Sur les figures d'equilibrium, *Acad. Nauk St. Petersberg* pp. 1–225.

Liapunov, A. (1907). Problem general de la stabilite du mouvement, *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* **17**, 203–474.

Lichtenstein, L. (1931). Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearen Intergralgleichungen und Intergrodifferentialgleichungen nebst Anwendungen, Berlin.

Lichtenstein, L. (1933). "Gleichgewichtsfiguren Rotierender Flüssigkeiten." Springer-Verlag, Berlin.

Lions, J. L. (1969). "Quelques Method de Resolution des Problemes aux Limites Non-lineaires." Dunod, Paris.

Littman, W. (1967). A connection between α-capacity and m–p polarity, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73**, 862–866.

Ljusternik, L. (1966). "Topology of the Calculus of Variations in the Large" (Amer. Math. Soc. Transl. 16), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Ljusternik, L., and Schnirelmann, L. (1930) "Method Topologique Dans Les Problemes Variationelles" (Actualités Sci. Indust 188), Hermann, Paris.

Ljusternik, L., and Sobolev, V. (1961). "Elements of Functional Analysis." Ungar, New York.

Loginov, B. V., and Trenogin, V. A. (1972). The use of group properties to determine multi-parameter families of solutions of nonlinear equations, *Math. Sb.* **14**, 438–452.

Malgrange, B. (1969). Sur l'integrabilité des structures presque complexes, *Symp. Math.* **2**. Academic Press, New York.

Michal, A. (1958). "Le calcul Differential dans les Espaces de Banach." Gauthier-Villars, Paris.

Milnor, J. (1963). "Morse Theory." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Milnor, J. (1965). "Topology from the Differentiable Viewpoint." Univ. of Virginia Press, Charlottesville, Virginia.

Minty, G. J. (1962). Monotone (nonlinear) operators in a Hilbert space, *Duke Math. J.* **29**, 341–346.

Morrey, C. Jr. (1966). "Multiple Integrals in the Calculus of Variations." Springer-Verlag, New York.

Morse, M. (1934). "The Calculus of Variations in the Large" (Colloq. Publ. 18), Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Morse, M., and Cairns, S. (1969). "Critical Point Theory in Global Analysis." Academic Press, New York.

Moser, J. (1966). A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations, I, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **20**, 226–315; II, 449–535.

Moser, J. (1971). A sharp form of an inequality of N. Trudinger, *Indiana Univ. Math. J.* **20**, 1077–1092.

Moser, J. (1973a). On a nonlinear problem in differential geometry. *In* "Dynamical Systems" (M. Peixoto, ed.), Academic Press, New York.

Moser, J. (1973b). "Stable and Random Motions in Dynamical Systems." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Moser, J. (1976). Periodic orbits near an equilibrium and a theorem by Alan Weinstein, *Comm. Pure Appl. Math.* **29**, 727–747.

Nash, J. (1956). The imbedding problem for Riemannian manifolds, *Ann. of Math.* **63**, 20–63.

Nevanlinna, F., and Nevanlinna, R. (1957). "Absolute Analysis." Springer-Verlag, Berlin.

Newlander, A., and Nirenberg, L. (1957). Complex coordinates in almost complex manifolds, *Ann. of Math.* **65**, 391–404.

Nirenberg, L. (1959). On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **13**, 115–162.

Nirenberg, L. (1964). Partial differential equations with application in geometry. *In* "Lectures in Modern Math" (T. Saaty, ed.), Vol. 2, Wiley, New York.

Nirenberg, L. (1971). An application of generalized degree to a class of nonlinear problems, *3rd Colloq. Anal. Fonct., Liege Centre Belge de Recherches Math.* pp. 57–73.

Nirenberg, L. (1972). An abstract form of the Cauchy-Kowalewski theorem, *J. Differential Geometry* **6**, 561–576.

Nirenberg, L. (1973). Lectures on linear partial differential equations, Reg. Conf. 17. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Nirenberg, L. (1974). Topics in Nonlinear Functional Analysis (Lecture Notes). New York Univ.

Nitsche, J. C. C. (1974). "Minimal Surfaces." Springer-Verlag, New York.

Nussbaum, R. (1972). Some asymptotic fixed point theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **171**, 349–375.

Palais, R. (1963). Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology* **2**, 299–340.

Palais, R. (1966). Ljusternik-Schnirelmann theory on Banach manifolds, *Topology* **5**, 115–132

Palais, R. (1967). "Foundations of Global Nonlinear Analysis." Benjamin, Reading, Massachusetts.

Palais, R., and Smale, S. (1964). A generalized Morse theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** 165–171.

Petryshyn, W. V. (1970). Nonlinear equations involving non-compact operators, *Proc. Symp. Pure Math.* **18**, pt. 1, 206–233. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

Pimbley, G. H. (1969). "Eigenfunction Branches of Nonlinear Operators and Their Bifurcations." Springer-Verlag, New York.

Pitcher, E. (1958). Inequalities of critical point theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64**, 1–30.

Plastock, R. (1972). Thesis, Yeshiva Univ., New York.

Plastock, R. (1974). Homeomorphisms between Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **200**, 169–183.

Podolak, E. (1974). Thesis, Yeshiva Univ., New York.

Podolak, E. (1976). On asymptotic nonlinearities, *Indiana J. Math.*.

Podolak, E. (1977). On the range of operator equations with an asymptotically linear term, *Indiana J. Math.* (to appear).

Pohozaev, S. I. (1967). The solvability of nonlinear equations with odd operators, *Funkcional. Anal. Prilozen.* **1**, 66–73.

Pohozaev, S. I. (1968). The set of critical values of a functional, *Math. USSR* **4**, 93–98.

Poincaré, H. (1885). Les figures equilibrium, *Acta Math.* 7, 259–302.

Poincaré, H. (1890). Les fonctions fuchsiennes et l'equation, *Oeuvres* **1**, 512–591.

Poincaré, H. (1892). "Les Methodes Nouvelles de la Mechanique Celeste," Vols. 1–3, Gauthier-Villiars, Paris

Poincaré, H. (1905). Sur les lignes geodesiques, *Trans. Amer. Math. Soc.* **6**, 237–274.

Prodi, G. (1967). Problemi di diramazione per equazioni funzionali, *Boll. Un. Mat. Ital.* **22**, 413–433.

Protter, M., and Weinberger, H. (1967). "Maximum Principles in Partial Differential Equations." Prentic -Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Rabinowitz, P. H. (1971). Some global results for nonlinear eigenvalue problems, *J. Functional Analysis* 7, 487–513.

Rabinowitz, P. H. (1973). Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, *Rocky Mountain J. Math.* 3, 161–202.

Rabinowitz, P. H. (1974). Pairs of positive solutions for nonlinear elliptic partial differential equations, *Indiana Univ. Math. J.* 23, 173–186.

Rabinowitz, P. H. (1975). Theorie du Degree Topologique et Applications (Lecture Notes).

Riddell, R. C. (1975). Nonlinear eigenvalue problems and spherical fibrations of Banach spaces, *J. Functional Analysis* **18**, 213–270.

Riesz, R., and Nagy, B. (1952). Lecons d'analyse fonctionelle, *Akad. Kiado Budapest*.

Rosenbloom, P. C. (1956). The method of steepest descent, *Symp. Appl. Math., Providence, Rhode Island* **6**, 127–176.

Rosenbloom, P. C. (1961). The majorant method, *Proc. Symp. Pure Math.* **4**, 51–72.

Rothe, E. (1951). A relation between the type numbers and the index, *Math. Nachr.* **4**, 12–27.

Rothe, E. (1953). Gradient mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.* **59**, 5–19.

Rothe, E. (1973). Morse theory in Hilbert space, *Rocky Mountain J. Math.* 3, No. 2, 251–274.

Ruelle, D., and Takens, F. (1971). On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.* **20**, 167–192.

Sather, D. (1973). Branching of solutions of nonlinear equations in Hilbert space, *Rocky Mountain Math. J.* 3, 203–250.

Sattinger, D. H. (1971). Stability of bifurcating solutions by Leray-Schauder degree, *Arch. Rational Mech. Anal.* **43**, 154–166.

Sattinger, D. H. (1973). "Topics in Stability and Bifurcation Theory" (Lect. Notes in Math. **309**). Springer-Verlag, New York.

Schauder, J. (1927). Zur theorie stetiger abbildungen in funktionalraumen, *Math. Z.* **26**, 417–431.

Schauder, J. (1929). Invarianz des gebietes in funktionalraumen, *Studia Math.* **1**, 123–139.

Schauder, J. (1930). Der fixpunktsatz in funktionalraumen, *Studia Math.* **2**, 171–180.

Schechter, M. (1971). "Principles of Functional Analysis." Academic Press, New York.

Schmidt, E. (1908). Zur theorie der linearen und nichtlinearen integralgleichungen, III, *Math. Ann.* **65**, 370–399.

Schwartz, J. (1963). Compact analytic mapping of *B*-spaces, *Comm. Pure Appl. Math.* **16**, 253–260.

Schwartz, J. (1964). Generalizing the Ljusternik–Schnirelmann theory of critical points, *Comm. Pure Appl. Math.* **17**, 807–815.

Schwartz, J. (1969). "Nonlinear Functional Analysis." Gordon and Breach, New York.

Seifert, H., and Threlfall, W. (1938). "Variations in Grossen" (reprint). Chelsea, New York.

Sergeraert, F. (1972). Un theoreme de fonctions implicites sur certains espaces de Frechet et quelques applications, *Ann. Ecole Norm. Sup.* **5**, 599–660.

Serrin, J. (1969). The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables, *Philos. Trans. Roy. Soc. London* **264**, 413–496.

Segal, I. E. (1963). The global Cauchy problem for a relativistic scalar field with power interaction, *Bull. Soc. Math. France* **91**, 129–135.

Segal, I. E. (1966). Nonlinear relativistic partial differential equations, *Proc. Internat. Congr. Math., Moscow* pp. 681–690

Siegel, C. L., and Moser, J. (1971) "Lectures on Celestial Mechanics." Springer-Verlag, New York.

Smale, S. (1964). Morse theory and a nonlinear generalization of the Dirichlet problem, *Ann. of Math.* **17**, 307–315.

Smale, S. (1965). An infinite dimensional version of Sard's theorem, *Amer. J. Math.* **87**, 861–867.

Smirnov, V. (1964). "Course in Higher Math." Addison–Wesley, Reading, Massachusetts.

Sobolev, S. L. (1938). Sur un theorems d'analyse fonctionnelle, *Math. Sbor.* **45**, 471–496.

Sobolev, S. L. (1950). "Applications of Functional Analysis to Mathematical Physics" (Amer. Math. Soc. Transl.). Providence, Rhode Island.

Stromgren, (1932). *Bull. Astron.* 9, 87–130.

Spanier, E. (1966). "Algebraic Topology." McGraw-Hill, New York.

Srubshchik, L. S. (1964). On the asymptotic integration of a system of nonlinear equations of plate theory, *Appl. Math. Mech., Trans. PMM* **27**, 335–349.

Stakgold, I. (1971). Branching solutions of nonlinear equations, *SIAM Rev.* **13**, 289–332.

Sternberg, S. (1969). "Celestial Mechanics," Part II. Benjamin, Reading, Massachusetts.

Svarc, A. S. (1964). *Dokl. Akad. Nauk USSR* **154**, 61–63.

Szebehely, V. (1967). "Theory of Orbits." Academic Press, New York.

Takens, F. (1972). Some remarks on the Bohme–Berger bifurcation theorem, *Math. Z.* **129**, 359–364.

Taylor, G. I. (1923) *Proc. Roy. Soc.* **A104** (Sci. Papers **4**), 112–147.

Temam, R. (1975) On the Euler equations of incompressible perfect fluids, *J. Functional Analysis* **20**, 32–43.

Ter-Krikorov, A. M. (1969). On the asymptotic character of the motion of a conservative system acted on by an aperiodic perturbing force, *Appl. Math. Mech., Trans. PMM* **33**, 730–736.

Thom, R. (1975). "Structural Stability and Morphogenesis." Benjamin, Reading, Massachusetts.

Titza, R. (1951). On the general theory of phase transitions. *In* "Phase Transitions in Solids," Chapter 1. Wiley, New York.

Toda, H. (1961). "Composition Methods in Homotopy Groups of Spheres" (Ann. Math Studies **49**). Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Tonelli, L. (1921–1923). "Fondamenti di Calculo Delle Variazioni," Vols. I and II. Zanichelli, Bologna, Italy.

Treves, F. (1970). An abstract nonlinear Cauchy–Kovalevski theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **150**, 77–92.

Trudinger, N. (1967). On imbedding into Orlicz spaces and some applications, *J. Math. Phys.* **17**, 473–484.

Vainberg, M. (1964). "Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators." Holden-Day, San Francisco, California.

Vainberg, M., and Tregogin, V. (1974). "Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations." Noordhoff, Leyden, The Netherlands.

Velte, W. (1964). Stabilitatsverhalten und verzweigung stationares logsungen der Navier-Stokes-schen gleichungen, *Arch. Rational Mech. Anal.* 16, 97–125.

Visik, M. I. (1963). Quasilinear strongly elliptic systems of differential equations in divergence form, *Trans. Moscow Math. Soc.* 12, 140–208.

Volmir, A. S. (1967). "Flexible Plates and Shells" (transl. from Russian by Air Force Systems Command, Wright Patterson A.F.B., Ohio).

Volterra, V. (1930). "Theory of Functionals." Blackie, London.

Von Kármán, T. (1910). "Festigkeitsprobleme Ency. der Math. Wiss," Vol. 4. Teubner, Leipzig.

Von Karman, T. (1940). The engineer grapples with nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 46, 615–683.

von Neumann, J. (1949). "Collected Works," Vol. 6. "Recent Theories of Turbulence," pp. 437–472. Macmillan, New York.

Wallace, A. (1970). "Algebraic Topology." Benjamin, Reading, Massachusetts.

Weinstein, A. (1973). Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems, *Ann. of Math.* 98, 377–410.

Westreich, D. (1972). Banach space bifurcation theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* 171, 135–156.

Westreich, D. (1973). Bifurcation at eigenvalues of odd multiplicity, *Proc. Amer. Math. Soc.* 41, 609–614.

Wehausen, J. (1969). Free surface flows, *In* "Research Frontiers in Fluid Mechanics," Chapter 18. Wiley, New York.

Wightman, A. (1974). Constructive field theory, Introduction to the problems. *In* "Fundamental Problems" (B. Kursonoglu, ed.). Gordon and Breach, New York.

Williams, S. A. (1972). A sharp sufficient condition for solution of a nonlinear problem, *J. Differential Equations* 16, 580–586.

Wintner, A. (1947). "Analytical Foundations of Celestial Mechanics." Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

Yamabe, H. (1960). On the deformation of Riemannian structures on compact manifolds, *Osaka Math. J.* 12, 21–37.

Yoshida, K. (1965). "Functional Analysis." Springer-Verlag, Berlin.

Zehnder, E. J. (1974). A remark about Newton's method, *Comm. Pure Appl. Math.* 27, 361–366.

Zygmund, A. (1934). "Trigonometric Series" (reprint). Dover, New York.

参 考 文 献（补 充）[*)]

Abraham, R. & Marsden, J., Foundations of Mechanics, 2nd. ed., Benjamin, New York, 1978.

Alexander, J. C. & Yorke, J. A., Global Bifurcation of Periodic Orbits, *Amer. J. Math.*, 100(1978), 263—292.

Alexander, J. C. & Yorke, J. A., Calculating bifurcation invariants as elements in the homotopy of the general linear group, *J. Pure Appl. Algebra*, 13(1978), 1—8.

Amann, H., On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary-value Problems, *Indiana Univ. Math. J.*, 21(1971), 125—146.

Amann, H., On the Number of Solutions of Nonlinear Equations in Ordered Banach Spaces, *J. Funct. Anal.*, 11(1972), 346—384.

Amann, H., Saddle points and multiple solutions of differential equations, *Math. Z.*, 169(1979), 127—166.

Amann, H., A note on degree theory for gradient mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 85(1982), 591—597.

Amann, H., Hess, P., A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.*, A84(1979), 145—151.

Amann, H., Zehnder, E., Periodic solutions of asymptotically linear Hamiltonian systems, *Manuscripta Math.*, 32(1980), 149—189.

Amann, H., Zehnder, E., Nontrivial solutions for a class of nonresonance problems and applications to nonlinear differential equations, *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Ser. IV*, Vol. VII, n. 4(1980), 539—603.

Amann, H., Zehnder, E., Multiple periodic solutions for a class of nonlinear autonomous wave equations, *Houston J. of Math.*

Ambrosetti, A. & Mancini, G., Sharp nonuniqueness results for some nonlinear problems, *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, 3(1979), 635—645.

Ambrosetti, A. & Rabinowitz, P. H.; Dual Variational Methods in Critical Points Theory and Applications, *Funct. Anal.*, 14(1973), 349—381.

Antman, S. S., Bifurcation Problems for Nonlinearly Elastic Structures, Applications of Bifurcation Theory, P. H. Rabinowitz (ed.,) 73-125, Academic Press, New York, 1977.

Arnold, V. I., Lectures on Bifurcation and Versal Families, *Russian Math. Surveys*, 27(1972), 54—123.

Arnold, V. I., Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

Auchmuty, J. F. G. & Nicolis, J., Bifurcation Analysis of Nonlinear Reaction-Diffusion Equations I, *Bull. Math. Biol.*, 37(1973), 323—365.

Bahri, A. & Berestycki, H., A perturbation method in critical point theory and applications. Analyse numerique et fonctionnelle, 1—69.

*) 此参考文献为译者所加 译者注。

Benci, V., On the critical point theory for indefinite functionals in the presence of symmetries, *Ist. Math. Appl. U. Dini Univ. di Pisa.* March 1980.

Benci, V.; Some critical point theorems and applications, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**(1980), 147—172.

Benci, V., A geometrical index for the group S and some applications to study of periodic solutions of ordinary differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**(1981), 393—432.

Benci, V. & Rabinowitz, P. H., Critical point theorems for indefinite functionals, *Invent. Math.*, **52**(1979), 241—273.

Berestycki, H., Lions, P. L., Sharp existence results for a class of semilinear elliptic problems, *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, **12**(1981), 9—20.

Borisovich, Yu. G., Zvyagin, V. G. & Sapronov Yu. I., Nonlinear Fredholm maps and the Leray-Schauder theorem, *Uspekhi Math. Nauk*, **32**(1977), 3—54. *Engl. Transl. in Russian Math. Surveys*, **32**, (1977), 1—54.

Bott, R., Lectures on Morse theory, old and new, Bull. Amer Math. Soc, 7(1982), 331—358.

Brezis, H., Coron, J. M. & Nirenberg, L, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P. Rabinowitz, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(1980), 667—684

Brezis, H. & Turner, R. E. L., On a class of superlinear elliptic problems, *Comm. Partial. Diff. Equa.*, **2**(1977), 601—604.

Bresis, H. & Nirenberg, L., Forced vibrations for a nonlinear wave equation. *Comm. Pure Appl. Math*, **31**(1978), 1—30.

Castro, A., A two point boundary value problem with jimping nonline rities, Proceed ing Amer. Math. Soc.

Castro, A. & Lazer, C., Critical point theory and the number of solutions of a nonlinear Dirchlet problem, *Annali di Mat. Pure ed Appl.* (IV), **70**(1979), 113—137.

Chang, K. C., Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 34(1981), 693—712.

Chang, K. C., The obstacle problem and partial differential equations with discontinuous nonlinearites, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(1980), 117—146.

Chang, K. C., On a bifurcation theorem due to Rabinowitz, *J. Systems Sci. Math. Sci.*, **4**(1984), 191—195.

Chang, K. C., Infinite dimensional Morse theory and its applications, Montréal, 1985.

Chang, K. C., Wu, S. P., Li, S., Multiple periodic solutions for an asymptotically linear wave equation, *Indiana Math. J.*, **31**(1982), 721—731.

Chafee, N., The bifurcation of one or more closed orbits from an equalibrium point of an autonomous differential equation, *J. Diff. Eq.*, 4(1968), 661—679.

Chandrasekar, S., Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Oxford Univ. Press, Oxford, 1961.

Chow, S. N., Hale, J. K. & Mallet-Paret, J., Application of generic bifurcation, I and II, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 59(1975), 159—188 and 62(1976), 209—235.

Clark, D. C., A variant of Lusternik-Schnirelman theory, *Indiana Univ. Math. J.*, **22** (1972), 65—74.

Clarke, F. H. & Ekeland, I.; Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(1980), 103—116.

Coles, D., Transition in cricular couette flow, *J. Fluid Mech.*, 21(1965), 385—425.

Conleg, C. C., Isolated invariant sets and the Morse index, C. B. M. S. Regional conf. ser. in Math. no. 38(1978) A. M. S. Providence, R. I.

Conley, C. C., Isolated Invariant Sets and the Morse Index, CBMS Regional Conference Series 38, American Mathematical Society, Providence, 1978.

Conley, C. C., Zehnder, E., The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. Arnold, *Invent. Math.*, 73(1983), 33—49.

Conley, C. C., Zehnder, E., Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37(1984), 207—253.

Crandall, M. G., An introduction to constructive aspects of bifurcation theory, P. H. Rabinowitz (ed.), 1—35, Academic Press, New York, 1977.

Crandall, M. G. & Rabinowitz. P. H., Bifurcation, perturbation of simple eigenvalues and linearized stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52(1973), 161—180.

Crandall, M. G. & Rabinowitz, P. H., The principle of exchange of stability Dynamical Systems, A. R. Bednarek & L. Cesari (eds.), Academic Press, 1977.

Crandall, M. G. & Rabinowitz, P. H., The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 67(1977), 53—72.

Dancer, E. N., Global solution branches for positive mappings, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 52(1973), 181—192.

Davey, A., DI Prima, R. C. & Stuart, J. T., On the instability of Taylor vortices, *J. Fluid Mech.*, 31(1968), 17—52.

Defigueiredo, D., Lious, L. & Nussbaum, R. D., Estimations a priori pour les solutions positives de elliptiques semilineaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 290(Feb. 4, 1980), ser. A., 217—220.

Ekeland, I.; On the variational principle, *J. Math. Anal. Appl.*, 47(1974), 324—353.

Ekeland, I., Periodic solution of Hamiltonian equation and a theorem of P. Rabinowitz, *J. Diff. Eq.*, 34(1979), 523—534

Ekeland, I. & Lasry, J. M., Nombre de solutions periodiques des equations de Hamilton, *C. R. Acad. Soc. Paris*, 288, Serie A (1979), 209—211.

Ekeland, I. & Lasry, J. M., On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface, *Annals of Math.*, 112(1980), 283—319.

Ekeland, I. & Teman, R., Convex analysis and variational problems, Vol. I, Studies in Math. & Appl. North-Holland, Amsterdam, American Elsevier, New York, 1976.

Eiworthy, K. D. & Tromba, A. J., Differential structures and Fredholm maps, Proc. Sympos. pure Math. (Berkeley, California, 1968) Vol. 15, Amer. Soc., Providence, R. I., 1970, 45—94.

Eiworthy, K. D. & Tromba, A. J., Degree theory on Banach manifolds, Proc. Symp. Pure Math. 18, part I, Nonlinear functional analysis, A. M. S. 1970, 86—94.

Fadell, E. R. & Rabinowitz, P. H.; Bifurcation for odd potential operators and alternative topological index. *J. Funct Anal*, 26(1977), 48—67.

Fadell, E. R. & Rabinowitz, P. H.; Generalized cohomological index choories for Lie

groups actions with an application to bifurcation questions for Hamiltonian systems, *Inv. Math.*, 45(1978), 139—175.

Fife, P. C., The Benard problem for generalized fluid dinamical equations and remarks on Boussinesq equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 20(1970), 303—326.

Fife, P. C., Branching phenomena in fluid dynamic and chemical reaction-diffusion theory, Eigenvalues of nonlinear problems, G. Prodi (ed.), 23—83, Edizioni Cremonese, Roma, 1974.

Fife, P. C., Stationary patterns for reaction diffusion equations, Nonlinear diffution, W. E. Fitzgibon & H. F. Walker (eds.), Research Notes in Math., Pitman, London, 1977.

Fife, P. C., Asymptotic states for equations of reaction and diffusion, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84(1978), 693—726.

Fife, P. C., Mathematical aspects of reaction-diffusion systems, Lecture Notes in Biomath., Vol. 28, Springer, Berlin, 1979.

Fife, P. C. & Joseph, D., Existence of convective solutions of the generalized Bénard problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 33(1969), 116—138.

Friedrichs, K. O. & Stokerr, J., The nonlinear boundary value problem of the bucled plate, *Am. J. Math.*, 63(1941), 839—888.

Fuller, F. B.; An index of fixed point type for periodic orbits, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 133—148.

Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

Golubitsky, M. & Schaeffer, D., A theory for imperfect bifurcation via singularity theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(1978), 21—98.

Hartman, R., Ordinary differential equations, John Wiley, New York, 1984.

Hamilton, R. S., The inverse function theorem of Mash and Moser, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 7: 1(1982), 65—222.

Henry, D., Geometric theory of semilinear parabolic equations, Univ. of Kentucky, Lecture notes, 1974.

Herschkowitz, H. & Kaufman, M., Bifurcation analysis of nonlinear reaction-diffusion equations II, *Bull. Math. Biol.*, 37(1975), 589—636.

Hess, P., On a nonlinear elliptic boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type, *Boll. Un. Mat. Ital.* (5), 17-A(1980), 187—192.

Hess, P., Kato, T., On some linear and nonlinear eigenvalue problems with indefinite weight functions, *Comm. Partial Differential Equations*, 5(1980), 999—1030.

Hofer, A., Variational and topological methods in partially ordered Hilbert spaces, *Math. Ann.*, 261(1982), 493—514.

Hofer, H., A note on the topological degree at a critical point of mountainpass-type *Proc. Amer. Math. Soc.*, 90(1984), 309—315.

Hopf, E., Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationaren Lösung eines differential systems, *Ber. Math. Phys. Sachsische Academie der Wissenschaften Leipzig*, 94(1942), 1—22.

Hörmander, L., The boundary value problems of physical geodesy, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 62(1976), 1—52.

Iooss, G., Existence et stabilité de la solution périodique sécondaire intervenant dans les problémes d'evolution du type Navier-Stokes, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 47 (1972), 301—329.

Iooss, G., Stabilité et bifurcation, Dept. of Math., Univ. of Paris Sud, Orsay, 1973.

Iooss, G., Bifurcation of a periodic solution of the Navier-Stokes equations into an invariant torus, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 58(1975), 35—56.

Iooss, G., Secondary bifurcation of steady solution into an invatiant torus for evolution problems of Navier-Stokes type, Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics, 354—365, Lecture Notes in Math., Vol. 503, Springer, Berlin, 1976.

Iooss, G., Direct bifurcation of a steady solution of the Navier-Stokes equations into an invariant torus, Turbulence and Navier-Stokes equations, 113—130, Lecture Notes in Mech., Vol. 565, Springer, Berlin, 1976.

Iooss, G., Sur la deuxième bifurcation d'une solution stationnaire de systeme de type Navier-Stokes, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 64(1977), 339—369.

Iooss, G., Bifurcation of maps and applications, North-Holland, Amsterdam, 1979.

Iudovich, V. I., On the origin of convection, *Prikl. Mat. Mek.* (*J. Appl. Math. Mech.*), 30(1966), 1193—1199.

Iudovich, V. I., Investigation of autc-oscillations of a continuous medium occurring at lass of stabilit of a stationary mode, *Prikl. Mat. Mek.* (*J. Appl. Math. Mech.*), 36(1972), 450—459.

Ize, J., Bifurcation theory for Fredholm operators, Memores Amer. Math. Soc., 174, 1976.

Joseph, D., Stability of convection in containers of arbitrary shape, *J. Fluid Mech.*, 47(1971), 257—282.

Joseph, D., Stability of fluid motions, I, II, Springer, Berlin, 1976.

Joseph, D. & Nield, D. A., Stability of bifurcating timeperiodic and steady solutions of arbitrary amplitude, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 58(1975), 369—380.

Joseph, D. & Sattiger, D. H.; Bifurcating time-periodic solution and their stability, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 45(1972), 79—109.

Kato, T., Perturbation theory for linear operators, Springer, Berlin, 1966.

Kirchgassner, K. & Kielhofer, H.; Stability and bifurcation in fluid dynamics, *Rocky Mountain Math. J.*, 3(1973), 275—318.

Kirchgassner, K. & Sorger, P., Stability analysis of Branching solutions of the Navier-Stokes equations, Proc. 12th Int. Cong. Appl. Mech., Stanford Univ., August 1968.

Klainerman, S., Global existence for nonlinear wave equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(1980), 43—101.

Kopell, N. & Howard, L. N.; Bifurcations under nongeneric conditions, *Advances in Math.*, 13(1974), 274—283.

Krasnoselskii, M. A., Positive solutions of operator equations, Nordhoff, Groningen, 1964.

Lazer, A. C., McKenna, P. J., On the number of solutions of a nonlinear. Dirichlet problem, *J. Math. Anal. Appl.*, 84(1981), 282—294.

Lebowitz, N. R., Bifurcation and stability problems in astrophysics. Applications of bifurcation theory, P. H. Rabinowitz (ed.), 259—284, Academic Press, New York, 1977.

Liapunov, M. A., Probléme Générale de la stabilité du mouvement, Annals of Mathematical Studies, 17, Princeton, 1949.

Lloyd, N. G., Degree theory, Combridge tracts in Math. No. 73, Combridge Univ. Press, London, 1978.

Marino, A., La biforcazione nel caso variazionale, *Conf. Sem. Mat. dell'Univ. Bari*, **132**(1977).

Marsden, J., Qualitative methods in bifurcation theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 84 (1978), 1125—1148.

Marsden, J. & Mccracken, M., The Hopf bifurcation and its applications, Springer, Berlin, 1976.

Matkowsky, B. J. & Reiss, E. L., Singular Perturbations of bifurcations, *SIAM J. Appl. Math.*, **33**(1977), 230—255.

Moser, J., A new technique for the constract of solutions of nonlinear differential equations, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **47**(1961), 1824—1831.

Nemytskii, V. V., Qualitative theory of differential equations, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960.

Ni, W. H., Some minimax principles and their applications in nonlinear elliptic equations, *J. d'Analyse Math.*, **37**(1980), 248—275.

Nirenberg, L., Remark on nonlinear problems, The Chern Symposium, 1979 (W. Y. Hsiang et al eps), Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980, 185—212.

Nirenberg, L., Topics in Nonlinear Functional Analysis, Courant Institute Lecture Notes, New York, 1974.

Nirenberg, L., Variational and topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc.* (New Series), Vol. 4, No. 3(1981), 267—302.

Palais, R. S., Critical point theory and the minmax principle, *Proc. Symp. Pure Math.*, 15, Am. Math. Soc., 185—212, Providence, R. I., 1970.

Prodi, G. (ed.), Eigenvalues of nonlinear problems. C. I. M. E., Edziioni Cremonese, Roma, 1973.

Prodi, G. & Ambrosetti, A., Analisi Non Lineare, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1973.

Rabinowitz, P. H., Existence and nonuniqueness of rectangular solutions of the Benard problem, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 24(1968), 32—57.

Rabinowitz, P. H., Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, Eigenvalue of nonlinear problems, G. Prodi, editor, Edizioni Cremones, Roma, 1974, 141—195.

Rabinowitz, P. H., Free vibrations for a semilinear wave equation, *Comm. Pure Appl. Math.*, **31**(1978), 157—184.

Rabinowitz, P. H., A variational method for finding periodic solutions of differential equations, Nonlinear evolution equations, M G Crandall ED., Academic Press, New York, 1978, 225—251.

Rabinowitz, P. H., Some aspects of nonlinear eigenvalue problems, *Rocky Mountain*

Math. J., 3(1973), 161—202

Rabinowitz, P. H., Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, Eigenvalue of nonlinear problems, G. Prodi (ed.), 141—195, C. I. M. E., Edizioni Cremonese, Roma, 1975.

Rabinowitz, P. H., Survey of bifurcation theory, Dynamical systems, An International symposium, vol. 1, L. Cesari, J. K. Hale & J. P. Lasalle (eds.), 83—96, Academic Press, New York, 1976.

Rabinowitz, P. H., A bifurcation theorem for potential operators, *J. Funct. Anal.*, 25 (1977), 412—424.

Rabinowitz, P. H., (ed.), Applications of bifurcation theory, Academic Press, New York, 1977.

Sattinger, D. H., Bifurcation of periodic solutions of the Navier-Stokes equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 41(1971), 66—80.

Sattinger, D. H., Topics in stability and bifurcation theory, Lecture Notes in Math., vol. 309, Springer, Berlin, 1973.

Stoker, J. J., Nonlinear elasticity, Gordon and Breach, New York, 1968.

Struwe, M., On a critical point theory for minimal surfaces spanning a wire in R, *J. Reine Angew. Math.*, 349(1984), 1—23.

Tian, G., On the mountain pass theorem, *Kexue Tongbao*, 29(1984), 1150—1154.

Thom, R., Structural Stability and morphogenesis, Benjamin, New York, 1972.

Turner, R. E. L., Transversality and cone maps, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 58(1975), 151—179.

Vainberg, M. M. & Trenogin, V. A., The method of Liapunov-Schmidt in the theory of nonlinear equations and their further development, *Russian Math. Surveys*, 17(1962), 1—60.

Vege, J. M., A constructive approach to the problem of bifurcation from simple eigenvalues, Applied Math., Technical report No. 7808, Northwestern Univ., 1979.

Weinstein, A., Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems, *Inv. Math.*, 20 (1973), 47—57.

田方增　非线性泛函分析国外近况简述，应用数学与计算数学，5(1979)，60—86.

关肇直　泛函分析讲义，高等教育出版社，1958.

关肇直、张恭庆、冯德兴　线性泛函分析入门，上海科学技术出版社，1979.

江泽涵　拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978.

江泽涵　不动点类理论，科学出版社，1979.

陈省身，陈维桓　微分几何讲义，北京大学出版社，1983.

陈文嫄　非线性泛函分析，甘肃人民出版社，1982.

郭大钧　非线性泛函分析，山东科学技术出版社，1985.

张恭庆　带间断非线性项的椭圆型方程的多重解，中国科学，5(1977)，415—430.

张恭庆　一个变化的 Mountain Pass 定理，中国科学(A辑)，4(1983)，306—317.

张恭庆 姜伯驹　集值映射的不动点指数与带间断非线性项的椭圆型方程的多重解，数学学报，21(1978)，26—43.

夏道行、严绍宗、吴卓人、舒五昌　实变函数论与泛函分析(下册)，人民教育出版社，1979.

李正元、钱敏　向量场的旋转度理论及其应用，北京大学出版社，1982.

内 容 索 引

外 文

一　画

三　画

七　画

八　画

九　画

十　画

十 一 画

十 二 画

十 三 画

十 四 画

十五画以上

译　后　记

M.S.Berger 的专著“非线性与泛函分析”无疑是一本很具特色的书。这不仅由于它的内容丰富,涉及到众多的数学分支,以及力学、物理学等邻近学科中的非线性问题,还在于它的内容的选取、结构和安排都与一般讲述非线性泛函分析的书籍有所不同。作者不仅系统地讲述了处理非线性问题的现代理论和方法,而且对应用问题给予了大量的篇幅。同时,此书很注重向读者介绍问题的来源,理论的背景,要解决什么问题,以及它们的应用。因此,它不仅对从事泛函分析,微分方程,微分几何等分支的理论研究的同志有用,对于其它一些领域(如物理学,力学,天文学,理论物理,计算数学,数学经济学等)的科技人员,对从事应用数学工作的人来说,也是一本很有价值的参考书。如果您的工作与非线性问题有关,那么本书对您将是大有助益的。

毋庸讳言,原书也有较大的缺点,即印刷错误,笔误,疏忽之处较多,乃至较大的错误也偶有出现。这给翻译工作带来了很大的困难。通过讨论班,给研究生讲课等方式,我们尽力发现问题并给予修正,以资弥补。小错就直接改过来了,不再注明。较大的更动则加注标明,或代为改正,或指出错误。但由于此书涉及知识面太广,我们水平有限,有些地方又很难给出妥当的改动,只好原文照译。此外,没发现的问题或改动不当之处在所难免,还望读者批评指正。

在翻译过程中曾得到范先令同志的帮助,特此致谢。